Spřízněné trojúhelníky

Pavel Leischner

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Pedagogická fakulta, Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
email: leischne@pf.jcu.cz

Abstrakt. Věta o rovnoběžníku obsahuje účinný a jednoduchý nástroj pro řešení některých geometrických úloh, její klasická elementární formulace však brání využití poznatku v plném rozsahu. Příspěvek definuje spřízněné trojúhelníky jako ty, které se shodují ve dvou stranách a přitom vnitřní úhly těmito stranami sevřené dávají v součtu úhel přímý. Délky stran spřízněných trojúhelníků splňují vztah z věty o rovnoběžníku. Pomocí spřízněných trojúhelníků lze snadněji řešit úlohy i objevovat matematické vztahy, jak dokládá metodický námět i důkaz málo známé nerovnosti pro konvexní čtyřúhelník.

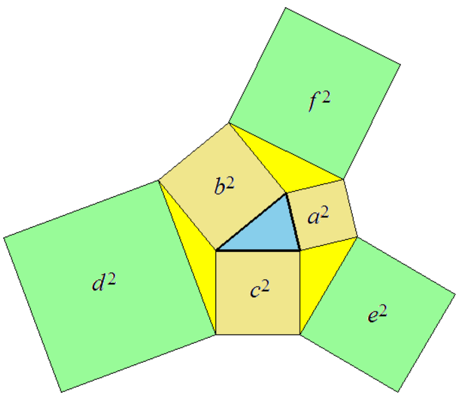
Klíčová slova: Planimetrie, věta o rovnoběžníku, didaktika matematiky, metody řešení úloh.

1 Úvod

Před časem došlo k didaktickému sporu [1] o postupu řešení úlohy:

Úloha 1. Nad stranami obecného trojúhelníka jsou sestrojeny čtverce s obsahy a^2, b^2 a c^2. Nad stranami trojúhelníků, jež vyplňují mezery mezi čtverci podle obr. 1, lze ještě sestrojit čtverce s obsahy d^2, e^2 a f^2. Dokažte, že platí:

$$d^2 + e^2 + f^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \tag{1}$$

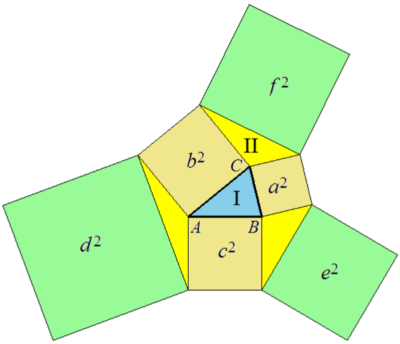


Obr. 1: Obrázek k úloze 1

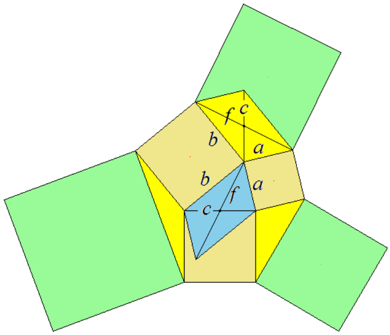
Podle jednoho názoru spočíval nejlepší způsob řešení v aplikaci kosinové věty. Podle druhého spočívá jednodušší a metodicky vhodnější postup na využití věty o rovnoběžníku.

Příspěvek na základě analýzy obou postupů navrhuje jiný přístup k výuce spjaté s větou o rovnoběžníku.

2 Dvě řešení úlohy 1



Obr. 2: Obrázek k 1. řešení



Obr. 3 Obrázek ke 2. řešení

1. Řešení (užití kosinové věty). Z kosinové věty pro trojúhelníky I a II na obr. 2 plyne $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ a $f^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$. Sečtením obou vztahů zjistíme

$$f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2 \tag{2}$$

a po sečtení s analogickými vztahy $e^2 = 2\left(c^2 + a^2\right) - b^2$ a $d^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2$ obdržíme (1).

2. Řešení (pomocí věty o rovnoběžníku). Trojúhelníky I a II z obr. 2 doplníme na rovnoběžníky, jak znázorňuje obr. 3. Tyto rovnoběžníky jsou shodné a podle věty o rovnoběžníku platí

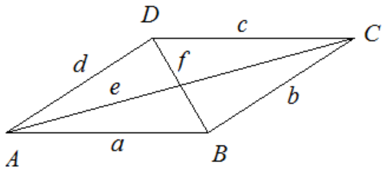
$$f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2. \tag{3}$$

Po sečtení s analogickými vztahy $e^2 = 2\left(c^2 + a^2\right) - b^2$ a $d^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2$ dostaneme rovnost (1).

Poznámka. Věta o rovnoběžníku říká, že *součet druhých mocnin délek úhlopříček je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin délek všech jeho stran*. Při označení podle obr. 4 tedy platí

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right). \tag{4}$$

Věta nabyla na významu od roku 1935, kdy J. von Neumann ukázal, že Banachův prostor, v němž tato věta platí, je Hilbertův prostor.



Obr. 4: Věta o rovnoběžníku

3 Analýza řešení, spřízněné trojúhelníky

První řešení představuje standardní trigonometrické řešení, v němž snad nejtěžším krokem je objevit, že v trojúhelnících I a II platí pro úhly γ a δ při jejich společném vrcholu *A* vztah $\gamma + \delta = \pi$ a odtud $\cos\delta = -\cos\gamma$. Pomocí kosinové věty je odvozena rovnost (2) téhož tvaru jako vztah (3) z věty o rovnoběžníku, kterou začíná řešení druhé.

Druhé řešení nevyžaduje znalost goniometrických funkcí a proto je vhodné i pro práci s mladšími žáky. Vychází z geometrického postřehu vyšší kvality. Jistě bychom uvítali, kdyby naši žáci uměli takto úlohy řešit. Potíž je v tom, že většinou neznají větu o rovnoběžníku. Ta se dnes na našich školách vyskytuje většinou jen ve formě úlohy: "Pro rovnoběžník na obr. 4 odvoďte (užitím kosinové nebo Pythagorovy věty) vztah (4)." Pokud se dále nevyužívá, je to z pohledu žáků nudný a zbytečný poznatek. Druhá potíž je, že i kdyby větu o rovnoběžníku dobře znali, asi by je nenapadlo doplnit do obrázku rovnoběžníky. V takových dovednostech nejsou zběhlí.

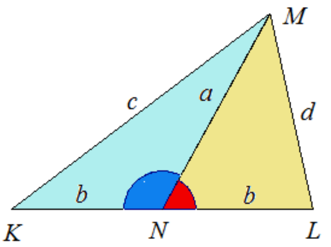
Článek [1] preferuje druhé řešení a ukazuje užitečnost věty o rovnoběžníku i pro jiné matematické situace. Inspirován těmito podněty jsem si uvědomil didaktický nedostatek elementární formulace věty o rovnoběžníku: Vztah (4) omezujeme na rovnoběžník a tím klademe překážky jeho plnému využití.

Při označení podle obr. 4 totiž rovnost (4) představuje vztah mezi délkami stran trojúhelníků *ABC* a *ABD,* z nichž první lze interpretovat jako grafické znázornění součtu a druhý jako grafické znázornění rozdílu vektorů **AB** a **AD**. Rovnost (4) je metrický vztah mezi skaláry |**AB**|, |**AD**|, |**AD + AB**| a |**AD - AB**|. Není tedy nutné představovat si trojúhelníky *ABC* a *ABD* uvězněné v rovnoběžníku. Dejme jim volnost a pojmenujme je **spřízněné trojúhelníky**. *Jsou to každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a pro něž platí, že úhly těmito stranami sevřené dávají v součtu úhel přímý.*

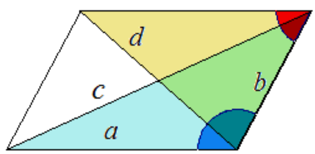
Nebudu rozvádět, jak mne práce se spřízněnými trojúhelníky pobavila a usnadnila mi řešení některých geometrických problémů. Uvedu jen stručný námět na využití tohoto pojmu při rozvíjení geometrického myšlení žáků.

Námět pro práci v matematickém kroužku. Před schůzkou si pomocí Geogebry nebo Cabri geometrie zhotovíme "stavebnici", která ve svém velkém provedení může obsahovat všechny útvary z obr. 1. V minimálním provedení obsahuje dva spřízněné trojúhelníky. Vytiskneme sestrojené útvary na papír, namnožíme potřebný počet výtisků a rozdáme žákům, aby si do schůzky útvary vystřihli.

Na schůzce začneme zkoumáním vlastností dvojice spřízněných trojúhelníků. Vybídneme žáky, aby trojúhelníky k sobě přikládali různými způsoby a zjistili, co mají společné a v čem se liší. Termín "spřízněné trojúhelníky" zavedeme až žáci objeví, že se trojúhelníky shodují ve dvou stranách a že úhly těmito stranami sevřené dávají v součtu úhel přímý. Dále by měli zjistit, že *spřízněné trojúhelníky mají stejné výšky ke stejně dlouhým stranám a proto i stejný obsah*. Lze je k sobě přiložit do tvaru trojúhelníka (obr. 5), resp. (neúplného) rovnoběžníka (obr. 6), resp. lichoběžníka (obr. 7 - trojúhelníky *ADC* a *BDC*).



Obr. 5: Trojúhelník



Obr. 6: Rovnoběžník

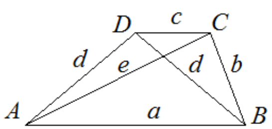
S případnou pomocí učitele a s využitím Pythagorovy věty dále žáci odvodí vztah (4). Pro situaci na obr. 6 interpretujeme (4) jako větu o rovnoběžníku, pro situaci na obr. 5 pak po úpravě jako Stewartův vztah, který vyjadřuje délku těžnice trojúhelníka pomocí délek jeho stran:

$$|MN|^2 = \frac{1}{2}\left(|KM|^2 + |LM|^2\right) - \frac{1}{4}|KL|^2 .$$

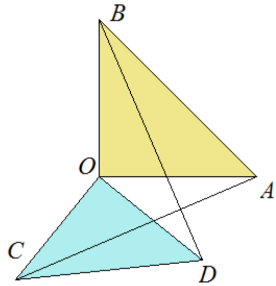
Další náměty jsou uvedeny ve formě úloh:

Úloha 2. Dokažte, že v lichoběžníku *ABCD* se základnami *AB* a *CD* platí:
Je-li $|AD| = |BD|$, pak

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 2\left(|BD|^2 + |CD|^2\right).$$



Obr. 7: Lichoběžník

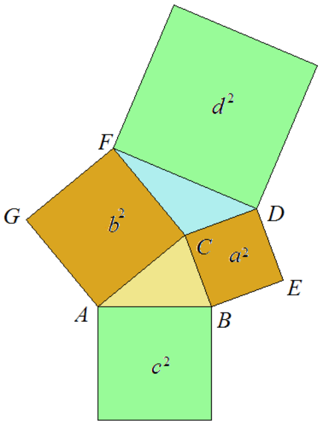


Obr. 8: K úloze 3

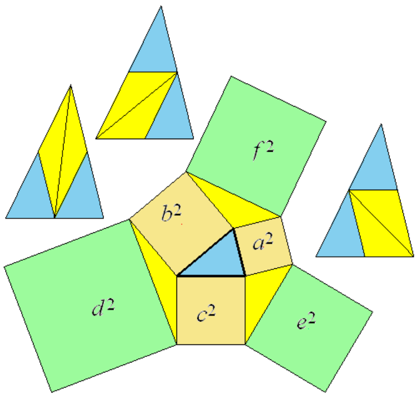
Úloha 3. Nechť *ABO* a *CDO* jsou dva rovnoramenné trojúhelníky s pravými úhly při společném vrcholu *O*. Dokažte, že úsečky *AC* a *BD* jsou navzájem kolmé a shodné.

Úloha 4. Nechť Napište vztah mezi obsahy čtverců na obr. 9. Co musí platit, aby vztah vyjadřoval Pythagorovu větu?

Úloha 5. S využitím vlastností spřízněných trojúhelníků vyřešte úlohu 1.



Obr. 9: Zobecněná Pythagorova věta



Obr. 10: K úloze 7

Úloha 6. Dokažte, že v trojúhelníku *ABC* při obvyklém značení délek stran a těžnic platí

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \qquad (5)$$

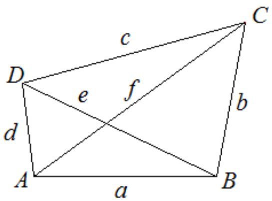
Úloha 7. Vztahy (1) a (5) spolu úzce souvisí. Objasněte jak. Nápovědu poskytuje obr. 10.

4 O jedné málo známé nerovnosti

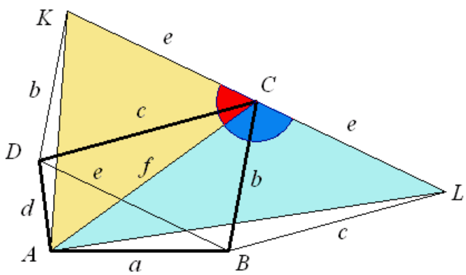
Jaromír Šimša odvodil na jaře r. 2010 pomocí úvah o součtu a rozdílu vektorů, že v každém konvexním čtyřúhelníku při označení podle obr. 11 platí

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \geq 2\left(e^2 + f^2\right), \qquad (6)$$

přičemž rovnost nastává, právě když *ABCD* je rovnoběžník. Nenašli jsme ji v dostupných publikacích. Nerovnost byla v témže roce zařazena jako důkazová úloha do česko-polsko-slovenského střetnutí MO. Vektorové odvození lze nalézt ve [2], str. 192.



Obr. 11: Konvexní čtyřúhelník



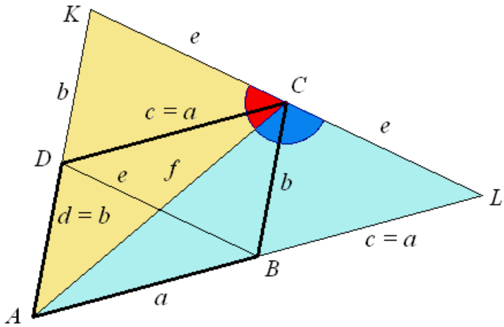
Obr. 12: K důkazu vztahu (6)

Ukážeme si, že vztah (6) můžeme snadno nalézt pomocí úvah o spřízněných trojúhelnících. Na obr. 12 je bod *K* obrazem bodu *B* v symetrii podle středu strany *CD*. Bod *L* je obrazem bodu *D* v symetrii podle středu strany *BC*. Délky stran spřízněných trojúhelníků *ACL* a *ACK* splňují vztah

$$|AL|^2 + |AK|^2 = 2\left(e^2 + f^2\right).$$

Odtud a z trojúhelníkových nerovností $a + c \geq |AL|$ a $b + d \geq |AK|$ pro trojúhelníky *ALB* a *AKD* plyne (6).

Rovnost nastává, právě když se body *B* a *D* nachází uvnitř úseček *AL* a *AK* (obr. 13), to znamená, když *ABCD* je rovnoběžník.



Obr. 13: K rovnosti ve vztahu (6)

5 Závěr

Je všeobecně známo, že kvalitní výuka matematiky staví na objevování matematických poznatků žáky. Cesta objevování by měla být zajímavá a taková, aby studenti měli prostor k uplatnění svých originálních postupů. V příspěvku jsem chtěl upozornit, že při hledání takové cesty bychom nemuseli vždy lpět na tradici. Nebojme se hledat nové přístupy ke starým tématům, ukáže-li se to potřebné. Lze tím zpestřit a zefektivnit výuku i rozšířit vlastní matematické poznatky a dovednosti.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu FRVŠ-494/2012. Bude využit v souboru materiálů zaměřeného na metody řešení planimetrických úloh, který ještě letos zveřejníme na stránkách naší katedry matematiky.

Literatura

[1] V. Dlab: *Důkladné porozumění elementární matematice*, Učitel matematiky, roč. 17, č. 3 (71), 1978, str. 169-182, JČMF, Praha 2009.

[2] J. Elbelová: *Vektorové metody v eukleidovské geometrii*, disertační práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2011.