

METODY ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH

<http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/mrg.html>

Pavel Leischner

leischne@pf.jcu.cz

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Pedagogická fakulta

2012

ISBN 978-80-7394-378-3

Obsah

1 Úvod	- 3 -
2 Některé metody řešení konstrukčních úloh	- 9 -
2.1 Využití množin bodů s danou vlastností	- 9 -
2.2 Sestrojení potřebného prvku užitím podobnosti	- 13 -
2.3 Využití shodných zobrazení	- 18 -
2.4 Konstrukční úlohy řešené na základě algebraického výpočtu	- 29 -
2.5 Užitečné postřehy a poznatky	- 31 -
2.5.1 Vázané prvky	- 31 -
2.5.2 Vlastnosti os úhlů trojúhelníka	- 35 -
2.5.3 Věta o délkách tečen	- 38 -
3. Aplikace	- 42 -
3.1 Problém místnosti v podkroví a izoperimetrické úlohy	- 42 -
3.2 Osová souměrnost - aplikace	- 49 -
3.2.1 Heronova úloha	- 49 -
3.2.2 Fagnanova úloha	- 53 -
3.2.4 Matematické kulečnický a příbuzné úlohy	- 62 -
3.3 Minimální síť	- 75 -
3.3.1 Fermatova úloha	- 75 -
3.3.2 Steinerova úloha	- 83 -
3.4 Myšlenkové experimenty	- 96 -

Tento text vznikl v rámci projektu FRVŠ-494/2012. Je určen studentům na středních školách, studentům učitelství matematiky, učitelům i jiným zájemcům, začátečníkům i pokročilým. Pokud jste si jej neotevřeli na webu, najdete jej na adrese [a] včetně všech příloh a doplňků. Před studiem doporučujeme stáhnout si z [a] přílohu 1, v níž uživatel najde interaktivní soubory k řešeným úlohám i k úlohám ze cvičení. Soubory jsou vyrobeny v Cabri II+.

Podstatná část textu se týká konstrukčních úloh. Po stručném teoretickém úvodu následují v druhé kapitole ukázky řešení konstrukčních úloh. Jsou seřazeny tak, aby se uživatel seznámil se základními metodami jejich řešení. Třetí kapitola je věnována aplikacím. Není omezena jen na ryze konstrukční úlohy a doufám, že aspoň trochu obohatí o některé poznatky i odborníky.

Záměrně jsem do textu nevlozil hyperaktivní odkazy, které by umožnily přímý přechod k souborům z přílohy 1. Čtenáři doporučuji při studiu co nejvíce používat klasický přístup: Kreslit si na papír obrázky geometrických situací a pomocí nich řešit předložené problémy. Soubory z přílohy 1 by měly sloužit jako nápověda, kontrola správnosti uživatelského řešení a vizualizace diskusí počtu řešení. Jsou též vhodné tehdy, když nám k práci nestačí jen rukou nakreslený obrázek (viz například úlohy z odstavce 3.2.4).

Přeji čtenářům příjemné chvíle strávené nad tímto textem a uvítám případné připomínky.

V Českých Budějovicích, 16.11. 2012

Pavel Leischner

1 Úvod

Konstrukční úlohy požadují sestavit geometrický útvar, jsou-li o něm dány dostatečné informace, například délky některých úseček nebo úhlů, resp. jsou již v dané rovině umístěny některé části útvaru. Z tradičních důvodů tyto hodnoty nebo části útvaru nazýváme **zadané prvky**.

Rozlišujeme:

1. Polohové konstrukční úlohy jsou ty, které již mají některé prvky hledaného útvaru v dané rovině umístěné.

2. Nepolohové konstrukční úlohy mají zadány jen velikosti prvků, při konstrukci útvaru musíme nejprve zvolit umístění některých prvků.

Následující úlohy 1 a 2 jsou nepolohové, příkladem polohové úlohy je úloha 3. Zkuste si nejprve všechny tři úlohy vyřešit včetně provedení rozboru a diskuse počtu řešení. Obecnou metodiku postupu řešení konstrukčních úloh naleznete níže.

Úloha 1. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $|AB| = c$, $|BC| = a$ a $|\angle BAC| = \alpha$.

Úloha 2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána délka a jeho odvěsny BC a délka t_c těžnice CS .

Úloha 3. V rovině je dána úsečka CS . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby úsečka CS byla jeho těžnicí a odvěsna BC měla délku a .

Konstrukční úlohy, pokud nejsou zcela triviální, bývají považovány za těžší než úlohy z algebry, v nichž je možno uplatňovat jednoduché algoritmické postupy. Při řešení geometrické konstrukční úlohy si totiž nejprve musíme situaci představit a hledat takové vztahy mezi danými prvky a ostatními částmi útvaru, které by konstrukci umožnily.

Tradiční postup řešení konstrukční úlohy rozlišuje čtyři etapy:

1. Rozbor úlohy

V rozboru vycházíme z předpokladu, že hledaný geometrický útvar je již sestrojen. Nakreslíme obrázek požadovaného útvaru, zvýrazníme v něm zadané prvky a provádíme **analýzu** geometrické situace. Hledáme souvislosti mezi zadanými prvky a ostatními částmi útvaru. Přesněji řečeno vztahy, které by z daných prvků umožnily útvar sestrojiti. **Po jejich nalezení sestavíme zpětnou syntézou konstrukci. V písemně řešené úloze by měl rozbor obsahovat zápis, jenž obsahuje zdůvodnění nalezených souvislostí, a tedy i zdůvodnění postupu konstrukce. Při zdůvodňování bychom měli užívat jasné formulace a symbolické zápisy střídát se slovním doprovodem.**

2. Popis a provedení konstrukce

Na středních školách se v poslední době (bohužel) řešení úlohy omezuje pouze na tuto část. Žáci se buď z paměti naučí postup nebo jej u lehkých úloh přímo vidí, a tak příliš nerozvíjí své geometrické myšlení. Neumí postupy zdůvodňovat a nedokážou vyřešit složitější úlohy. Při zápisu konstrukce nemusíme znovu opakovat, co bylo v rozboru uvedeno. Symbolické zápisy je někdy vhodné doplnit slovním vysvětlením. Zápis má být stručný, ale přehledný a srozumitelný. Není nutné rozvádět do dílčích kroků základní konstrukce (například jak se sestrojí osa úsečky, podrobný postup sestrojení trojúhelníku ze tří stran apod.).

3. Zkouška správnosti

je ověření, zda je konstrukce správná. Projdeme konstrukci bod po bodu a ověříme, zda podle ní sestrojený útvar má opravdu požadované vlastnosti. Jestliže provedeme zdůvodnění v rozboru a správnost konstrukce je odtud zřejmá, můžeme zkoušku vynechat.

4. Diskuse řešitelnosti a počtu řešení

Zde zjišťujeme, za jakých podmínek úloha řešení má a za jakých nemá. Pro situace, kdy má úloha řešení, zjišťujeme jejich počet. Jak uvedeme v poznámce, nejsou u nás jednotná kritéria na rozlišování počtu řešení úlohy. Proto se budeme řídit těmito pravidly:

Počtem řešení konstrukční úlohy rozumíme počet všech jejích různých řešení.

Přítom u polohové úlohy považujeme za různá řešení každé dva výsledné útvary, které nejsou totožné a vyhovují jejímu zadání.

U nepolohové úlohy jsou různá řešení jen takové útvary, které nejsou shodné.

Provádění diskuse budeme dělat co nejjednodušeji: Hvězdičkou * označíme ty body postupu řešení, v nichž existence nebo jednoznačnost konstruovaného prvku není zaručena. Na základě analýzy takto označených míst provedeme úplnou diskusi a přitom nebudeme důsledně požadovat, aby byly podmínky počtu řešení popsány pouze pomocí vztahů mezi zadanými prvky. (V ukázkách řešení úloh si takový postup názorně osvojíme.)

Poznámka. Obecná diskuse bývá náročná. Pokud má úloha konkrétní číselné zadání, můžeme ji redukovat na konstatování počtu řešení pro zadané hodnoty. Nástroje dynamické geometrie, mezi něž Cabri patří, umožňují měnit tvar a počet nalezených útvarů v závislosti na změnách hodnot zadaných prvků, tedy vizualizovat diskusi. Názory na provádění diskuse nepolohových úloh nejsou jednotné. Jan Vyšín [8] a Jaroslav Šedivý (např. [6], str. 29) prosazovali, že umístěním prvního sestrojovaného prvku do dané roviny převedeme nepolohovou úlohu na polohovou. Pak je ovšem počet různých řešení dán počtem všech útvarů daných vlastností, které obsahují umístěný prvek. K takovému přístupu lze vyslovit dvě námitky. První z nich je složitost výsledného obrázku a pracnost sestrojování *všech* útvarů k danému prvku, je-li jich více. Žák se procvičí v rýsování, čas k tomu potřebný by však mohl využít efektivněji. Druhou námitkou je, že počet řešení úlohy se může lišit podle toho, který prvek volíme jako první. (Umístíme-li jako první například úhel, může být počet všech řešení menší než v případě, kdy jako první umístíme úsečku.) Aby se takovým nepříjemnostem vyhnul, upřednostňoval Šedivý ve svých pozdějších publikacích zadávání polohových úloh. V učebnici [7] již téměř všechny úlohy formuluje jako polohové.

Současné učebnice [1] a [3] považují za různá řešení nepolohové úlohy takové útvary, které se liší aspoň v jednom (až na index) stejně označeném prvku. Taková dohoda má jistou nevýhodu, neboť někdy může jediný sestrojený útvar představovat dvě různá řešení. Tento nedostatek řeší autoři učebnice [5] dohodou, podle níž se za různá řešení nepolohové úlohy považují jen ty útvary, které nejsou shodné. K téže konvenci se nakonec přiklonil i J. Polák v přepracovaném vydání [4] publikace [3] a budeme se jí řídit také zde.

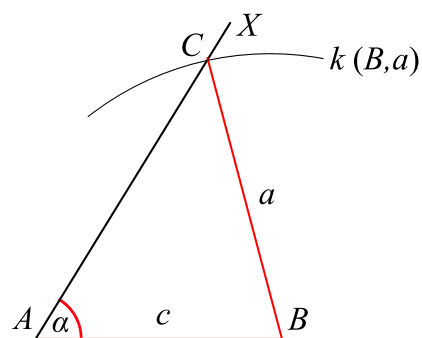
Důsledné provedení všech uvedených částí řešení je poměrně zdlouhavé. Snad i proto se ve škole i v učebnicích uvádějí většinou nepřilíš obtížné úlohy a při řešení stačí, když žák provede jen bod 2 - zápis a provedení konstrukce. To vede k tomu, že se mnozí studenti učí postup konstrukce z paměti a neumí jej zdůvodnit. Naším cílem je tento nedostatek odstranit a naučit čtenáře řešit i náročnější úlohy.

Jako první ukázkou vyřešíme úlohy ze strany 3. **Úloha 1 je základní.** Budeme se na ni při řešení některých dalších úloh odkazovat. Předpokládám, že s konstrukcí neměl čtenář problémy. Nejsem si však jist, zda ji provedl důkladně, tedy tak, jak je to uděláno v souboru KU_01.fig, který naleznete po rozbalení přílohy 1 (viz. [a]), a zda byla jeho diskuse úplná.

Úloha 1. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $|AB| = c$, $|BC| = a$ a $|\angle BAC| = \alpha$.

Rozbor. Lze snadno sestrojít úhel BAX velikosti α tak, aby $|AB| = c$ (obr. 1). Zbývá tedy nalézt vrchol C o němž víme, že je vnitřním bodem polopřímky AX .

Z podmínky $|BC| = a$ plyne, že leží na množině všech bodů dané roviny, jež mají od B vzdálenost a . Tou je kružnice $k(B, a)$. Bod C tedy nalezneme jako průsečík kružnice k s polopřímkou AX .



Obr. 1

Konstrukce:

1. Úsečka AB délky c .
2. Úhel BAX velikosti α .
- 3*. $k(B, a)$, $C \in \rightarrow AX \cap k$.
4. Trojúhelník ABC .

Poznamenejme, že k úsečce AB existují dva úhly ABX a ABX' velikosti α . Kružnice má s jejich rameny AX a AX' nejvýše čtyři průsečíky, které rozlišujeme v souboru KU_01.fig indexy. Jako výsledná řešení vykreslujeme jen ta, která jsou v souladu s dohodou na str. 4 různá. Navíc jsme z nich kvůli větší názornosti zobrazili ty různé trojúhelníky, které se nepřekrývají (viz obr. 2).

Čtenář možná považuje uvedené řešení za zbytečně složité, protože "můžeme vzhledem k souměrnosti podle přímky AB řešení provést jen v jedné polorovině s hraniční přímkou AB ." Nutno upozornit, že **tato často užívaná zásada je nekorektní, protože její uplatňování vede u některých úloh k neúplnému řešení**. Ukážeme to při řešení úlohy 4.

Správnost konstrukce je zřejmá.

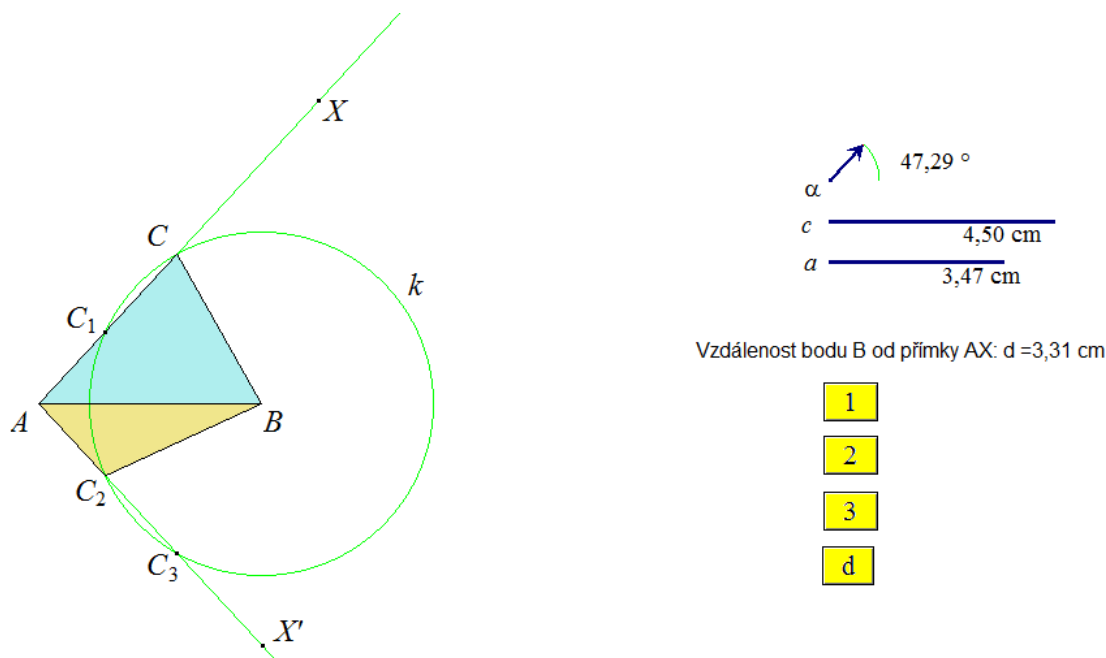
Diskuse. Jediným problematickým místem postupu je bod 3 (označený hvězdičkou *). Když označíme d vzdálenost bodu B od přímky AX , zjistíme, že počet průsečíků C závisí na hodnotách a , d a α . Musíme rozlišit dvě základní situace:

1. Pokud platí, že $0 < \alpha < 90^\circ$, pak je $0 < d < c$ a úloha

- a) nemá řešení, je-li $0 < a < d$,
- b) má právě jedno řešení pro $a = d$ nebo $a \geq c$,
- c) má právě dvě řešení za podmínky $d < a < c$.

2. Pro $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ je diskuse jednodušší: Úloha nemá řešení za podmínky $0 < a \leq c$, a má právě jedno řešení, pokud platí $a > c$.

Poznámka. Uvedené závěry můžeme zjistit nebo názorně ověřit pomocí souboru KU_01.fig. Uvedeme zde stručný návod, soubory k dalším úlohám jsou konstruovány analogicky. Na obr. 2 je znázorněn pohled na obrazovku v jisté fázi práce se souborem. Levá část obrázku není při prvním otevření souboru vidět. Obdélníčky v pravé dolní části obrázku jsou tlačítka skrývání (resp. zobrazování) dílčích kroků konstrukce. Je-li příslušná část konstrukce zobrazena, má tlačítko žlutou barvu, je-li skryta, tlačítko vidíme nevybarvené.



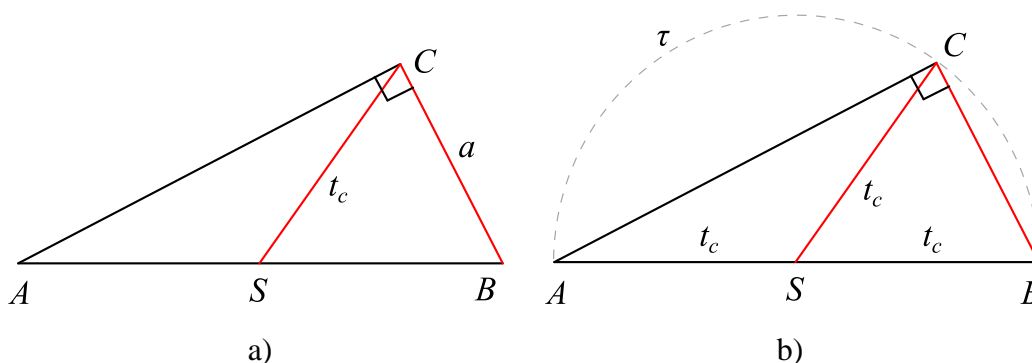
Obr. 2

Po otevření souboru nejprve zobrazíme jednotlivé kroky konstrukce (klikáním na tlačítka v pořadí, jak jsou očíslována). Tlačítkem "d" zobrazujeme aktuální hodnotu vzdálenosti d bodu B od přímky AX .

V pravé horní části obrázku 2 jsou umístěny ovladače, pomocí kterých nastavujeme hodnoty zadaných prvků. Hodnoty a a c nastavujeme pohybem pravých koncových bodů stejně označených úseček. Velikost α měníme úchopem za koncový bod vektoru úhlového ovladače. Aktuální hodnoty zadaných prvků uvádějí čísla u ovladačů. Pohybem počátečního bodu vektoru je možno celý soubor ovladačů přemístit do jiné části obrazovky. Analogicky lze na obrazovce přemísťovat celé narýsované řešení úchopem za bod A .

Diskusi počtu řešení názorně předvedeme tak, že pro každou z možností 1 a 2 zvolíme pevnou hodnotu c a α . Pak "spojitě" měníme velikost a od nuly k hodnotám větším než c . Slovo *spojitě* je dáno do uvozovek, protože nastavování hodnot pomocí ovladačů se děje po skocích, jejichž velikost činí (v případě délkových ovladačů) několik setin milimetru. Proto se nám většinou nepodaří tímto způsobem nastavit některé krajní situace. Například v naší úloze je to nastavení dotyku kružnice k a polopřímky AX .

Úloha 2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána délka a jeho odvěsny BC a délka t_c těžnice CS .



Obr. 3

Poznámka. Úloha se může zdát netriviální, pokud si trojúhelník nakreslíme podle obr. 3 a). Když nás napadne dokreslit do obrázku opsanou kružnici, bude řešení zřejmé.

Rozbor. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC je Thaletova kružnice $\tau(S, t_c)$, viz obr. 3b. Z obrázku plyne $c = 2t_c$. Tím je úloha (až na označení prvků a fixaci velikosti daného úhlu) převedena na úlohu 1: Sestrojit trojúhelník ABC , je-li dáno $|AB| = 2t_c$, $|BC| = a$ a $|BCA| = 90^\circ$.

Úlohu 1 jsme podrobně vyřešili, proto není nutné v řešení této úlohy pokračovat. Přesto uvedeme dva z možných postupů konstrukce a shrnutí diskuse.

Konstrukce kopírováním postupu předchozí úlohy:

1. Úsečka BC délky a .
2. Kolmice q v bodě C na úsečku BC .
- 3*. $k(B, c)$, $A \in q \cap k$.
4. Trojúhelník ABC .

Konstrukce využívající Thaletovu kružnici:

1. Úsečka AB délky c .
2. Kružnice τ s průměrem AB .

3*. $k(B,a)$, $C \in \tau \cap k$.

4. Trojúhelník ABC .

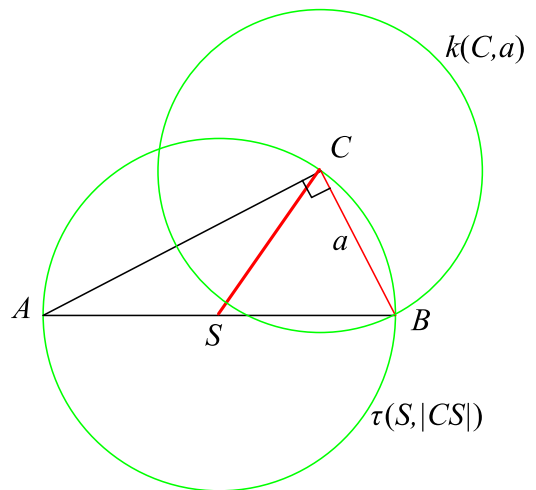
Diskuse. Úloha má právě jedno řešení pro $0 < a < 2t_c$. (V obou uvedených konstrukcích vznikají při provedení kroku 3 dva průsečíky, avšak trojúhelníky k nim sestrojené jsou shodné. Nepředstavují různá řešení.)

Je-li $c \leq a$, nemá úloha řešení.

Úloha 3. V rovině je dána úsečka CS . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby úsečka CS byla jeho těžnicí a odvěsna BC měla délku a .

Rozbor. Těžnice CS je již v rovině umístěna, zbývá sestrojit vrcholy A, B . Z vlastností Thaletovy kružnice plyne, že $B \in \tau(S, |SC|)$ a z podmínky $|BC| = a$ máme $B \in k(C, a)$. Platí tedy $B \in \tau \cap k$.

Dále $|\angle BCA| = 90^\circ \Rightarrow A \in q$, kde q je kolmice na přímku BC v bodě C a navíc $A \in \tau$. Odtud plyne, že $A \in \tau \cap q$.



Obr. 4

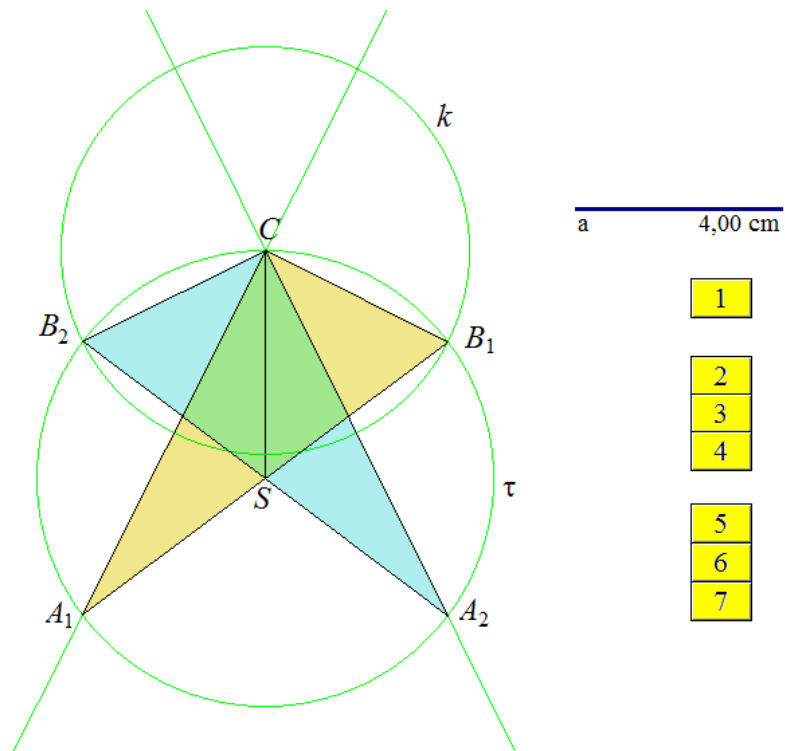
Konstrukce:

1. $\tau(S, |SC|)$,
- 2*. $k(C, a)$,
3. $B \in \tau \cap k$,
4. $q: q \perp BC \wedge C \in q$,
5. Trojúhelník ABC .

Diskuse

Pokud platí $a \geq 2|CS|$, úloha nemá řešení.

Za podmínky $0 < a < 2|CS|$ existují právě dvě řešení. Můžeme je vidět na obr. 5, který je částí snímku obrazovky počítače při práci se souborem KU_03.fig.



Obr. 5

2 Některé metody řešení konstrukčních úloh

Seznámíme se s nejčastěji používanými metodami. Po stručném popisu metody následují řešené příklady. Na konec každého odstavce jsou zařazeny úlohy k procvičení. Místo výsledků naleznete v příloze soubory vytvořené v Cabri II+ k některým úlohám. Jsou označeny stejně jako úlohy. Každý z nich obsahuje konstrukci příslušného útvaru, která se otvírá po krocích pomocí očíslovaných tlačítek skrývání. Popis konstrukce, zdůvodnění a diskusi úloh ze cvičení neuvádíme. Jedná se o cvičení, uživatel by si je měl vytvořit sám.

2.1 Využití množin bodů s danou vlastností

Je to nejčastěji používaná metoda, pomocí které jsme již vyřešili první tři úlohy. **Metoda spočívá v tom, že při rozboru nalezneme křivku¹ na níž má ležet nějaký bod X hledaného útvaru, jako množinu bodů s určitou vlastností. Tu pak využijeme k sestrojení bodu X .** (Při řešení úlohy 1 jsme ke konstrukci bodu C užili kružnici k jako množinu všech bodů, jež mají od B vzdálenost a . V úlohách 2 a 3 byla užita Thaletova kružnice jako množina vrcholů C všech pravoúhlých trojúhelníků ABC nad přeponou AB .)

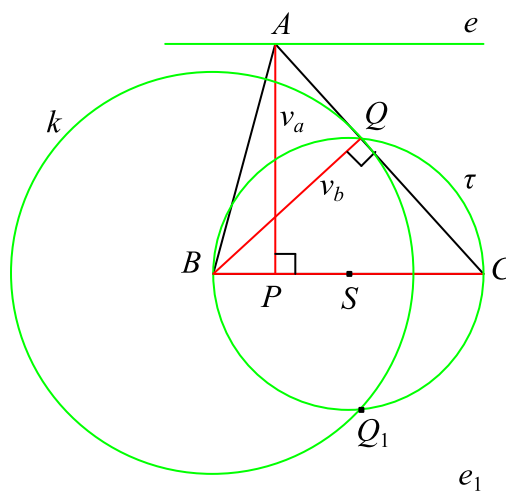
Úloha 4. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno a, v_a, v_b .

Rozbor. Uvažujme označení podle obr. 6. Při konstrukci můžeme vycházet z toho, že pravoúhlý trojúhelník BCQ je již sestrogen. (Jeho sestrogení považujeme za základní úlohu, viz řešení úlohy 2.) Zbývá tedy najít bod A . Ten zřejmě leží na přímce CQ . Navíc z podmínky $|AP| = v_a$ plyne, že se nachází v množině μ všech bodů dané roviny, které mají od přímky AB vzdálenost v_a (tzv. **ekvidistantě přímky AB** , přitom v_a se nazývá **parametr ekvi-distanty**). Množinou μ je dvojice rovnoběžek e, e_1 s přímkou AB ve vzdálenosti v_a od ní, tzn.

$$\mu = e \cup e_1, \quad |\leftrightarrow AB, e| = v_a = |\leftrightarrow AB, e_1|.$$

Úvahy shrneme:

$$A \in \leftrightarrow CQ \wedge A \in \mu \Rightarrow A \in \leftrightarrow CQ \cap \mu. \quad (1)$$

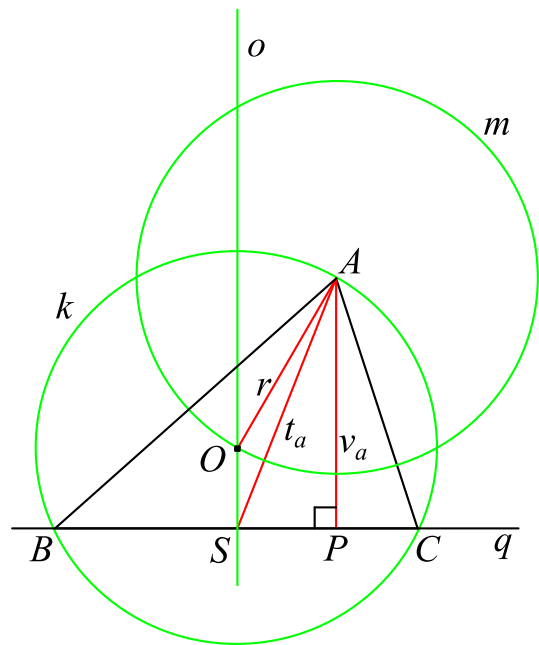


Obr. 6

¹ Mezi křivky zahrnujeme i přímky (křivky s nulovou křivostí).

Úloha 5. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno t_a, v_a, r , kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

Rozbor. V situaci na obr. 8 je snadné sestavit pravouhlý trojúhelník SPA (viz základní úloha 1). Zbývá nalézt body B a C . Ty jsou průsečíky přímky $q \Leftrightarrow SP$ s opsanou kružnicí $k(O, r)$. Úloha je tím převedena na problém sestavení kružnice k . Její poloměr r je dán, stačí tedy nalézt střed O . Z podmínky $|AO| = r$ plyne, že střed O leží na kružnici $m(A, r)$ a z faktu, že k je opsaná trojúhelníku ABC určíme $O \in o$, kde o je osa strany BC . Lze ji sestavit jako kolmici na již známou přímku q v bodě S . Odtud plyne závěr $O \in o \cap m$, který využijeme při konstrukci.



Obr. 8

Konstrukce

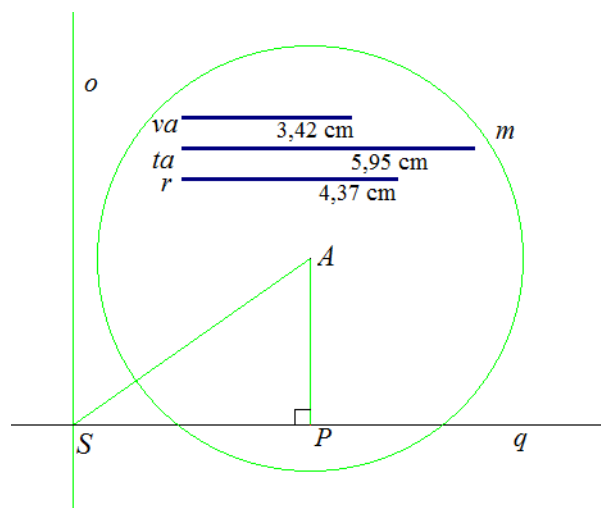
1. Úsečka AP délky v_a s kolmicí q na AP v bodě P .
- 2*. $S \in q \cap n(A, t_a)$ (je zbytečné sestavovat oba průsečíky - zdůvodněte).
3. Kolmice o na přímku q v bodě S .
4. * $O \in o \cap m(A, r)$.
5. * $\{B, C\} = q \cap k(O, r)$.
6. Trojúhelník ABC .

Snadno ověříme, že sestavený útvar vyhovuje podmínkám úlohy i když platí $t_a = v_a$.

V popisu konstrukce máme tři kroky označené hvězdičkou, diskuse bude náročnější než v předchozích úlohách. V takových případech je vhodné postupovat důsledně podle pořadí jednotlivých kroků:

Diskuse

1. Úloha nemá řešení, je-li $t_a < v_a$.
2. Nechť $t_a = v_a$, pak $S = P$ a rozlišíme dvě situace:
 - a) Je-li navíc $2r \leq v_a$, neprotne kružnice m přímku q a úloha nemá řešení.
 - b) Pokud je $2r > v_a$, má úloha právě jedno řešení (rovnoramenný trojúhelník).



Obr. 9

3. Necht' platí $t_a > v_a$:

a) Úloha nemá řešení, pokud je $|SP| > r$ (obr. 9).

b) Necht' platí $|SP| = r$, pak: α) Je-li navíc $r \leq v_a$, nemá kružnice m s přímkou q společné dva body. Úloha nemá řešení.

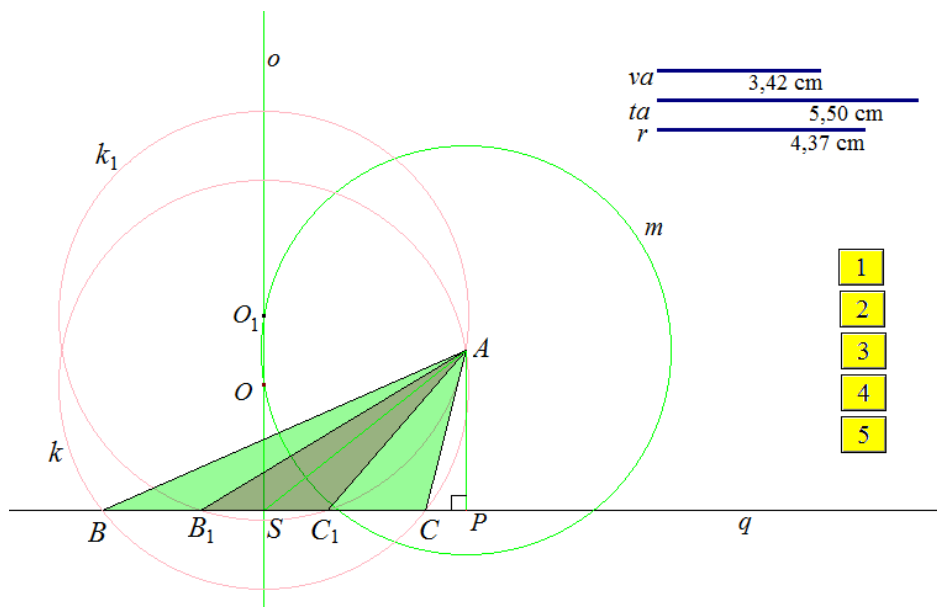
β) Pokud je $r > v_a$, má úloha právě jedno řešení.

c) Je-li $|SP| < r$, existují dva průsečíky kružnice m s přímkou o , označme je O a O_1 tak, aby $|O, q| < |O_1, q|$ (obr. 10). Úloha má:

α) Dvě řešení, pokud obě kružnice $k(O, r)$ a $k_1(O_1, r)$ protnou přímkou q (obr. 10). To nastane, když $|O_1S| < r$ a $|OS| < r$.

β) Jedno řešení, pokud přímkou q protne pouze kružnice k , tzn. když $|O_1S| \geq r$ a $|OS| < r$.

γ) Nemá řešení, když kružnice k a k_1 neprotínají přímkou q , tzn. když $|OS| \geq r$.

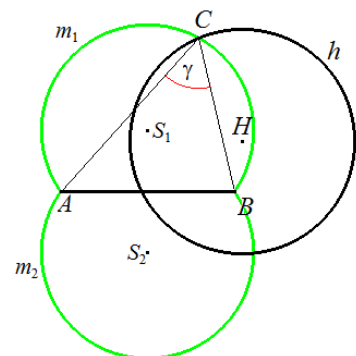


Obr. 10

Poznámka. Možná jste si povšimli, že označení bodů B a C není určeno jednoznačně. Lze je při konstrukci zaměnit.

Úloha 6. V rovině je dána úsečka AB a kružnice h . Sestrojte trojúhelník ABC tak aby platilo $C \in h$ a vnitřní úhel ACB měl danou velikost γ , za podmínky $0 < \gamma < 90^\circ$.

Rozbor. Vrchol C leží na kružnici h a zároveň patří do množiny $m = \{X, |\angle AXB| = \gamma\} = m_1 \cup m_2$, kde m_1 a m_2 jsou kruhové oblouky sestrojené nad společnou tětivou AB a s obvodovým úhlem velikosti γ (obr. 11).

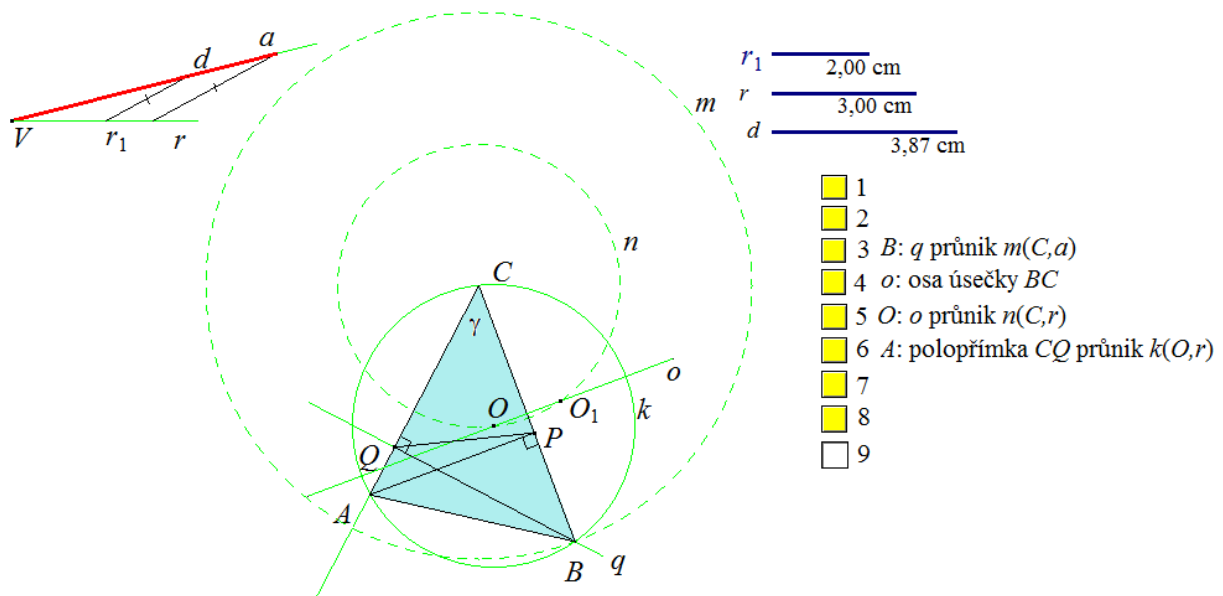


Obr. 11

Úloha 8. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou P a Q (v daném pořadí) paty výšek z vrcholů A a B . Sestrojte jej, je-li dána délka $d = |CQ|$ a poloměry r, r_1 kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC a PQC .

Rozbor. Užitím věty 1 dostáváme $\Delta PQC \sim \Delta ABC$ a odtud $\frac{a}{d} = \frac{r}{r_1}$. Vidíme, že úlohu má smysl

řešit jen za podmínek $0 < d < a$ a $0 < r_1 < r$. Sestrojením délky a jako čtvrté geometrické úměrné převádíme úlohu na sestrojení trojúhelníka ABC , je-li dáno a, d, r . Délky a, d jednoznačně určují pravoúhlý trojúhelník BCQ jenž je snadné sestrojit. Vrchol A je průsečík polopřímky CQ s kružnicí $k(O, r)$ opsanou trojúhelníku ABC (obr. 16). K jejímu sestrojení potřebujeme nalézt bod O . Ten leží v průniku osy o strany BC s kružnicí $n(C, r)$. Navíc leží v polorovině BCQ , je tedy jednoznačně určen. (Z podmínky, že trojúhelník ABC je ostroúhlý plyne že, vrchol A leží na větším oblouku AB kružnice opsané. Proto bod O_1 na obr. 16 vyloučíme.)



Obr. 16

Konstrukce:

1. Úsečka délky a jako čtvrtá geometrická úměrná (červená úsečka na obr. 16 vlevo nahoře).
2. Úsečka CQ délky d s kolmicí q v bodě Q .
- 3*. $B \in q \cap m(C, a)$.
4. Osa o úsečky BC .
- 5*. Bod O je ten z průsečíků osy o a kružnice $n(C, r)$, který leží v polorovině BCQ .
- 6*. $A \in \rightarrow CQ \cap k(O, r)$.
7. Trojúhelník ABC .

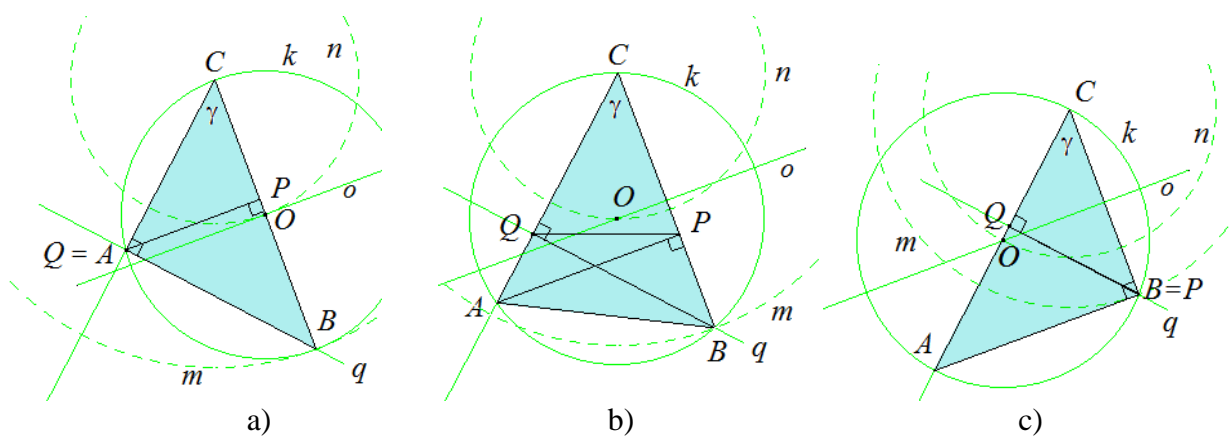
Diskuse je poměrně složitá, komplikuje ji podmínka ostroúhlosti trojúhelníka ABC . Provedeme podrobnější analýzu a výsledky shrneme v závěru.

K zadaným prvkům přidáme délku a , kterou snadno sestrojíme pomocí vztahu $\frac{r_1}{r} = \frac{d}{a}$.

Pokud platí $r_1 \geq r$, a tedy i $a \geq d$, nebo $a \geq 2r$ nemá úloha řešení.

Předpokládejme proto, že $r_1 < r$ a $d < a < 2r$. Tyto vztahy zaručují sestrojení bodů B, O, A v krocích konstrukce označených hvězdičkou (promyslete). Nepostačují k tomu, aby trojúhelník ABC byl ostroúhlý. Pomocí obr. 16 nebo 17 snadno ověříme, že

$$\frac{r_1}{r} = \frac{d}{a} = \frac{|CP|}{b} = \cos \gamma.$$



Obr. 17

Úhel γ je tedy pevně určen a je ostrý. Limitní situace, kdy je $\alpha = 90^\circ$, nebo $\beta = 90^\circ$ znázorňují obr. 17 a) a 17 c). Pro první z nich platí $d_1 = 2r \cos \gamma = 2r_1$, pro druhou $d_2 = |CP| \cdot \cos \gamma$ a $|CP| = 2r_1 = 2r \cos \gamma$. Ostroúhlý trojúhelník vznikne, právě když $d_2 < d < d_1$. Po dosazení do posledního vztahu ze tří předchozích a krátké úpravě učiníme závěr.

Úloha má právě jedno řešení, jestliže platí

$$0 < r_1 < r \text{ a } \frac{2r_1^2}{r} < d < 2r_1.$$

Úloha 9. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány jeho výšky v_a, v_b, v_c .

Rozbor. Kdybychom místo výšek znali délky stran, bylo by řešení jednoduché. Zkusme tedy hledat, jak výšky trojúhelníka souvisí s jeho stranami. K cíli se přiblížíme, když si vzpomene-me na vztah pro obsah trojúhelníka, $S = \frac{1}{2}av_a = \dots$. Z něj zjistíme $2S = av_a = bv_b = cv_c$

a odtud

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c} = a' : b' : c', \text{ resp. } v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}, \quad (2)$$

kde a', b' a c' jsou délky stran libovolného trojúhelníka $A'B'C'$, podobného trojúhelníku ABC .

Vztah (2) umožňuje následující konstrukci.

Konstrukce

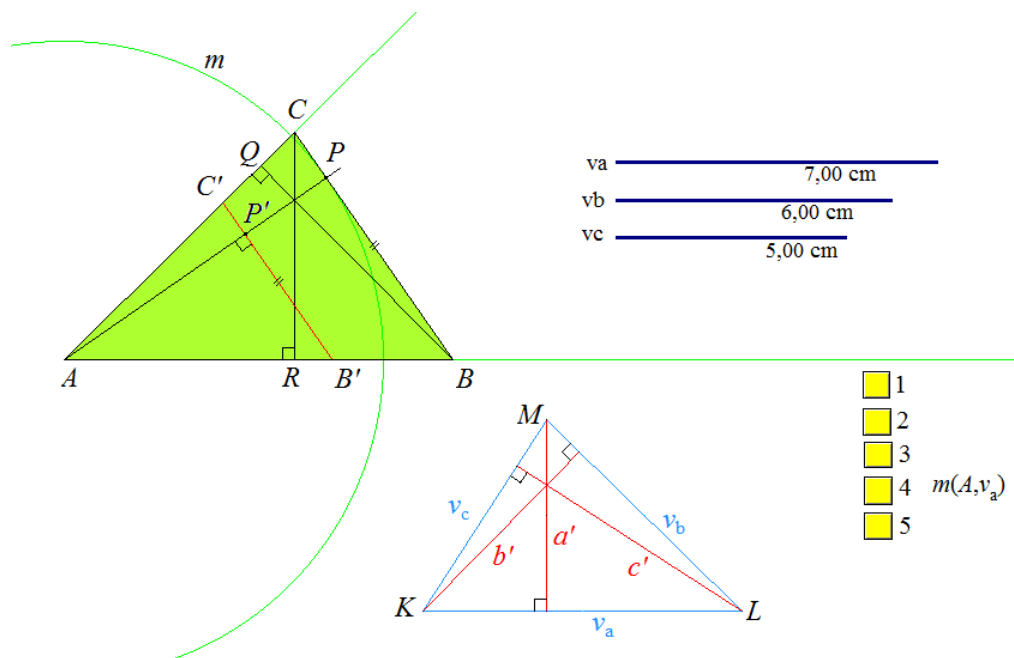
1. Trojúhelník KLM : $|KL| = v_a, |LM| = v_b, |MK| = v_c$, obr. 18 dole.
2. Sestrojíme výšky z vrcholů M, L, K a označíme je po řadě a', b', c' .
3. Trojúhelník $AB'C'$: $|B'C'| = a', |C'A| = b', |AC'| = b'$.
4. Výška AP' .
5. $P: \rightarrow AP' \cap k(A, v_a)$.
6. Rovnoběžka p se stranou $B'C'$ v bodě P .
7. $B \in \rightarrow AB' \cap p, C \in \rightarrow AC' \cap p$.
8. Trojúhelník ABC .

Kontrola správnosti. Pro sestrojené úsečky platí vztah (2), proto jsou trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné. Trojúhelník ABC má požadovanou výšku v_a z vrcholu A . Protože platí (2), mají i výšky z vrcholů B, C požadované hodnoty.

Diskuse. Úloha má právě jedno řešení, splňují-li výšky v_a, v_b, v_c trojúhelníkovou nerovnost

$$|v_a - v_b| < v_c < v_a + v_b.$$

Pro všechny ostatní situace nemá řešení.



Obr. 18

Cvičení

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

CKU_06. $\beta, \gamma, m = r + \rho$ (tzn. m je součet poloměrů opsané a vepsané kružnice).

CKU_07. $\alpha = 60^\circ, b : c = 3 : 4, t_b = 5$ cm.

CKU_08. $a : b : c = 4 : 5 : 6, \rho = 2$ cm.

CKU_09. $b + c = 10$ cm, $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$

2.3 Využití shodných zobrazení

Shodné zobrazení v rovině, neboli *shodnost*, přiřazuje každému bodu X roviny právě jeden bod X' téže roviny tak, že pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = |XY|$. To znamená, že obrazem jakékoli úsečky je stejně dlouhá úsečka. V důsledku toho zachovává shodné zobrazení i velikosti úhlů.

Jestliže je geometrický útvar U' obrazem útvaru U ve shodném zobrazení, pak jsou útvary U a U' shodné. Dva útvary jsou shodné, právě když je lze umístit na sebe tak, aby se kryly.

V tomto odstavci se zaměříme na využití čtyř shodností v rovině, které jsou známé ze střední a základní školy. Jsou to středová a osová souměrnost, otočení a posunutí. Vyřešíme jen několik typických úloh.

Shodným a podobným zobrazením je z velké části věnován pomocný text *Geometrická zobrazení v úlohách*, viz [a]. V něm si můžete rozšířit poznatky o shodných zobrazeních.

Následující příklad je ukázkou standardního postupu, který je blízký metodě využití množin bodů s danou vlastností.

Úloha 10. V rovině je dána přímka p , kružnice k a body M, N . Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby byly body M, N po řadě středy stran AC a BC , a aby platilo $A \in k$ a $B \in p$.

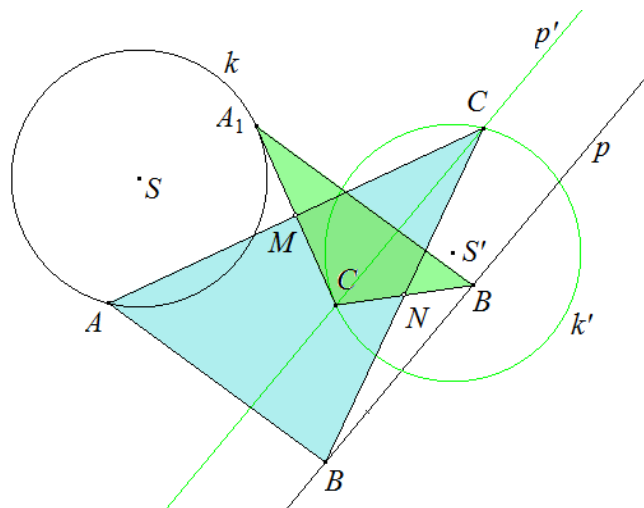
Rozbor. Ze zadání plyne, že bod C je obrazem bodu A v souměrnosti se středem M , což symbolicky zapíšeme vztahem $C = S_M(A)$. Z podmínky $A \in k$ dále plyne, že jeho obraz $S_M(A)$ leží na obrazu k' kružnice k v souměrnosti podle M : $C \in S_M(k) = k'$.

Analogicky zjistíme: $C \in S_N(p) = p'$.

Odtud již snadno nalezneme konstrukci.

Konstrukce

1. $k' = S_M(k)$.
2. $p' = S_N(p)$.
- 3*. $C \in p' \cap k'$.
4. $A = S_M(C)$ a $B = S_N(C)$, trojúhelník ABC .



Obr. 19

Diskuse. Úloha má 0 až 2 řešení podle počtu společných bodů kružnice k' a přímky p' .

V další úloze využijeme toho, že kosořtverec (resp. řtverec) je osově souměrný podle svých řhlopřřček a středově souměrný podle jejich průseřku, tzv. řtředu kosořtverce (řtverce).

řloha 11. V rovině je dána řmřka p , kruřnice k a bod M . Sestrořte kosořtverec nebo řtverec $ABCD$ tak, aby jeho řhlopřřčka AC byla řástí řmřky p , bod M byl středem strany BC a aby bod B leřel na kruřnici k .

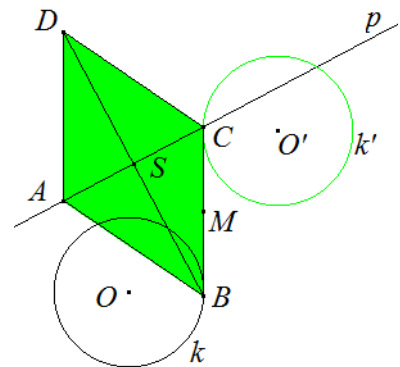
Rozbor. Ze zadání plyne $C = S_M(B)$. Navřc $B \in k$, proto $C \in S_M(k) = k'$ (obr. 20). Odtud $C \in k' \cap p$ a $B = S_M(C)$. Dále uřijeme osovou souměrnost:

$$D = S_p(B) \text{ a } A = S_{\leftrightarrow BD}(C).$$

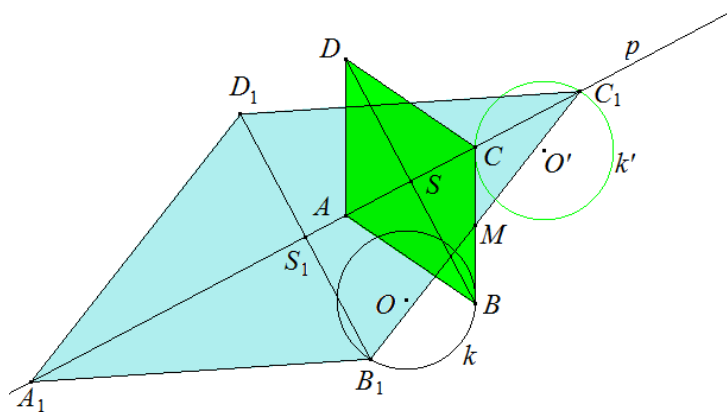
Mřsto souměrnosti podle řmřky BD lze pouřít středovou souměrnost podle průseřku S řmřek BD a p .

Konstrukce je zřejmá z rozboru. Jeř zřpis vidřme na obr. 21.

Diskuse. řloha má 0 až 2 řešenř podle pořtu společných bodů kruřnice k' a řmřky p .



Obr. 20



- 1 k' : obraz kruřnice k v symetrii podle M .
- 2 Body C a C_1 .
- 3 B : obraz bodu C v symetrii podle M .
- 4 D : obraz bodu B v osově symetrii podle p .
- 5 A : obraz bodu C v symetrii podle S .
- 6 Druhě řešenř.

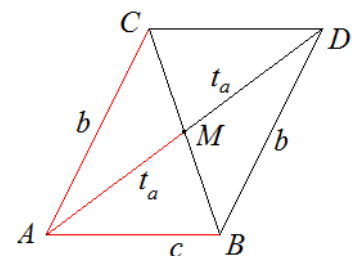
Obr. 21

Sjednocenřm trojřhelnřka s jeho obrazem ve středově souměrnosti podle řtředu strany trojřhelnřka vzniká rovnoběžnřk, jehoř jednu jeho řhlopřřčku tvořř strana trojřhelnřka a druhou prodlouřená těřnice na tuto stranu. Právě uvedený poznatek lze vřhodně vyuřít při některých konstrukcích trojřhelnřka, vyskytují-li se v zadání řlohy dělk y těřnic.

řloha 12. Sestrořte trojřhelnřk ABC , je-li dáno b, c, t_a .

Rozbor. Oznařme M řtřed strany BC a $D = S_M(A)$ (obr. 22).

řtřřhelnřk $ABDC$ je rovnoběžnřk se řtředem M , lze sestrořit trojřhelnřk ABD s dělkami stran $|BD|=b$, $|AD|=2t_a$ a $|AB|=c$, s bodem M ve řtředu strany AD . Bod C je obrazem bodu B v souměrnosti podle M .

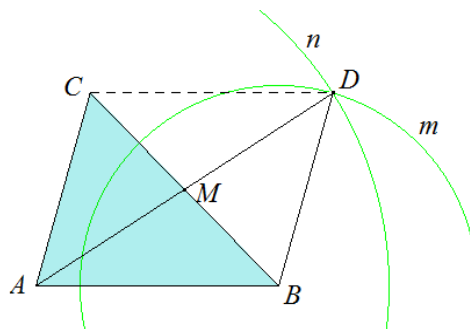


Obr. 22

Konstrukce je zřejmá z rozboru (viz též obr. 23).
Diskuse. Úloha má jediné řešení za předpokladu, že platí trojúhelníková nerovnost

$$|b - c| < 2t_a < b + c.$$

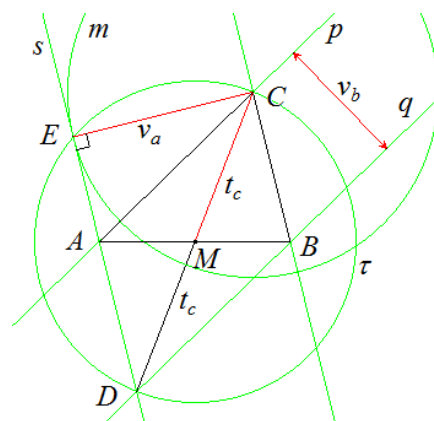
Pokud tato nerovnost neplatí, úloha řešení nemá.



Obr. 23

Úloha 13. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno v_a, v_b, t_c .

Rozbor. Necht' M je střed strany AB a $D = S_M(C)$ (obr. 24), pak je čtyřúhelník $ACBD$ rovnoběžník se středem M . Označme dále $p \leftrightarrow AC$ a $q \leftrightarrow BD$. Není obtížné sestavit rovnoběžky p a q ($|p, q| = v_b$) i s úsečkou CD délky $2t_c$. Bod A leží na přímce s , která prochází bodem D , je rovnoběžná s BC a má od bodu C vzdálenost v_a . Na téže přímce leží i vrchol E pravoúhlého a snadno sestrojitelného trojúhelníka DCE s přeponou DC a odvěsnou AE délky v_a . Vztahy $A \in p \cap s$ a $B = S_M(A)$ umožňují zbytek konstrukce.



Obr. 24

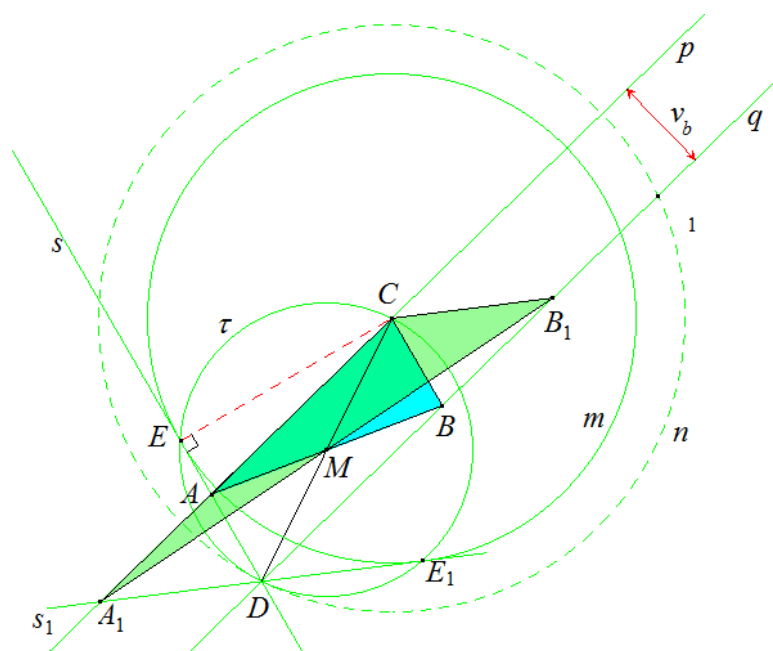
Konstrukce

1. Rovnoběžky p, q ($|p, q| = v_b$).
2. Zvolíme $C \in p$.
- 3*. $D \in q \cap n(C, 2t_c)$.
4. Kružnice τ s průměrem CD .
- 5*. $E \in \tau \cap m(C, v_a)$.
6. $s: \leftrightarrow DE$.
- 7*. $A \in p \cap s$.
8. $B = S_M(A)$.
9. Trojúhelník ABC .

Diskuse

Úloha nemá řešení, pokud $v_b > 2t_c$ nebo $v_a > 2t_c$ nebo $v_a = 2t_c = v_b$ (viz konstrukce, body 3 a 5).

Je-li $v_b < 2t_c$ a $v_c < 2t_c$ a $v_a \neq v_b$, má úloha dvě řešení.



Obr. 25

Právě jedno řešení má, když je buď jedna z výšek v_a, v_b rovna $2t_c$ a druhá je menší než $2t_c$, nebo když $v_a = v_b < 2t_c$. (Promyslete a nakreslete si obrázky!)

Předchozí dvě úlohy obsahovaly v zadání délky těžnic. Při jejich řešení jsme výhodně použili metodu tzv. **doplnění trojúhelníka na rovnoběžník**. Na další úlohu bude vhodnější aplikovat jiný postup, třebaže se v jejím zadání rovněž vyskytuje délka těžnice.

Úloha 14. V rovině je dána přímka p a body A, L , které na ní neleží. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby jeho vrcholy B, C ležely na přímce p a těžnice z vrcholu C byla částí přímky CL .

Rozbor. Rovnoramenný trojúhelník ABC je souměrný podle přímky $o = \leftrightarrow CR$, která je osou základny AB (obr. 26), a úsečka CR je současně těžnicí i výškou z vrcholu C . V souměrnosti podle osy o platí $B = A' = S_o(A)$ a $L' = L$. Podle definice shodného zobrazení (kterým je i souměrnost S_o) je $|BL| = |A'L'| = |AL|$, neboli $B \in k(L, |AL|)$.

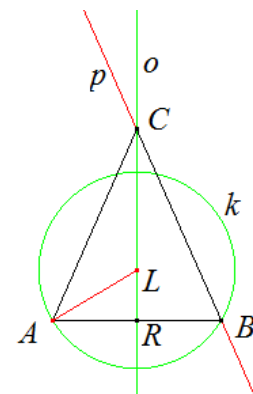
Odtud již plyne konstrukce.

Konstrukce

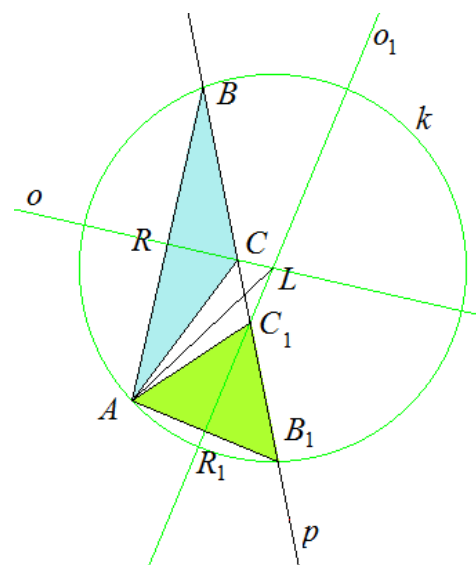
1. $k(L, |AL|)$.
- 2*. $B \in k \cap p$.
3. Osa o úsečky AB .
- 4*. $C \in o \cap p$.
5. Trojúhelník ABC .

Diskuse. Úloha má 0 až 2 řešení podle počtu společných bodů přímky p s kružnicí k .

Na obr. 27 vidíme jednu ze situací, kdy má úloha dvě řešení.



Obr. 26



Obr. 27

Na rozdíl od úloh 10 až 13 jsme při řešení úlohy 14 využili osovou souměrnost.

Osovou souměrnost můžeme výhodně použít při hledání některých konstrukcí n -úhelníků, jsou-li mezi zadanými prvky součty nebo rozdíly délek sousedních stran, nebo rozdíly velikostí úhlů (viz úlohy 15-18 a některé úlohy ve cvičení).

Úlohu 15 lze řešit metodou z odstavce 2.2. Zde uvádíme řešení pomocí osové symetrie.

Úloha 15. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno α, β, p , kde p je jeho obvod.

Rozbor. Předpokládáme, že je trojúhelník sestaven. Na polopřímce opačné k polopřímce AB zvolíme bod D tak, aby $|AD|=b$ a na polopřímce opačné k polopřímce BA zvolíme bod E tak, aby $|BE|=a$ (obr. 28). Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka má rovnoramenný trojúhelník CDA při své základně CD úhly velikosti $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Podobně má rovnoramenný trojúhelník CEB při základně CE úhly velikosti $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$. Konstrukce trojúhelníka DEC je základní a vrcholy A, B nalezneme využitím souměrností podle os o_1 a o_2 úseček CD a CE .

Konstrukce

1. Trojúhelník CDE .

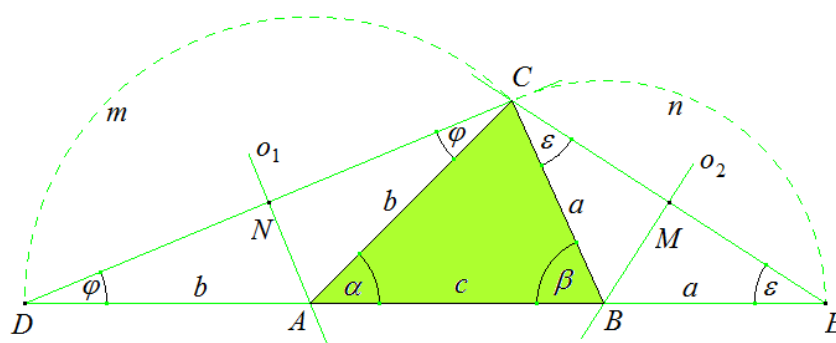
$$(|DE|=p, |CDE|=\frac{\alpha}{2},$$

$$|CED|=\frac{\beta}{2}).$$

2. $A \in o_1 \cap$ úsečka DE .

3. $B \in o_2 \cap$ úsečka DE .

4. Trojúhelník ABC .



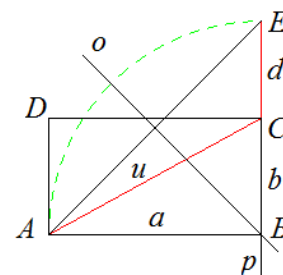
Obr. 26

Diskuse

Při smysluplném zadání ($\alpha + \beta < 180^\circ$, $p > 0$) má úloha vždy právě jedno řešení. (Osy o_1 a o_2 vždy protnou úsečku DE , protože $\alpha/2$ a $\beta/2$ jsou velikosti ostrých úhlů.)

Úloha 16. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, je-li dáno $u = |AC|$ a $d = a - b$, kde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $a > b$.

Rozbor. Označme E ten bod polopřímky BC , pro nějž $|BE|=a$ (obr. 27). Trojúhelník ABE je pravoúhlý a rovnoramenný, odtud $|\angle AEC|=45^\circ$, $|EC|=d$ a $|AC|=u$. Sestrojení trojúhelníku ACE je zřejmé, bod B nalezneme jako průsečík osy o úsečky AE s polopřímku p opačnou k polopřímce CE (nebo jako patu kolmice z bodu A na polopřímku p) a pak útvar snadno doplníme na pravoúhelník.



Obr. 27

Konstrukce

1. Trojúhelník ACE .

2. o : osa úsečky AE .

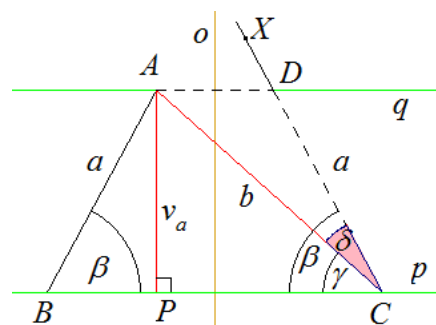
3*. $B \in o \cap p$, kde p je polopřímka opačná k polopřímce CE .

4. Pravoúhelník $ABCD$.

Diskuse. Úloha má právě jedno řešení, když vznikne trojúhelník CDE s tupým úhlem při vrcholu C . To nastane za podmínky $u > d$. Pokud platí $u \leq d$, úloha řešení nemá.

Úloha 17. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $b, v_a, \delta = \beta - \gamma > 0$.

Rozbor. Uvažujme osovou souměrnost podle osy o strany BC , obraz bodu A označme D , body B a C jsou souměrně sdružené, P je pata výšky z vrcholu A (obr. 28). Konstrukce pravoúhlého trojúhelníka APC je základní, připsání úhlu ACX velikosti δ umožňuje sestavit bod D , přímku o jako osu úsečky AD a $B = S_o(C)$.



Obr. 28

Konstrukce

- 1*. Trojúhelník APC .
2. Rovnoběžka q s přímkou BC v bodě A .
3. Úhel ACX velikosti δ vně připsaný trojúhelníku APC .
- 4*. $D := CX \cap q$.
5. o : osa úsečky AD .
6. $B = S_o(C)$, trojúhelník ABC .

Diskuse. Z bodů označených hvězdičkami plyne, že úloha nemá řešení, když platí $b < v_a$ nebo $180^\circ < \delta + \gamma$. Pro ostatní situace má právě jedno řešení.

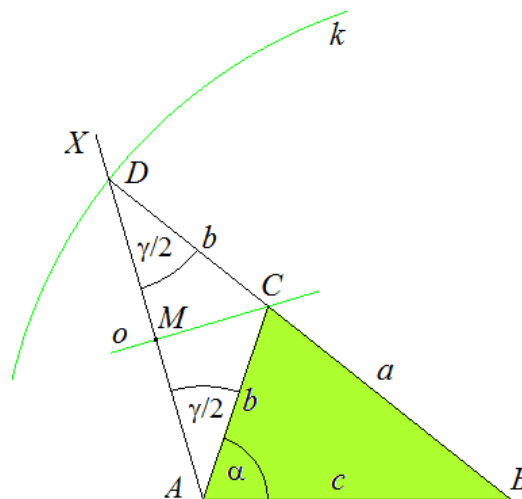
Úloha 18. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $m = a + b, c, \delta = \alpha - \beta > 0$.

Rozbor. Označme D takový bod polopřímky BC , pro nějž $|BD| = m$ (obr. 29).

V trojúhelníku ABD známe délky dvou stran: $|BD| = m$ a $|AB| = c$. Pokusme se některý jeho úhel vyjádřit pomocí dané hodnoty δ : Smysl má zabývat se pouze úhlem BAD , neboť $|\angle ABD| = \beta$ a $|\angle ADB| = \gamma/2$:

$$\begin{aligned} |\angle BAD| &= |\angle BAC| + |\angle CAD| = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Vypočítaná hodnota umožňuje konstrukci trojúhelníka ABD , bod C nalezneme jako průsečík úsečky BD a osy o strany AD .



Obr. 29

Konstrukce

- 1*. Trojúhelník ABD (viz obr. 29, $|AB| = c, |BD| = m, |\angle BAD| = 90^\circ + \delta/2$).
- 2*. Bod C : průsečík úsečky BD s osou o úsečky AD .
3. Trojúhelník ABC .

Diskuse. Zadání má smysl, pokud je $90^\circ < \delta < 180^\circ$. Pak trojúhelník ABD existuje, právě když $m > c$. Jeho existence pak určuje jednoznačně bod C . Lze tedy učinit závěr:

Úloha nemá řešení, je-li $\gamma \leq 90^\circ$ nebo $m \leq c$. Pokud je $m > c$ a $90^\circ < \delta < 180^\circ$, má úloha jediné řešení.

V dalších úlohách se zaměříme na využití posunutí a otočení. Tato shodná zobrazení představují pohyb v rovině. Posunutí si lze představit jako pohyb po navzájem rovnoběžných přímkách a otočení jako pohyb po soustředných kružnicích. Z toho lze vyvodit metodu konstrukcí útvarů, jejichž umístění je vázáno vhodnými podmínkami:

1. Úlohu zjednodušíme vynecháním některých podmínek umístění a útvar v ní za zjednodušených podmínek sestrojíme.
2. Takto sestrojený útvar přemístíme otočením nebo posunutím do polohy požadované původní úlohou.

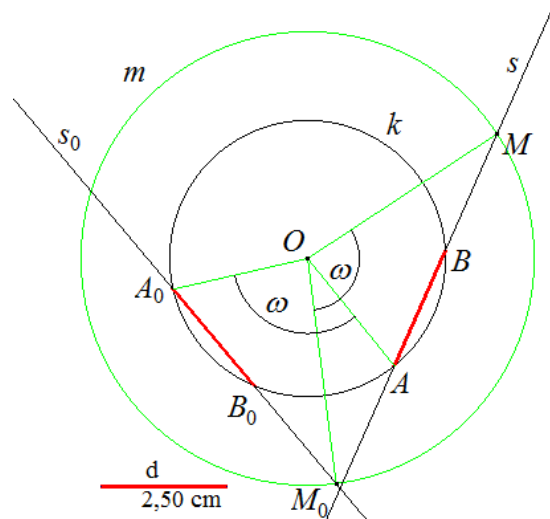
Úloha 19. Sestrojte sečnu p dané kružnice $k(O, r)$ tak, aby procházela daným bodem M a na kružnici vytínala tětivu AB dané délky $d \leq 2r$.

Rozbor. Pokud vynecháme podmínku, že má sečna p procházet bodem M , je řešení snadné:

Zvolíme $A_0 \in k$ a sestrojíme $B_0 \in k \cap h(A_0, d)$.

Přímka $s_0 = \leftrightarrow A_0B_0$ je řešením takto zjednodušené úlohy (obr. 30). Nakonec ji vhodným otočením kolem bodu O přemístíme tak, aby procházela bodem M .

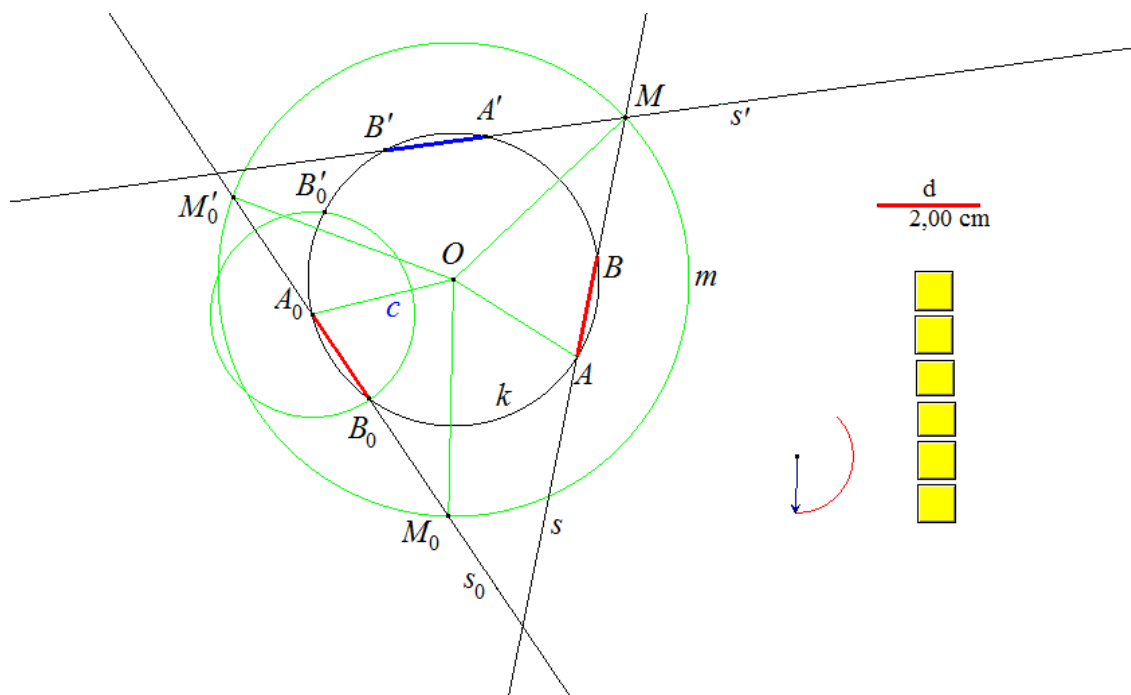
Abychom našli úhel onoho "vhodného" otočení, položíme si otázku, po jaké čáře se bude při otáčení pohybovat ten bod M_0 přímky s_0 , který bude po otočení totožný s bodem M . Zřejmě se bude pohybovat po kružnici m se středem O a poloměrem $|OM|$. Její průsečík M_0 s přímkou s_0 je vzorem bodu M v otočení $R_{O,\omega}$, kde ω je velikost orientovaného úhlu M_0OM .



Obr. 30

Konstrukce je zřejmá z rozboru. Poznamenejme, že otočení přímky p lze provést pomocí otočení jejích libovolných bodů X, Y . Jsou-li X', Y' obrazy těchto bodů v daném otočení, je obrazem přímky p přímka $p' = \leftrightarrow X'Y'$. V naší úloze je výhodné zvolit $X = M_0$, protože jeho obraz $X' = M$ již známe. Jako druhý bod jsme zvolili B_0 a přenesením úhlu ω našli jeho obraz B (obr. 30).

Diskuse. Úloha má jedno řešení ($s = \leftrightarrow OM$) pro $d = 2r$ a dvě řešení, je-li $d < 2r$. Obě řešení vidíme na obr. 31. To druhé odpovídá otočení o úhel M'_0OM . Nemusíme však podruhé otáčet. Pokud využijeme poznatku, že kružnice je osově souměrná podle každé přímky, která prochází jejím středem, stačí sestřit obraz úsečky AB v souměrnosti podle přímky OM .



Obr. 31

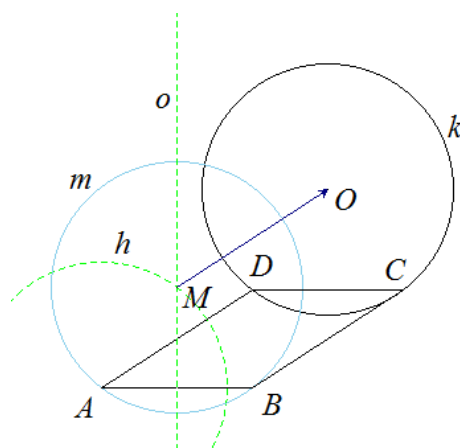
Úloha 20. V rovině je dána úsečka AB a kružnice $k(O, r)$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby body C, D ležely na kružnici k .

Rozbor. Uvažujme situaci na obr. 32. Úsečka AB opiše kružnici $h(M, r)$ se stejným poloměrem, jako má kružnice k . Posunutím o vektor MO se kružnice h přemístí na kružnici k a úsečka AB se zobrazí na úsečku DC . Protějššími stranami AB a CD bude rovnoběžník jednoznačně určen.

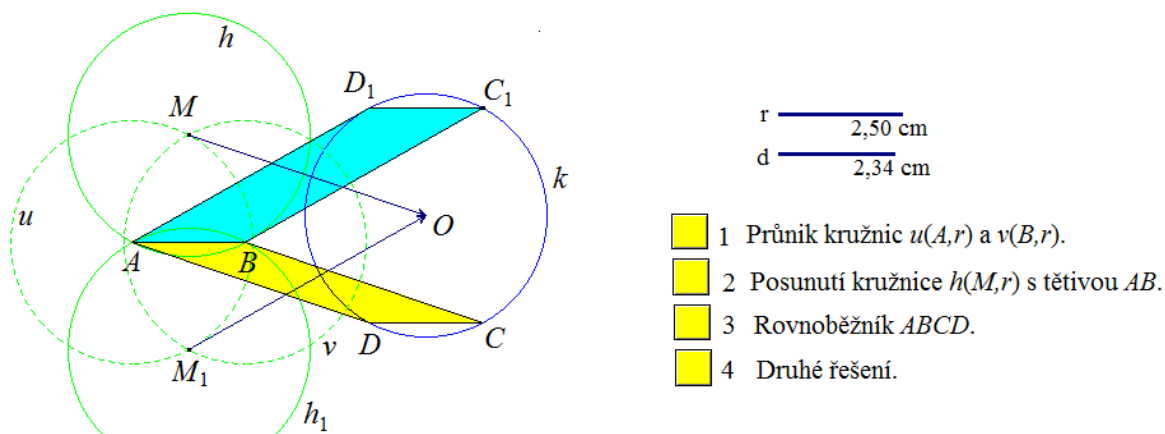
Konstrukce je zřejmá z rozboru a obr. 32.

Diskuse. Úloha má dvě řešení (viz obr. 33) za předpokladu, že $|AB| < 2r$. Je-li $|AB| = 2r$, má jedno řešení. Pro $|AB| > 2r$ úloha nemá řešení. Obě řešení znázorňuje obr. 33.

Pokuste se úlohu vyřešit pomocí posunutí o vektor AB .



Obr. 32



Obr. 33

V úlohách, kde se vyskytují rovnoběžky, resp. při konstrukci rovnoběžníka nebo lichoběžníka je někdy výhodné využít posunutí. Některé úlohy, v nichž se vyskytují soustředné kružnice, resp. úlohy na konstrukci rovnoramenných a rovnostranných trojúhelníků, je možno řešit užitím otočení.

Úloha 21. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AB| = a, |BC| = b, |\angle ASB| = \omega$ (S je střed rovnoběžníka).

Rozbor. V posunutí o vektor AB je obrazem úhlopříčky BD úsečka CM (obr. 34). Z rovnoběžnosti úseček BD a MC dostáváme

$$|\angle ACM| = |\angle ASB| = \omega.$$

Bod C leží na oblouku u množiny všech bodů roviny, z nichž je úsečka AM délky $2a$ vidět pod úhlem ω . Navíc leží na kružnici $h(B, b)$.

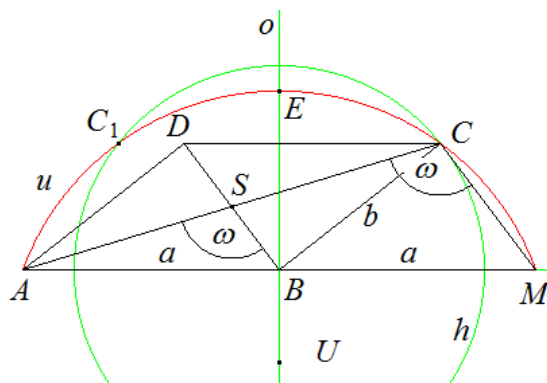
Lze tedy sestavit trojúhelník AMC včetně středu B úsečky AM . Doplnění trojúhelníku ABC na rovnoběžník $ABCD$ je snadné.

Diskuse. Úloha **může mít nejvýš jedno řešení**.

Trojúhelníky AMC a MAC_1 jsou totiž souměrné podle osy úsečky AM a proto jsou shodné. Odtud plyne i shodnost rovnoběžníků $ABCD$ a ABC_1D_1 , kde D_1 je obraz bodu B v souměrnosti podle středu úsečky AD (není na obr. 34 nekreslen). Pro další úvahy označme r poloměr kružnice, na níž leží oblouk u , a E průsečík oblouku u s osou o úsečky AM . Rozlišíme tři situace:

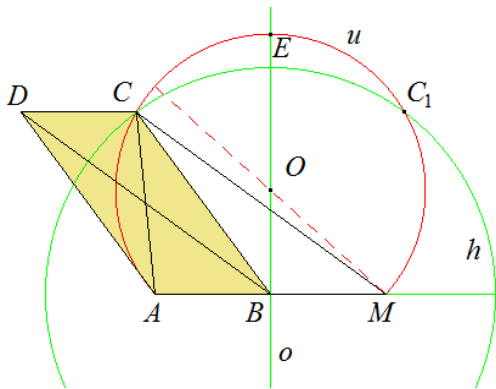
1. Platí-li $a = b$, leží body A a M v množině $h \cap u$. To znamená, že úloha nemá řešení pro $\omega \neq 90^\circ$, neboť $h \cap u = \{A, M\}$. Je-li však $\omega = 90^\circ$, platí $u \subset h$ a bod C může být kterýkoliv vnitřní bod půlkružnice u . Úloha má nekonečně mnoho řešení, výsledný rovnoběžník je kosočtverec nebo čtverec.

2. Pro $a < b$ má úloha řešení, jen když je $\omega < 90^\circ$ a navíc platí $b \leq |BE|$ (obr. 35).

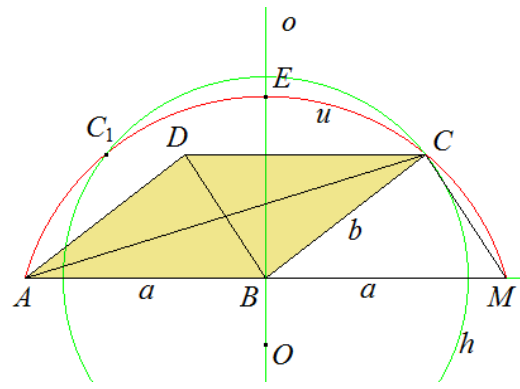


Obr. 34

3. Pro $a > b$ má úloha řešení, jen když je $\omega > 90^\circ$ a navíc $b \geq |BE|$ (obr. 36).



Obr. 35



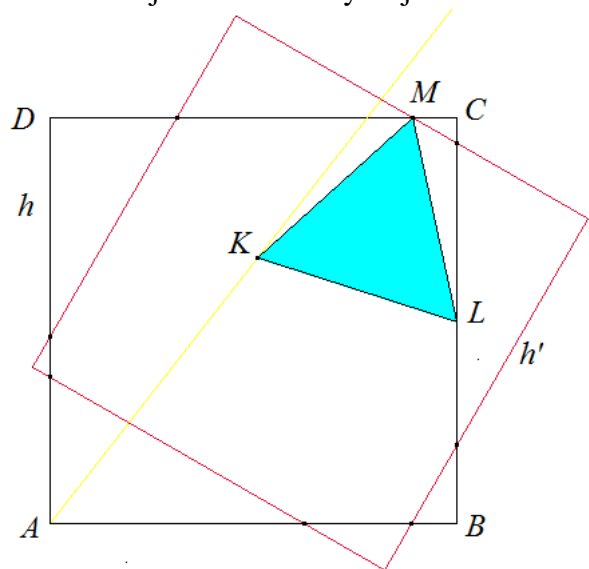
Obr. 36

Úloha 22. Je dán čtverec $ABCD$ s vnitřním bodem K . Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby jeho vrcholy L, M ležely na hranici čtverce.

Rozbor. V rotaci $R_{K,60^\circ}$ je obrazem hranice h čtverce $ABCD$ čára h' (hranice otočeného čtverce) a bod L se zobrazí do bodu M . Platí tedy $M \in h' \cap h$ (obr. 37). Po sestrojení bodu M určíme $L = R_{K,-60^\circ}(M)$.

Konstrukce je zřejmá z rozboru.

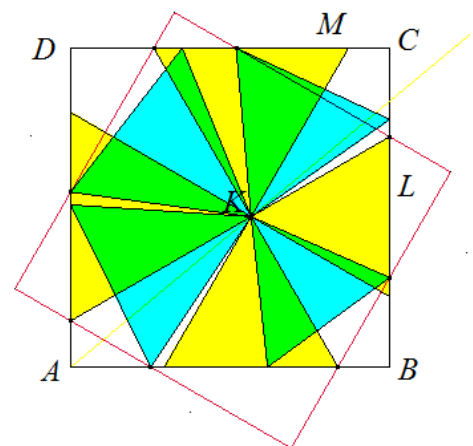
Diskuse. Úloha má 2 až 8 řešení podle počtu společných bodů čar h a h' . Zobrazení čáry h v rotaci $R_{K,-60^\circ}$ vede na stejná řešení jako v rotaci $R_{K,60^\circ}$.



Obr. 37

Obr. 38 představuje všech osm možných řešení.

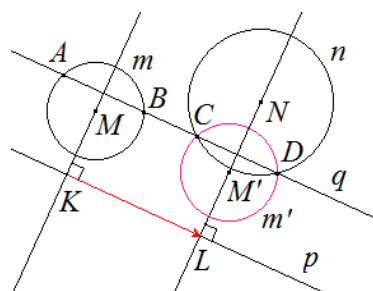
Poznámka. V souboru KU_22.fig je bod K umístěn na žluté polopřímce s počátkem A . To umožňuje narýsovaný obrázek i se zadáním přemísťovat úchopem za bod A . Bod K přemísťujeme jednak otáčením polopřímky, jednak posouváním po ní.



Obr. 38

Úloha 23. V rovině jsou dány kružnice m , n a přímka p . Sestrojte rovnoběžku q s přímkou p tak, aby vytínala na kružnicích stejně dlouhé tětivy.

Rozbor. Předpokládejme, že je přímka q sestrojena a označme K a L paty kolmic na přímku p ze středů M a N kružnic m a n (obr. 39). V posunutí T_{KL} o vektor \mathbf{KL} dostáváme $T_{KL}(A) = C$ a $T_{KL}(B) = D$ (tětiva AB se zobrazí na tětivu CD). Z toho plyne, že body C a D jsou průsečíky kružnic n a $m' = T_{KL}(m)$.



Obr. 39

Konstrukce

1. Body K, L (paty kolmic ze středů M a N).
2. $M' = T_{KL}(M)$.
3. $m'(M', r)$, kde r je poloměr kružnice m .
4. $C, D : m' \cap n$.
5. $A, B : q \cap m$, kde q je rovnoběžka s přímkou p v bodě C .

Diskuse. Pokud se kružnice n a m' protnou, má úloha jediné řešení. Jestliže se neprotnou, pak řešení nemá. Zdůvodněte, proč posunutí o vektor opačný k vektoru \mathbf{KL} nikdy nepovede k druhému řešení.

Cvičení

- CKU_10. V rovině jsou dány kružnice m , n , které se protínají v bodech A, B . Bodem A ved'te přímkou $p \neq \leftrightarrow AB$ tak, aby na obou kružnicích vytínala stejně dlouhé tětivy.
- CKU_11. V rovině jsou dány kružnice m , n , které se protínají. Jedním z jejich průsečíků ved'te přímkou p tak, aby součet délek vzniklých tětiv měl danou délku d .
- CKU_12. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno t_a, t_b, t_c .
- CKU_13. V rovině jsou dány soustředné kružnice m , n , mezi nimi bod A . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $B \in m$ a $C \in n$.
- CKU_14. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dána délka základny $|CD| = c$, délky ramen $|BC| = b, |DA| = d$ a číslo $\delta = |\angle DAB| - |\angle CBA| > 0$.
- CKU_15. Sestrojte čtverec, je-li dán a) součet délky jeho úhlopříčky a strany, b) jejich rozdíl.
- CKU_16. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $m = a - b, v_a, \gamma$.
- CKU_17. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $a, v_a, \delta = \beta - \gamma > 0$.
- CKU_18. V rovině jsou dány přímky p, q a bod C , který na nich neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in p$ a $B \in q$.
- CKU_19. V rovině jsou dány rovnoběžky p, q a přímka m s nimi různoběžná. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in p$ a $B \in q$ a $C \in m$.
- CKU_20. Do daného čtverce $ABCD$ vepište čtverec $KLMN$ s délkou strany d tak, aby jeho vrcholy K, L, M a N ležely po řadě na úsečkách AB, BC, CD a DA .

2.4 Konstrukční úlohy řešené na základě algebraického výpočtu

Někdy se nám nedaří sestrojít požadovaný útvar z daných prvků, ale umíme nalézt algebraický výraz, který určuje prvek x pomocí prvků daných. Jestliže útvar dovedeme sestrojít, když k daným prvkům tento prvek x přidáme, převedli jsme úlohu na sestrojení prvku x pomocí nalezeného algebraického výrazu.

Přehled konstrukcí algebraických výrazů nebudeme uvádět. Najdete jej na v bakalářské práci Jany Zobalové: *Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu*, kterou lze stáhnout například z [a]. V práci jsou též vyřešeny úlohy CKU_21 až CKU_24.

Úloha 24. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky $m = a + b, n = a - b > 0$ a jeho obvod p .

Řešení. Ze zadání a definice obvodu určíme $a = \frac{m+n}{2}, b = \frac{m-n}{2}, c = p - m$. Z těchto algebraických výrazů sestrojíme úsečky délek a, b, c a pak trojúhelník ABC z jeho stran.

Konstrukce jsou všechny triviální, jejich provedení přenecháváme čtenáři.

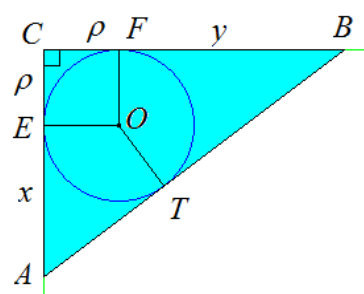
Diskuse. Úloha má jediné řešení, a to jen tehdy, když délky a, b, c splňují trojúhelníkovou nerovnost $|a - b| < c < a + b$. Z ní po dosazení dostaneme tuto podmínku řešitelnosti:

$$m + n < p < 2m.$$

Jestliže poslední vztah neplatí, nemá úloha řešení.

Úloha 25. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme T bod dotyku vepsané kružnice s přeponou AB . Sestrojte takový trojúhelník, jsou-li dány délky $x = |AT|$ a $y = |TB|$.

Rozbor. Předpokládejme, že je trojúhelník sestrojen (obr. 40). Vepsaná kružnice se dotýká odvěsen AC a BC v bodech E a F . Délky tečen z bodu ke kružnici jsou stejné: $|AE| = |AT| = x, |BF| = |BT| = y$ a $|CF| = |CE| = \rho$, kde ρ je poloměr vepsané kružnice. Čtýřúhelník $EOFC$ je čtverec. Vidíme, že $a = \rho + y, b = \rho + x$ a $c = x + y$. Pro délky stran trojúhelníka platí Pythagorova věta $a^2 + b^2 = c^2$. Odtud po dosazení, roznásobení a ekvivalentních úpravách dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou ρ :



Obr. 40

$$\rho^2 + (x + y)\rho - 2xy = 0. \quad (3)$$

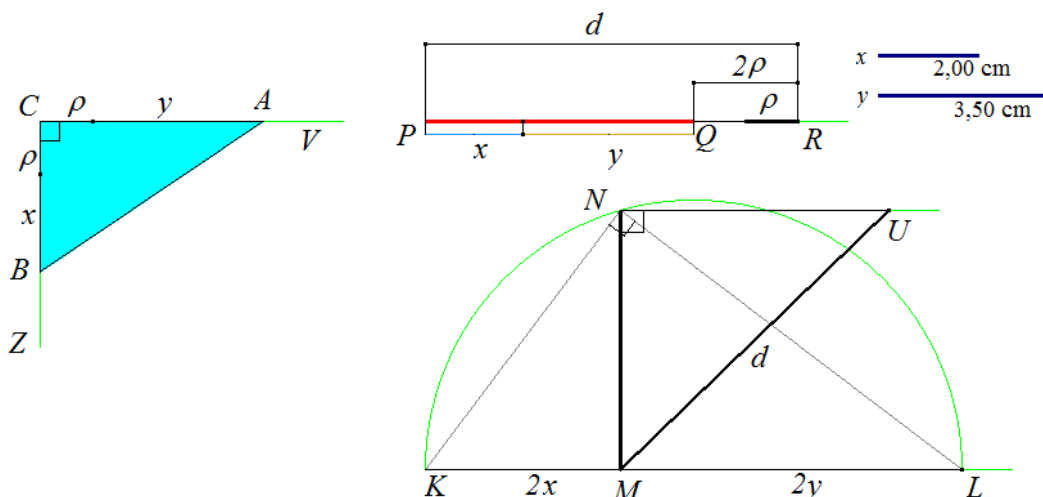
Její diskriminant $D = (x + y)^2 + 4xy$ je vždy kladný a dokonce větší než $x + y$. Naší úloze vyhovuje jen kladný kořen

$$\rho = \frac{1}{2}(d - (x + y)), \text{ kde } d = \sqrt{(x + y)^2 + 4xy}. \quad (4)$$

Můžeme tedy sestrojít poloměr ρ kružnice vepsané včetně úseček o délkách $a = \rho + y, b = \rho + x$ a $c = x + y$. Tím naši úlohu převedeme na sestrojení trojúhelníku ze tří stran, což je triviální. Poznamenejme ještě, že délku c nemusíme sestrojovat. Stačí nalézt délky odvěsen.

Konstrukce potřebných prvků včetně konstrukce trojúhelníka ABC je znázorněna na obr. 41. Úsečka PQ má délku $x + y$, výraz $\sqrt{4xy} = \sqrt{2x \cdot 2y}$ byl sestrojen s využitím

Eukleidovy věty o výšce jako výška MN v pravoúhlém trojúhelníku KLN a délku d představuje přepona pravoúhlého trojúhelníku MNU , v němž $|NU| = x + y$. Délka d byla v závěru pomocných konstrukcí nanesena na polopřímku PQ , čímž vznikla úsečka QR délky 2ρ . Konstrukce trojúhelníka je zřejmá.



Obr. 41

Diskuse. Úloha má pro libovolná kladná x, y právě jedno řešení. (Promyslete!)

Poznámka. Uvedený postup výpočtu poloměru vepsané kružnice lze považovat za standardní, který asi napadne většinu řešitelů. Rovnice (3) se však dá odvodit i bez užití Pythagorovy věty, například z dvojího vyjádření dvojnásobku obsahu trojúhelníka:

$$2S = a \cdot b = s \cdot \rho, \text{ kde } s = x + y + \rho \text{ je polovina obvodu trojúhelníka.}$$

Přesvědčte se o tom a porovnejte tento postup s řešením úlohy 9.

Úloha 26. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dáno $a + b = m, v_c$.

Rozbor. S využitím Pythagorovy věty a vztahu $2S = a \cdot b = c \cdot v_c$ dostáváme

$$m^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2cv_c,$$

neboli

$$c^2 + 2v_c c - m^2 = 0.$$

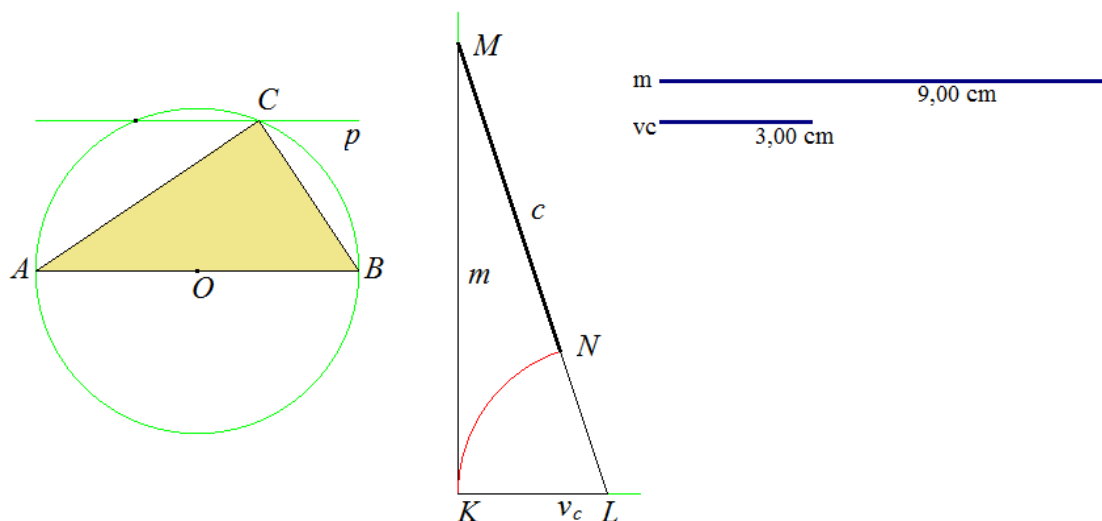
Tato kvadratická rovnice s neznámou c má diskriminant $D = 4(v_c^2 + m^2)$ a jediné kladné řešení

$$c = \sqrt{v_c^2 + m^2} - v_c. \quad (5)$$

Užitím Pythagorovy věty snadno sestojíme odmocninu ve vztahu (5) a pak úsečku délky c . Tím úlohu převedeme na (základní) konstrukci pravoúhlého trojúhelníka, v němž je dána délka c přepony a výška v_c .

Konstrukce je zřejmá z obr. 42.

Diskuse. Úloha má právě jedno řešení a to jen za podmínky, že $c \geq 2v_c$. Po dosazení ze vztahu (5) a úpravě má podmínka řešitelnosti tvar $m \geq v_c \sqrt{8}$.



Obr. 42

Cvičení

- CKU_21. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dáno $c - a = m$,
 $c - b = n$.
- CKU_22. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , je-li dáno $2a - c = m$,
 v_c .
- CKU_23. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , je-li dáno $c - a = m$,
 $v_a - v_c = n$.
- CKU_24. Na základě výpočtu vyřešte úlohy 16, 19 a CKU_15.

Poznámka. S jinými úlohami řešenými na základě algebraického výpočtu se ještě průběžně setkáme.

2.5 Užitečné postřehy a poznatky

Zde se zaměříme na úlohy, jejichž řešení je snadné, pokud si uvědomíme (nebo již známe) souvislosti, které se při výuce geometrie na střední i základní škole většinou neuvádí. Při výkladu občas odbočíme od problematiky pouhých geometrických konstrukcí. Odvodíme některé poznatky užitečné i pro řešení jiných úloh. Řešení dalších úloh budeme popisovat stručněji. Nebudeme již důsledně rozlišovat rozbor, konstrukci, zdůvodnění a diskusi pomocí nadpisů.

2.5.1 Vázané prvky

Pokuste se nejprve vyřešit následující úlohu, aniž byste se dívali na její řešení.

Úloha 27. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno a, r, α , kde r je poloměr kružnice opsané.

Řešení. Korektní zadání úlohy na konstrukci trojúhelníka by mělo obsahovat tři nezávislé prvky. Naše úloha tuto podmínku nesplňuje, neboť podle sinové věty platí

$$a = 2r \sin \alpha. \quad (6)$$

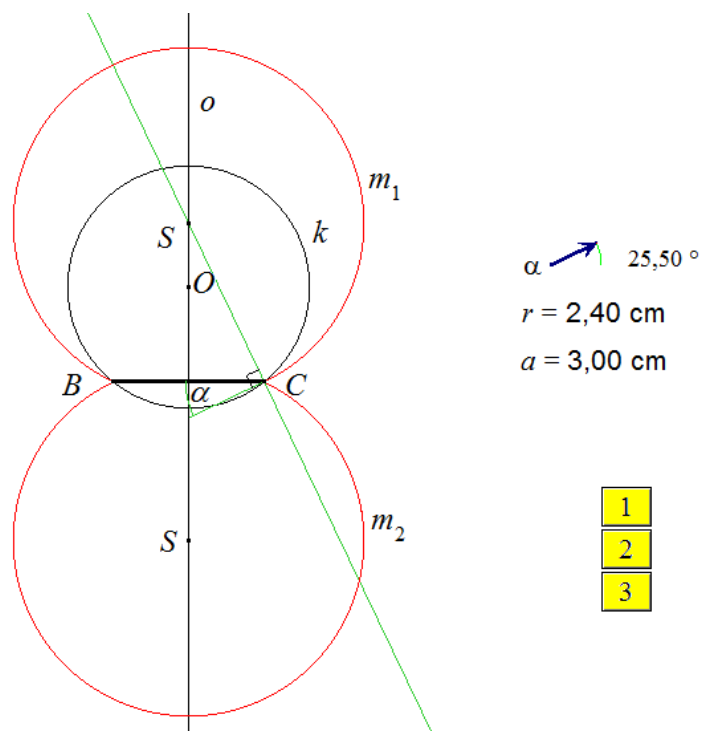
Představíme si na chvíli, že tuto okolnost neznáme, a pokusíme se úlohu vyřešit. Úlohu má smysl řešit jen pro $0 < a \leq 2r$. Pak lze sestavit opsanou kružnici $k(O, r)$, na ní zvolit bod B a sestavit vrchol $C \in k \cap h(B, a)$. Zbývající vrchol A je průsečíkem kružnice k s množinou

$$m = \{X, |\angle BXC| = \alpha\} = m_1 \cup m_2$$

(viz též úlohu 6 na str. 10).

Jestliže zadané hodnoty nespĺňujú vzťah (6), má množina m s kružnicí k společné pouze body B, C a úloha nemá řešení (obr. 43).

Jestliže zadané hodnoty vyhovují vztahu (6), pak (při vhodném označení oblouků m_1 a m_2) je oblouk m_1 nebo m_2 totožný s jedním z oblouků BC kružnice k . Úloha má nekonečně mnoho řešení, protože bod A můžeme zvolit kdekoliv na totožných obloucích.



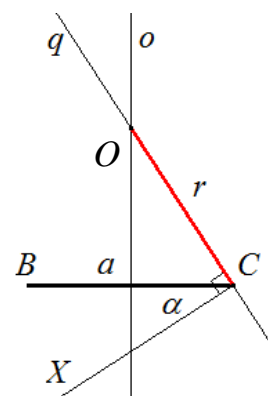
Obr. 43

Z dosavadních plyne:

Úlohy typů a, α, x , α, r, x a a, r, x , kde $x \notin \{a, \alpha, r\}$ je nějaký další prvek trojúhelníka, jsou **navzájem zaměnitelné**. To znamená, že po vyřešení libovolné z nich lze pokládat za vyřešené i zbývající dvě úlohy.

I. Ke dvojici a, α sestavíme r touto konstrukcí (obr. 44):

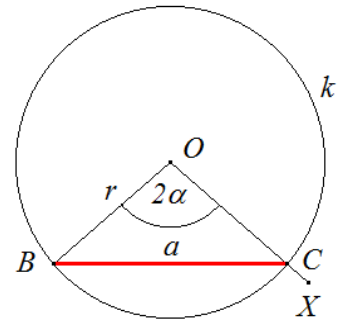
1. Úsečka BC délky a .
2. Úhel BCX velikosti α .
3. Osa o úsečky BC .
4. Kolmice q na CX v bodě C .
5. $r = |CO|$, kde $O \in o \cap q$.



Obr. 44

II. Ke dvojici α, r sestrojíme a touto konstrukcí (obr. 45):

1. Kružnice $k(O, r)$.
2. Bod $B \in k$ zvolíme.
3. Úhel BOX velikosti 2α .
4. $C : \rightarrow OX \cap k$.
5. Úsečka BC délky a .



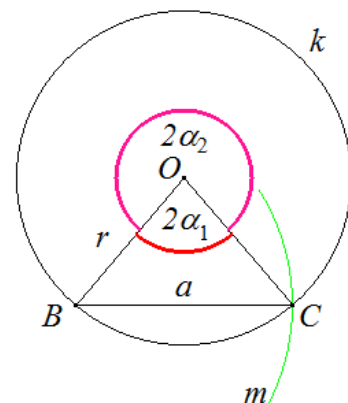
Obr. 45

III. Ke dvojici a, r sestrojíme α touto konstrukcí (obr. 46):

1. Kružnice $k(O, r)$.
2. Bod $B \in k$ zvolíme.
3. $C : k \cap m(B, a)$.
4. Úhel BOC má velikost 2α .

Důležité! Nutno uvažovat oba úhly BOC , jak vidíme na obr. 46. Kdybychom řešili rovnici

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r}, \text{ také vyjdou dva kořeny na intervalu } \langle 0, 180^\circ \rangle.$$



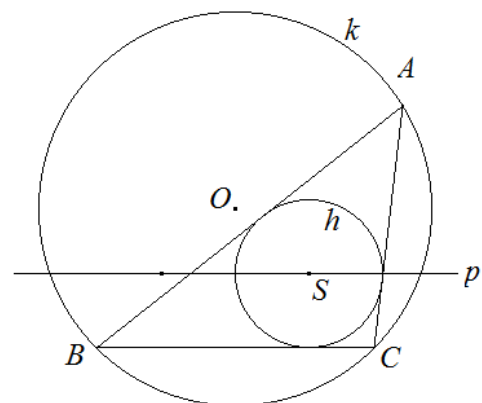
Obr. 46

Úlohu 28 se pokuste nejprve vyřešit sami.

Úloha 28. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

- a) a, r, ρ ,
- b) α, r, ρ ,
- c) a, α, ρ (ρ je poloměr kružnice vepsané).

Řešení. Víme již, že stačí vyřešit pouze jednu z úloh a), b) a c), protože pak lze každou ze zbývajících úloh převést pomocí postupu **I**, nebo **II**, nebo **III** na úlohu vyřešenou. Ve všech třech úlohách umíme sestrotit opsanou kružnici k s tětivou BC . Kdyby se nám podařilo sestrotit ještě vepsanou kružnici $h(S, \rho)$, našli bychom poslední vrchol A jako průsečík opsané kružnice k s tečnou z bodu B nebo C ke kružnici h (obr. 47). Protože poloměr kružnice h známe, stačí nalézt střed S . Ten leží na rovnoběžce p s přímkou BC vzdálené od ní o délku ρ . Poznamenejme, že z možných dvou rovnoběžek je to pouze jedna. Sice ta, jež



Obr. 47

leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB , jako ten oblouk AB opsané kružnice k , na němž leží vrcholy obvodových úhlů velikosti α .

Při tomto postupu je pro mnohé řešitele problém, jak nalézt ještě jednu čáru, na níž leží bod S . Jak ji nalézt nám asi nenapoví zadání a). Úhel α , který se vyskytuje v úkolech b) a c), nám trochu napovídá. Víme totiž, že střed S vepsané kružnice je průsečíkem os vnitřních úhlů. Zkusíme tedy vyjádřit velikost úhlu BSC pomocí α .

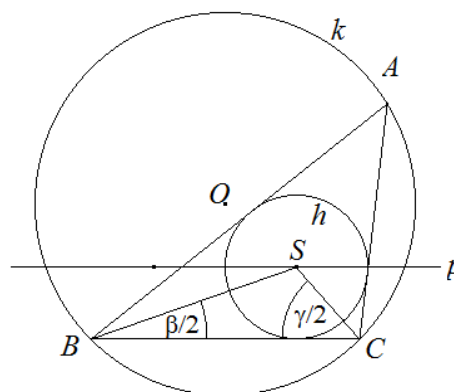
Z trojúhelníku BSC na obr. 48 plyne

$$|\angle BSC| + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$$

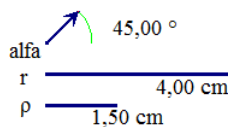
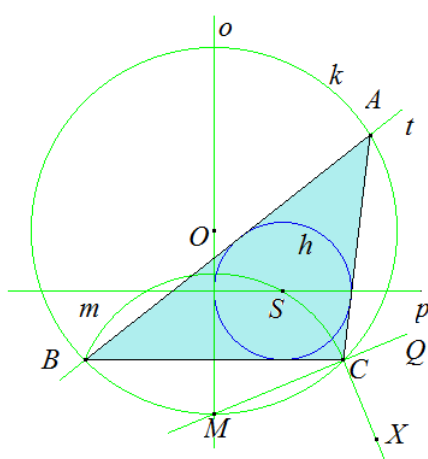
a ze vztahu pro součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka ABC :

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Odečtením obou vztahů dostaneme vztah $|\angle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, z něž plyne, že bod S leží na tom oblouku m množiny $\left\{ X, |\angle BXC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right\}$, který se nachází s přímkou p ve stejné polorovině ohraničené přímkou BC . Odtud plyne konstrukce, která je stručně popsána na obr. 49. Diskusi přenecháváme čtenáři.



Obr. 48



- 1 Kružnice $k(O,r)$.
- 2 Úsečka BC taková, aby úhel BOC měl velikost 2α .
- 3 o : osa úsečky BC .
- 4 m : oblouk nad tětivou BC s obvodovým úhlem $90^\circ + \alpha/2$.
- 5 S : průsečík m a rovnoběžky p s přímkou BC ve vzdál. ρ od ní.
- 6 $h(S,\rho)$.
- 7 A : průsečík kružnice k a tečny t z B ke kružnici h .
- 8 Trojúhelník ABC .

Obr. 49

Poznámka. Povšimněte si, že střed M oblouku m leží v průsečíku osy o s kružnicí k . Podaří se vám dokázat, že to není náhoda? Pokud to platí, můžeme konstrukci zjednodušit:

Střed M oblouku m nalezneme jako $k \cap o$ (a velikost úhlu BSC nemusíme hledat).

Cvičení

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

CKU_23. a) a, v_a, r , b) α, v_a, r , c) α, v_a, a .

CKU_24. a) a, b, r , b) α, b, r , c) α, b, a .

CKU_25. a) a, v_b, r , b) α, v_b, r , c) α, v_b, a .

CKU_24. a) a, t_a, r , b) α, t_a, r , c) α, t_a, a .

CKU_25. a) a, t_b, r , b) α, t_b, r , c) α, t_b, a .

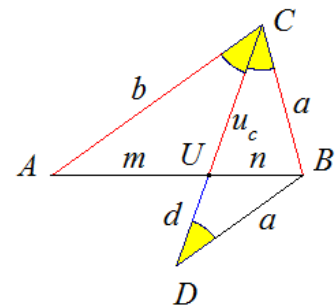
2.5.2 Vlastnosti os úhlů trojúhelníka

Úloha 29. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno a, b a $|CU| = u_c$, kde U je průsečík osy úhlu ACB s úsečkou AB .

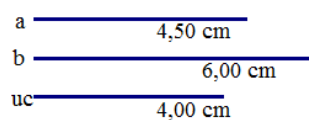
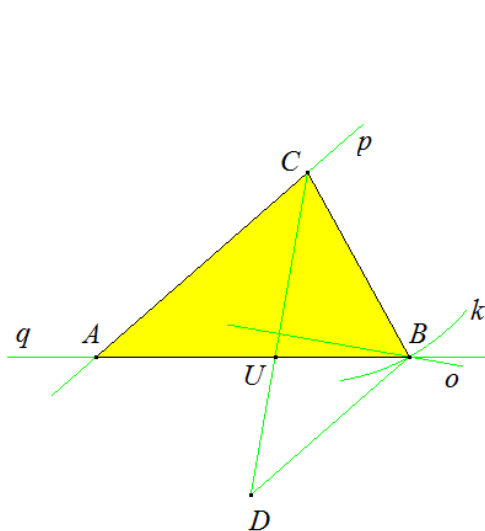
Řešení. Předpokládejme, že je trojúhelník sestaven a vedme bodem B rovnoběžku se stranou AC . Její průsečík s přímkou CU označme D a položme $|DU| = d$, $|AU| = m$ a $|UB| = n$ (obr. 50). Ze shodnosti střídavých úhlů BDC a ACD a střídavých úhlů DBA a CAB plyne podobnost trojúhelníků BDU a ACU a odtud

$$\frac{d}{u_c} = \frac{a}{b} = \frac{n}{m}. \quad (7)$$

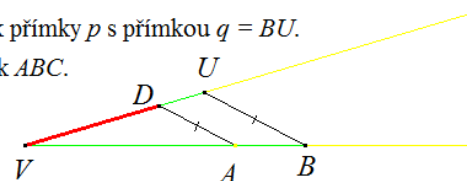
První ze vztahů (7) umožňuje sestavit úsečku délky d jako čtvrtou geometrickou úměrnou. Po jejím nalezení je již konstrukce trojúhelníka ABC snadná. Vidíme ji i s popisem na obr. 51.



Obr. 50



- 1 Sestrojení délky d jako čtvrté geom. úměrné: $d/u_c = a/b$.
- 2 Úsečka CD délky $u_c + d$ s vnitřním bodem U , $|DU| = d$.
- 3 o : osa úsečky CD .
- 4 B : průsečík osy o a kružnice $k(C, a)$.
- 5 p : rovnoběžka s přímkou BD v bodě C .
- 6 A : průsečík přímky p s přímkou $q = BU$.
- 7 Trojúhelník ABC .



Obr. 51

Diskuse. Úloha má řešení jen tehdy, když platí trojúhelníková nerovnost pro rovnoramenný trojúhelník CDB :

$$u_a + d < 2a.$$

Platí-li tato nerovnost, má úloha právě jedno řešení (p a q jsou různoběžky).

Druhý ze vztahů (7) jsme k vyřešení úlohy nepotřebovali. Představuje však užitečný poznatek:

Věta 2. V libovolném trojúhelníku ABC protíná osa vnitřního úhlu ACB stranu AB v bodě U , pro nějž platí

$$\frac{|AU|}{|UB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Jinými slovy osa vnitřního úhlu dělí protilehlou stranu trojúhelníka v poměru délek přilehlých stran.

Kolem roku 300 před naším letopočtem sepsal v Alexandrii Euklides Základy, z nichž je převzata podstatná část dnešního učiva planimetrie na základních a středních školách. Říká se o něm, že svým žákům zadával úlohy tří kategorií. Do první z nich zařadil základní konstrukce geometrických útvarů a ve druhé požadoval důkazy matematických vět. Úlohy třetí kategorie byly nejtěžší. Spočívaly v tom, že učitel předvedl zdánlivě korektní důkaz evidentně nepravdivého tvrzení a žakovým úkolem bylo nalézt v důkazu chybu.

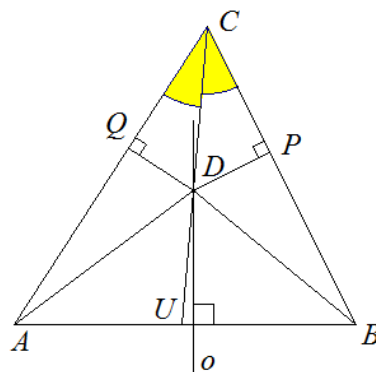
Příkladem, jak by taková úloha mohla vypadat je následující úvaha, pomocí níž dokážeme, že obecný trojúhelník má stejně dlouhé strany.

Uvažujme libovolný trojúhelník ABC , v němž U je průsečík osy úhlu ACB se stranou AB a D je průsečík osy o strany AB s přímkou CU (obr. 52). Navíc označíme P a Q paty kolmic z bodu D na strany AC a BC .

Z faktu, že bod D leží na ose úhlu ACB plyne $|DP| = |DQ|$.

Pravoúhlé trojúhelníky CDQ a CDP mají společnou přeponu CD a navíc se shodují v odvěsnách proti vrcholu C . To znamená, že jsou shodné podle věty Ssu o shodnosti trojúhelníků. Odtud plyne:

$$|QC| = |PC|. \quad (8)$$

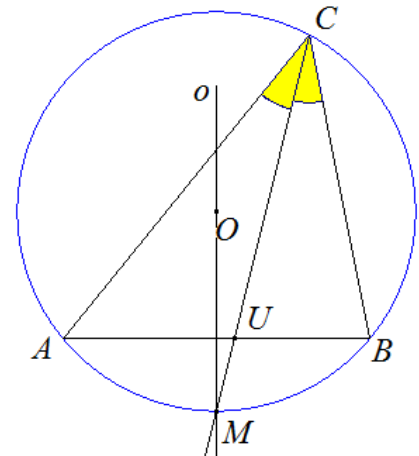


Obr. 52

Z podmínky $D \in o$ dále plyne $|AD| = |BD|$, neboť osa úsečky AB je množinou všech bodů X dané roviny, pro něž platí $|AX| = |BX|$. Pravoúhlé trojúhelníky ADQ a BDP jsou shodné podle věty Ssu, neboť mají shodné přepony AD , BC a shodují se i v odvěsnách DQ , DP . Ze shodnosti plyne $|AQ| = |BP|$. Pomocí této rovnosti a vztahu (8) dostáváme

$$|AC| = |AQ| + |QC| = |BP| + |PC| = |BC|. \quad \square$$

Je zřejmé, že rovnost délek stran AC a BC může platit jen v rovnostranném trojúhelníku s hlavním vrcholem C (resp. v rovnostranném trojúhelníku). Důkaz zřejmě není korektní, přestože uvedenému postupu nelze nic podstatného vytknout. Chyba je v obrázku. Ten byl záměrně nakreslen chybně: Přímku o jsme umístili napravo od skutečné osy úsečky AB a úhel ACU je větší, než úhel UCB . Průsečík D přímek CU a o se v důsledku těchto nepřesností nachází uvnitř trojúhelníka ABC . Ve skutečnosti tomu tak není.



Obr. 53

Osa strany AB zřejmě prochází středem M oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC (obr. 53). Shodným obloukům AM a MB přísluší shodné obvodové úhly ACM a MCB , proto i osa úhlu ACB prochází bodem M . Jinými slovy je průsečík obou os středem M oblouku AB .

Poznatek shrneme do věty:

Věta 3. V každém trojúhelníku ABC se průsečík osy vnitřního úhlu ACB a osy strany AB nachází ve středu toho oblouku AB kružnice opsané, který neobsahuje bod C .

Úloha 30. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky $|BU| = m$, $|UC| = n$ (U je průsečík osy úhlu BAC s úsečkou BC) a poloměr r kružnice trojúhelníku opsané.

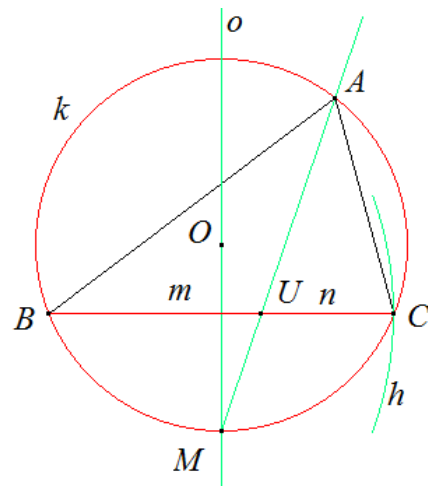
Řešení. Ze zadání plyne $|BC| = m + n$, proto není problém sestrojit kružnici $k(O, r)$ s tětivou BC , na kterou umístíme bod U tak, aby $|BU| = m$ (obr. 54). Je-li M střed oblouku BC , sestrojíme pomocí věty 3 bod A jako průsečík přímky UM s kružnicí k .

Konstrukce je zobrazena a popsána na obr. 55.

Diskuse. Úloha nemá řešení, je-li $m + n > 2r$.

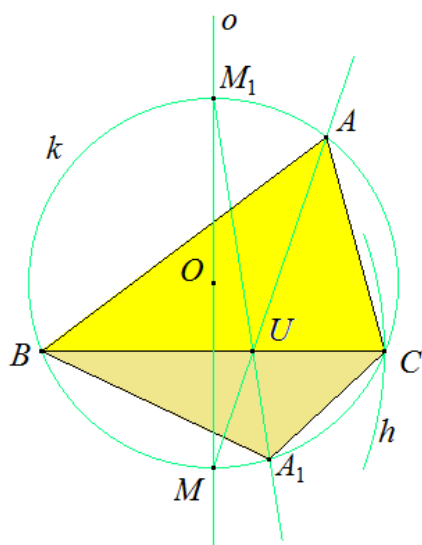
Když platí $m + n = 2r$, má úloha 1 řešení (pravoúhlý trojúhelník).

Pokud je $m + n < 2r$, má úloha dvě řešení, jak vidíme na obr. 55.



Obr. 54

Poznámka. Věta 3 je důsledkem základních vlastností osy úhlu a úsečky. Přesto je silným nástrojem pro řešení některých úloh. Uvedené řešení úlohy 30 je názorným příkladem její užitečnosti. Těžko bychom našli jiný a přitom tak jednoduchý postup.



m 4,00 cm
 n 2,50 cm
 r 3,50 cm

- 1 $k(O, r)$
- 2 Na k zvolíme B , bod C je průsečík k a $h(B, m+n)$.
- 3 Bod U na úsečce BC , $|BU| = m$.
- 4 o : osa úsečky BC , M : k průnik o .
- 5 A : průsečík kružnice k a přímky MU .
- 6 Trojúhelník ABC .
- 7 Druhé řešení.

Obr. 55

Cvičení

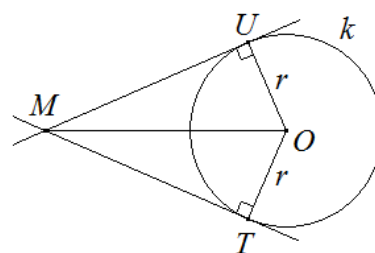
- CKU_26. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $a + b = d$, $|BU| = m$, $|UC| = n$ (U je průsečík osy úhlu BAC a úsečky BC). (Vypočítejte nejprve délky stran a , b a c .)
- CKU_27. Uvnitř kruhu ohraničeného danou kružnicí k je dán bod U . Vepište do kružnice k trojúhelník ABC tak, aby jeho strana AB měla danou délku c a bod U byl průsečíkem strany AB s osou úhlu ACB .
- CKU_28. Je dán trojúhelník BCD . Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, aby kružnice vepsaná trojúhelníku ABC měla daný poloměr ρ .
- CKU_29. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno t_a, v_a, u_a ($u_a = |AU|$, kde U je průsečík osy úhlu BAC a úsečky BC).

2.5.3 Věta o délkách tečen

Dalším účinným nástrojem geometrického objevování je věta o délkách tečen známá ze základní školy:

Věta 4. Jestliže mají tečny z bodu M ke kružnici k body dotyku T a U , pak $|MT| = |MU|$.

Důkaz. Pravoúhlé trojúhelníky MOU a MOT mají společnou přeponu MO a shodují se v odvěsnách OU a OT délky r (obr. 56). Jsou shodné podle věty Ssu, tedy $|MT| = |MU|$. \square



Obr. 56

Úloha 31. Je dána kružnice $k(O, r)$ s tečnou t v bodě dotyku T a bod M , který leží vně kružnice k , avšak neleží na t . Sestrojte tečny p, q ke kružnici k tak, aby trojúhelník ohraničený přímkami p, q, t měl daný obvod $o = 2s$ a aby $M \in q$.

Řešení. Předpokládejme, že sestrojením tečen p, q vznikl trojúhelník ABC (obr. 57). Při označení podle obrázku (a podle věty 4) platí:

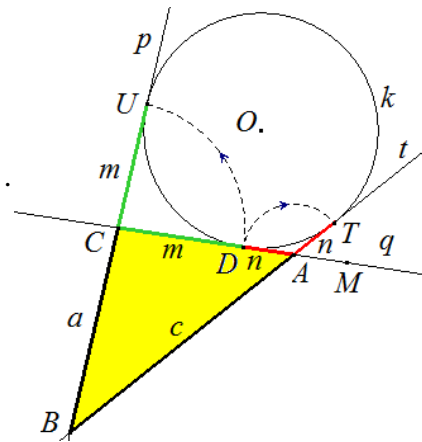
$$|CD| = |CU| = m \text{ a } |BD| = |BT| = n,$$

$$2s = a + (m+n) + c = (a+m) + (n+c) = |BU| + |BT| = 2|BT|.$$

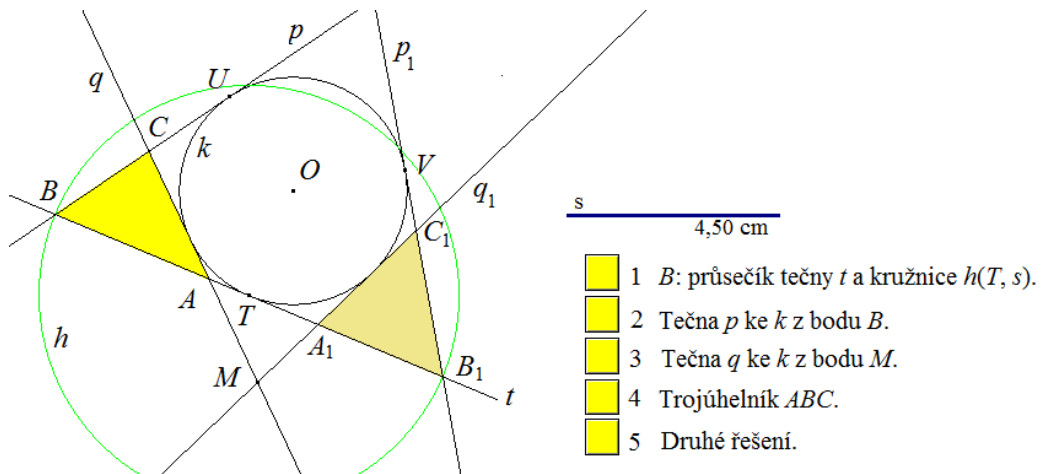
Z právě odvozené rovnosti $|BT| = s$ plyne konstrukce, kterou i s popisem znázorňuje obr. 58.

Diskuse. Úloha má 0 až 2 řešení. Tečna t a velikost s určují jednoznačně trojúhelníky TBU a TB_1V . Trojúhelník ABC (resp. $A_1B_1C_1$) totiž vznikne, když některá z tečen q a q_1 bude mít po jednom společném bodu buď s vnitřky úseček BT a BU , nebo s vnitřky úseček B_1T a B_1V .

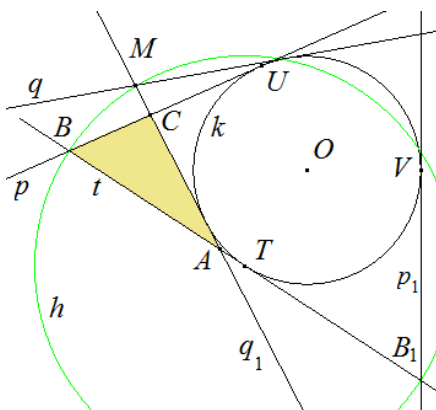
Situace, kdy má úloha 2, 1, nebo 0 řešení znázorňují po řadě obr. 58, obr. 59a, obr. 59b.



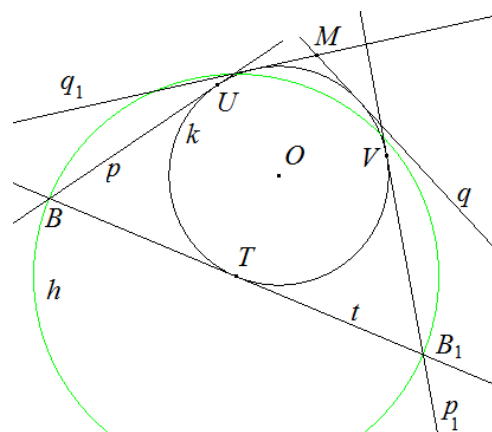
Obr. 57



Obr. 58



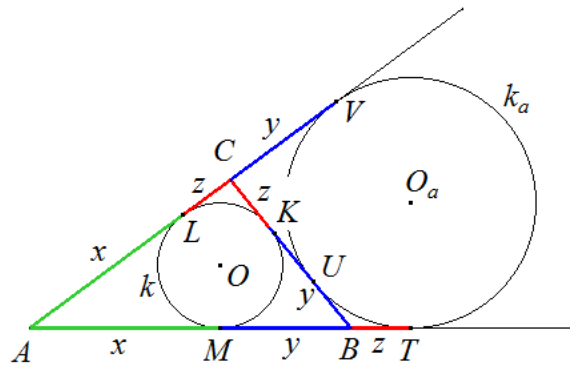
Obr. 59a



Obr. 59b

Poznatky získané řešením úlohy nyní rozšíříme. Na obr. 60 je znázorněn trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ a kružnicí $k_a(O_a, r_a)$, připsanou trojúhelníku ke straně BC . Pro délky tečen z vrcholů A, B a C ke kružnici vepsané zavedeme (v daném pořadí) označení x, y a z :

$$\begin{aligned} x &= |AL| = |AM|, \\ y &= |BM| = |BK|, \\ z &= |CK| = |CL|. \end{aligned}$$



Obr. 60

Pomocí obr. 60 snadno ověříme, že

$$s = x + y + z, \quad a = y + z = s - x, \quad b = z + x = s - y, \quad c = x + y = s - z, \quad (9)$$

kde s je polovina délky obvodu trojúhelníka ABC .

Po přidání poznatku $|AT| = s = |AU|$ (z řešení úlohy 31) k těmto vztahům dostáváme

$$|BT| = |AT| - |AB| = (x + y + z) - (x + y) = z \quad \text{a analogicky} \quad |CV| = y.$$

Platí tedy

$$y = |BM| = |BK| = |CV| = |CU| \quad \text{a} \quad z = |CK| = |CL| = |BT| = |BU|.$$

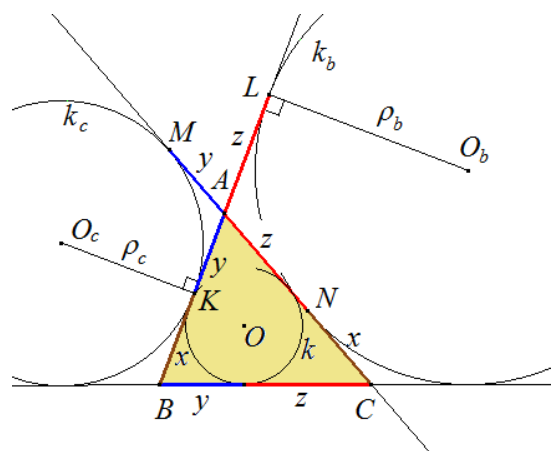
To znamená, že délky tečen z vrcholu B ke kružnici k jsou stejné jako délky tečen z vrcholu C ke kružnici k_a a délky tečen z vrcholu C ke kružnici k jsou stejné jako délky tečen z vrcholu B ke kružnici k_a . Analogické vztahy platí i pro strany AC a AB . (Nakreslete si obrázek a vztahy odvoďte.)

Úloha 32. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno a, ρ_b, ρ_c .

Řešení. Jestliže jsou K a L body dotyku přímky AB s kružnicemi $k_c(O_c, \rho_c)$ a $k_b(O_b, \rho_b)$, pak platí $|KL| = |KA| + |AL| = y + z = a$ (obr. 61).

Odtud plyne konstrukce:

1. Sestrojíme úsečku AL délky a .
2. Na kolmicích k přímce KL v bodech K a L sestrojíme po řadě body O_c a O_b ve vzdálenostech ρ_c a ρ_b , tak, aby ležely v opačných polorovinách s hraniční přímkou KL (obr. 61).
3. Sestrojíme kružnice $k_c(O_c, \rho_c)$ a $k_b(O_b, \rho_b)$.
4. Sestrojíme společné tečny ke kružnicím k_c, k_b .
5. Trojúhelník ABC je ohraničen jednou vnější



Obr. 61

a dvěma vnitřními tečnami. Přitom bod A je průsečíkem vnitřních tečen a bod B průsečíkem vnější tečny s přímkou KL .

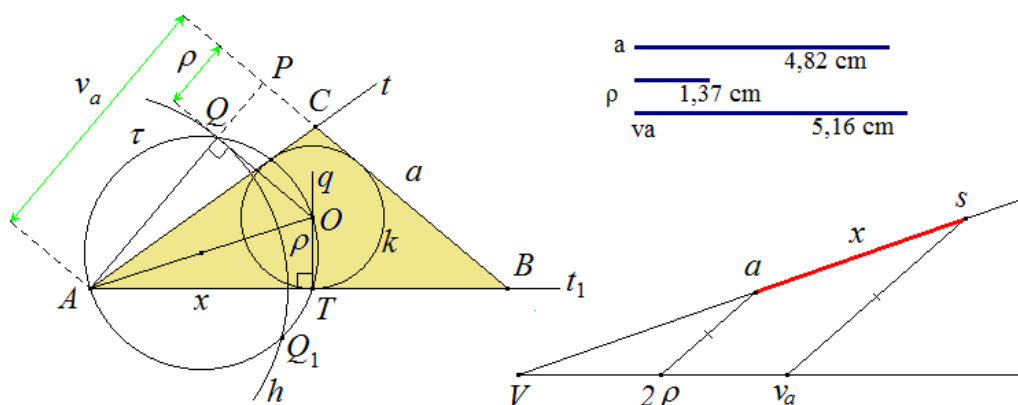
Diskuse. Úloha má vždy právě jedno řešení. (Společné tečny dvou kružnic jsou symetrické podle přímky O_bO_c a proto je druhý možný trojúhelník, označme jej AB_1C_1 , shodný s trojúhelníkem ABC .)

Úloha 33. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno a, ρ, v_a .

Řešení. Pro dvojnásobek obsahu trojúhelníka ABC platí $2S = a \cdot v_a = 2s \cdot \rho$. Odtud dostáváme

vztah $\frac{s}{a} = \frac{v_a}{2\rho}$, pomocí něž získáme úsečku délky s jako čtvrtou geometrickou úměrnou

a pak i úsečku délky $x = s - a$. Určení délky x umožňuje sestavit pravoúhlý trojúhelník AOT s odvěsnami AT a OT délek x a ρ (obr. 62). Ten je základem ke konstrukci vepsané kružnice $k(O, \rho)$ a jejích tečen t a $t_1 = \leftrightarrow AT$ z bodu A . Zbývá sestavit tečnu BC tak aby $C \in t$, $B \in t_1$ a $|BC| = a$. K tomu je užitečné povšimnout si, že průsečík Q úsečky AP , kde P je pata kolmice z A na BC , a Thaletovy kružnice nad průměrem AO je od vrcholu A vzdálen o délku $v_a - \rho$. Můžeme tedy sestavit trojúhelník AQO i patu výšky P , neboť $P \in \rightarrow AQ \cap m(A, v_a)$. Tečnu BC sestojíme jako rovnoběžku s přímkou OQ v bodě P .



Obr. 62

Konstrukce byla právě popsána a zdůvodněna.

Diskuse. Konstrukci úsečky délky x zajistí podmínka $s > a$, konstrukci bodu Q podmínka $v_a - \rho \leq \sqrt{x^2 + \rho^2}$, která je důsledkem vztahu $|AQ| \leq |AO|$. Dále již snadno zjistíme, že úloha má řešení právě tehdy, když platí $2\rho < v_a \leq \rho + \sqrt{x^2 + \rho^2}$. Pokud má úloha řešení, má je jediné, neboť konstrukce s využitím průsečíku Q_1 vede na trojúhelník, který je s trojúhelníkem ABC symetrický podle přímky AO .

Cvičení

CKU_30. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno c, s, ρ_a .

CKU_31. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $b + c - a = d$, α , $|AU| = u_a$,

CKU_32. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $b - c = d$, ρ , ρ_a .

CKU_33. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $a + b - c = d$, γ , v_c .

3. Aplikace

V této kapitole se zaměříme na využití geometrických konstrukcí v praxi. Seznámíme se s problémy, které se většinou týkají hledání maximálních nebo minimálních hodnot některých veličin. Obsah nebo obvod bývá extrémní u pravidelných rovinných útvarů. K hledání extrémů v geometrii (i důkazu, že extrém nastal) je tedy vhodné využívat symetrie a různé geometrické postřehy. Tak můžeme obejít (někdy složité) algebraické postupy.

3.1 Problém místnosti v podkroví a izoperimetrické úlohy

Úloha 34. Ve zdi je výklenek, jehož příčný řez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka ABC na obr. 63. Chceme si do něj pořídit skříňku znázorněnou na obrázku pravoúhelníkem $AKLM$.

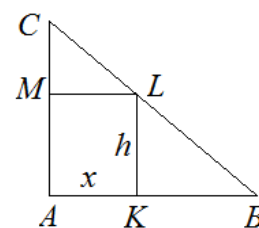
Určete její rozměry x a h , aby byl obsah průřezu $AKLM$ maximální.

Řešení. Převedeno do řeči matematiky máme do trojúhelníka ABC s pravým úhlem při vrcholu A vepsat pravoúhelník $AKLM$ maximálního obsahu.

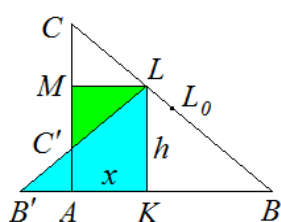
Úhel KLM je pravý, proto je součet velikostí ostrých úhlů MLC a BLK

roven 90° . Osová souměrnost zachová délky úseček a velikosti úhlů i obsahů. Odtud plyne, že body $C' = S_{\leftrightarrow ML}(C)$, $B' = S_{\leftrightarrow KL}(B)$ a $L = S_{\leftrightarrow KL}(L) = S_{\leftrightarrow ML}(L)$ leží na téže přímce (obr. 64)

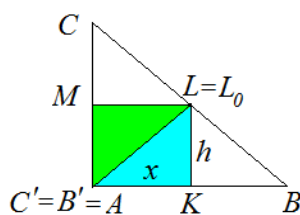
a platí $P = P_{LMC'} + P_{KLB'} + P_{AKLM}$, kde P je obsah trojúhelníka ABC a P_{XYZ} obsah útvaru XYZ .



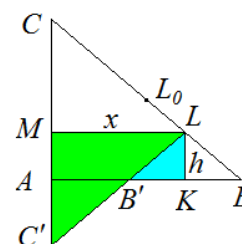
Obr. 63



Obr 64a



Obr 64b



Obr 64c

Jestliže se bod L nachází ve středu L_0 úsečky BC , je $C' = B' = A$ (obr. 64b). Sjednocením nepřekrývajících se trojúhelníků LMC' a KLB' je pravoúhelník $AKLM$. To znamená, že obsah pravoúhelníku $AKLM$ je roven polovině obsahu P trojúhelníka ABC : $P_{AKLM} = P/2$.

Je-li L uvnitř úsečky CL_0 , je obsah sjednocení trojúhelníků LMC' a KLB' roven součtu obsahu pravoúhelníku $AKLM$ a obsahu přečnávajícího trojúhelníka $AC'B'$, tedy $P_{AKLM} < P/2$ (obr. 64a). Analogicky platí $P_{AKLM} < P/2$ i tehdy, když je bod L uvnitř úsečky BL_0 (obr. 64c).

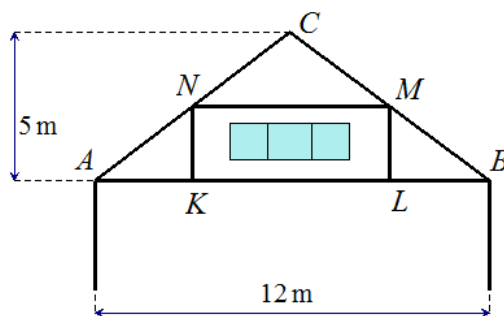
Závěr. Obsah příčného řezu poličky je maximální, právě když $x = \frac{1}{2}|AB|$ a $h = \frac{1}{2}|AC|$.

Maximální hodnota tohoto obsahu je $P_{\max} = \frac{1}{4}|AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2}P_0$.

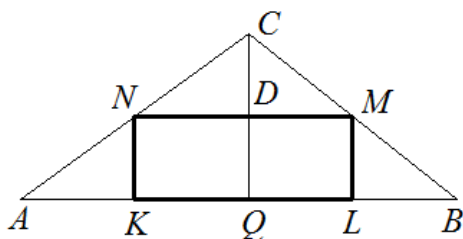
Úloha 35. Majitel domku se rozhodl využít rozlehlý prostor na půdě k výstavbě podkrovní místnosti, jejíž příčný řez znázorňuje obdélník $KLMN$ na obr. 65. (Profil půdního prostoru představuje trojúhelník ABC .)

Jaké má zvolit rozměry $x = |KL|$ a $h = |LM|$, aby byl obsah průřezu $KLMN$ co největší?

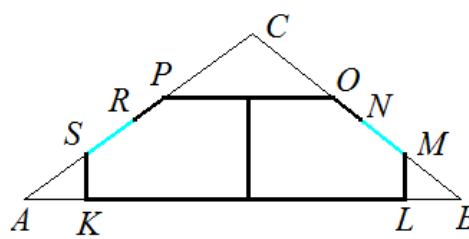
Řešení. Výškou CQ rozdělíme trojúhelník ABC na dva trojúhelníky se společnou odvěsnou CQ . Tím je úloha převedena na již vyřešenou úlohu 34 (sestrojení pravoúhelníků maximálního obsahu vepsaných do shodných pravoúhlých trojúhelníků AQC a BQC podle obr. 66a).



Obr. 65



Obr. 66a



Obr. 66b

Závěr. Příčný řez podkrovní místnosti bude mít maximální obsah 15 m^2 při šířce 6 m a výšce 2,5 m.

Poznamenejme, že v praxi je výhodnější řešit využití podkroví spíše podle obr. 66b ve formě dvou místností se zkoseným stropem a střešním oknem. Pro dané zadání je při výšce dolního okraje okna 1,2 m délka KL větší než 9 m. To znamená efektivnější využití prostoru. Obytná plocha se zvýší o více než 50 %, střešní okna propustí více světla a místnosti nebudou mít tvar obyčejných kvádrů. Bydlení v takovém prostředí bude zdravější a poskytne uživateli zajímavější možnosti estetické úpravy interiéru. To však nesnižuje užitečnost uplatnění výsledku naší úlohy jinde.

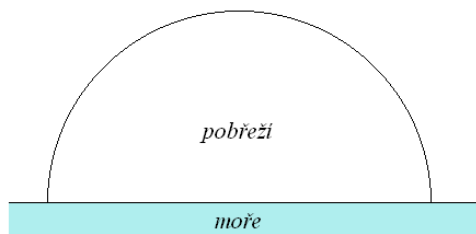
V úloze 34 jsme se omezili na pravoúhlý trojúhelník. Zajímavé je, že obecnější problém uměl řešit již Euklides, jak víme z 27. věty šesté knihy jeho Základů. Než se s jeho tvrzením seznámíme, poopravíme nepřesnosti, které se kolem 27. věty občas uvádí.

Doslovný překlad věty 27/VI Euklidových Základů je dnešnímu čtenáři poměrně nesrozumitelný. Snad proto Dirk Struik ve svých Dějinách matematiky napsal: "Zvláště zajímavá je 27. věta šesté knihy, která obsahuje i s důkazem první v historii matematiky známý maximální problém, že čtverec má největší obsah ze všech obdélníků daného obvodu."

Citovaná věta je poněkud nešťastně zformulovaná,² proto k ní dodáváme:

1. Tvrzení, že čtverec má největší obsah ze všech pravoúhelníků daného obvodu se v Základech neuvádí. Lze je z věty 27/VI vyvodit jako důsledek.

2. Prvním v historii známým maximálním problémem je tzv. Didonina úloha známá z pověsti o vzniku Kartága, která však nebyla ve starověku dokázána. Podle pověsti založila město Kartágo královna Didó (= Elissa příp. Elissar), která utekla z Tyru³ poté, co byl její manžel zavražděn během pokusu jejího mladšího bratra o posílení své vlastní moci. Princezna doplula k zálivu na pobřeží severní Afriky a chtěla tam založit osadu. Proto požádala místního náčelníka, aby jí část pobřeží prodal. Vychytralý vládce odpověděl, že za nabízené šperky jí prodá jen takový kus půdy, který dokáže ohraničit kůží z vola. Princezna souhlasila, kůži rozřezala na tenké řemínky, z nich pak svazováním vytvořila dlouhý řemínek a ohraničila jím při pobřeží půlkruh (viz obr. 67). To byl (podle jejích představ, resp. podle představ autorů pověsti) útvar o největším obsahu ohraničený přímkou a křivkou (půlkružnicí) dané délky. Na zakoupeném pozemku postavila osadu, která byla nazvána Kartágo. Poznamenejme, že úlohy, v nichž hledáme útvar daného obvodu a maximálního obsahu, se nazývají **izoperimetrické úlohy** (perimetr = obvod).



Obr. 67

Věta 5 nás seznámí s obsahem tvrzení 27/VI Základů. Uvedeme i Euklidův důkaz věty, který je postaven na lemmatu často využívaném v řecké geometrické algebře:

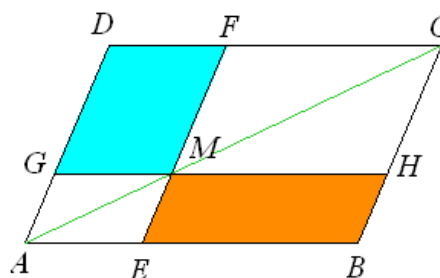
Lemma 1. Jestliže M je libovolný vnitřní bod úhlopříčky rovnoběžníka $ABCD$, pak přímky, které jsou vedeny bodem M rovnoběžně se stranami rovnoběžníka, z něj odřezávají dva rovnoběžníky o téže obsahu (obr. 68).

Důkaz. Použijeme označení podle obr. 68. Úhlopříčka rozděluje rovnoběžník na dva trojúhelníky téhož obsahu, to znamená že lze položit

$$S_1 = S_{ACD} = S_{ACB}, \quad S_2 = S_{AMG} = S_{AME} \quad \text{a} \quad S_3 = S_{MCF} = S_{MCH}.$$

Rovnoběžníky $GMFD$ a $EBHM$ tedy mají stejný obsah

$$S = S_1 - (S_2 + S_3). \quad \square$$



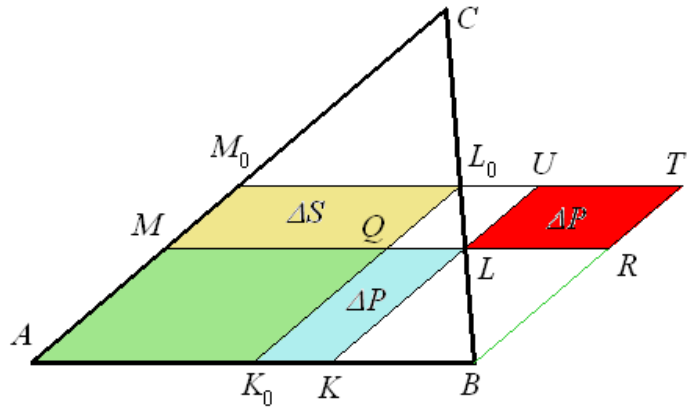
Obr. 68

² Přitom pomíjíme okolnost, že čtverec nepatří mezi obdélníky.

³ Féničky Tyr nebo Týros, latinsky Tyros. Bylo to významné obchodní město-stát, součást Fénicie, volného sdružení měst, které se rozkládalo na jihozápadním pobřeží Středozemního moře (dnešní Libanon).

Věta 5. (Upravená formulace věty 27/VI Základů.) Ze všech rovnoběžníků $AKLM$ vepsaných do daného trojúhelníka ABC tak, že body K, L, M leží po řadě na stranách AB, BC, CA má největší obsah ten, jehož vrchol L je umístěn ve středu L_0 úsečky BC .

Důkaz. Necht' je trojúhelníku ABC vepsán rovnoběžník $AKLM$, jehož vrchol L leží uvnitř úsečky BL_0 (obr. 69). Do obrázku ještě doplníme rovnoběžníky $AK_0L_0M_0$ a K_0BTL_0 , kde T je obrazem bodu L_0 v posunutí o vektor M_0L_0 . Přímkami ML a KL ohraničují podle lemmatu 1 v rovnoběžníku K_0BTL_0 při vrcholech T a K_0 rovnoběžníky $LRTU$ a K_0KLQ téhož obsahu ΔP . Označme ΔS obsah rovnoběžníku MQL_0M_0 . Pak platí $\Delta S = S_{MQL_0M_0} = S_{QRTL_0} > \Delta P$ a $S_{AKLM} = S_{AK_0L_0M_0} - \Delta S + \Delta P < S_{AK_0L_0M_0}$. Důkaz vztahu $S_{AKLM} < S_{AK_0L_0M_0}$ pro situace, kdy se bod L nachází uvnitř úsečky L_0C , je analogický. Ponecháváme jej čtenáři. \square



Obr. 69

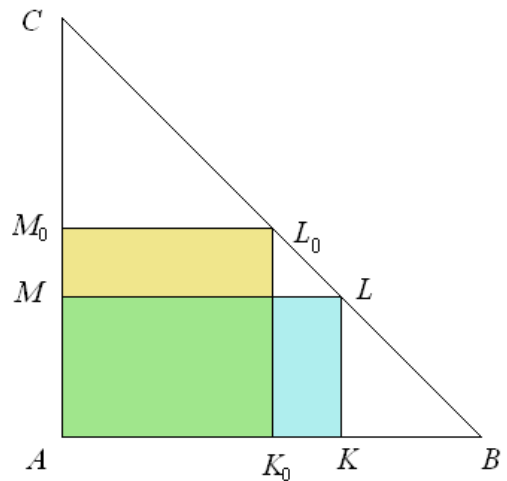
Věta 6. Největší obsah ze všech pravoúhelníků daného obvodu má čtverec.

Důkaz. Aplikujme větu 5 na rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC . Vepsaný rovnoběžník $AKLM$ je pro každý bod L zvolený uvnitř strany BC pravoúhelník, s obvodem rovným obvodu čtverce $AK_0L_0M_0$. (Ověřte pomocí obr. 70.) Podle věty 5 má tedy čtverec největší obsah ze všech pravoúhelníků téhož obvodu. \square

Poznámka. Čtenář si zajisté uvědomil, že i závěr úlohy 34 je důsledkem věty 5.

Izoperimetrickou úlohou obecně rozumíme úkol **nalézt mezi všemi rovinnými útvary se stejným obvodem ten, jež má největší obsah**. Již ve starověku vznikla domněnka, že tímto útvarem je **kruh**.

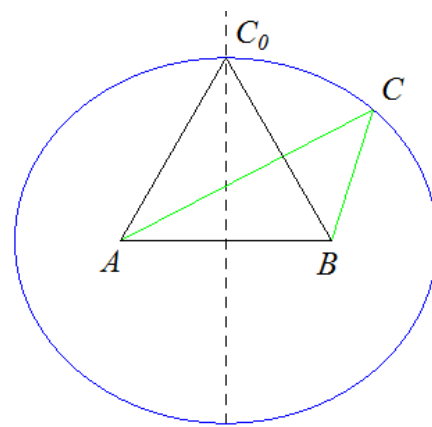
Přesný důkaz však byl podán až v devatenáctém století. Pokud přidáme k obecné izoperimetrické úloze omezující podmínky, dostáváme její speciální varianty. Takovou úlohou je například Didonova úloha, nebo úloha, jejíž řešení vyslovuje věta 6. V úlohách 36 a 37 vyřešíme dva izoperimetrické problémy pro trojúhelníky. S problematikou čtyřúhelníků se seznámíme ve cvičení.



Obr. 70

Úloha 36. Mezi všemi trojúhelníky ABC , které mají pevně zvolenou délku c strany AB a stejný součet m délek stran BC a AC nalezněte ten, který má největší obsah.

Řešení. Úloha má řešení za podmínky $0 < c < m$ (trojúhelníková nerovnost). Předpokládejme, že je úsečka AB v dané rovině pevně umístěna. Vrcholy C všech trojúhelníků ABC , pro něž platí $|BC| + |AC| = m$, leží na elipse s ohnisky A, B a hlavní poloosou $m/2$. Největší obsah má trojúhelník s největší výškou v_c , tedy trojúhelník ABC_0 , kde C_0 je vedlejší vrchol elipsy (obr. 71).



Obr. 71

Závěr. Ze všech trojúhelníků ABC , které mají pevně zvolenou délku c strany AB a stejný součet m délek stran BC a AC , má (pro $c < m$) největší obsah rovnoramenný trojúhelník s rameny BC a AC délky $m/2$.

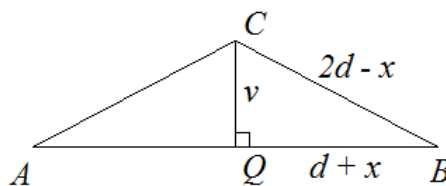
Další úlohu lze jednoduše vyřešit využitím A-G nerovnosti (viz druhé řešení úlohy 37). Neznám řešení, které by bylo zřejmé přímo z obrázku, omezíme se tedy na dva početní postupy.

Úloha 37. Mezi všemi trojúhelníky téhož obvodu $2s$ nalezněte ten, který má největší obsah.

První řešení úlohy 37. Rovnostranný trojúhelník s obvodem $2s = 6d$ má délku strany $2d$, výšku $d\sqrt{3}$ a obsah $d^2\sqrt{3}$. Ukážeme, že každý jiný trojúhelník s obvodem $2s$ má obsah menší.

Z úlohy 36 víme, že každý nerovnoramenný trojúhelník lze nahradit rovnoramenným trojúhelníkem s větším obsahem a stejným obvodem. Proto stačí ukázat, že mezi všemi rovnoramennými trojúhelníky stejného obvodu má největší obsah trojúhelník rovnostranný.

1. Má-li rovnoramenný trojúhelník ABC s obvodem $6d$ základnu AB délky $2(d+x)$, kde $0 < x < d/2$, pak $|AC| = |BC| = 2d - x$ a pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník QBC (obr. 72a) zjistíme



Obr. 72a

$$v = |CQ| = \sqrt{(2d-x)^2 - (d+x)^2} = \sqrt{3d(d-2x)}$$

a

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = (d+x)\sqrt{3d(d-2x)} = \sqrt{3d(d^3 - x^2(3d+2x))} < d^2\sqrt{3},$$

neboť $0 < x^2(3d+2x) < d^3$.

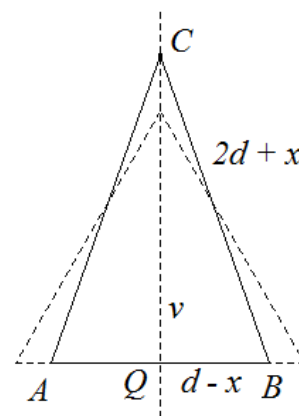
2. Má-li rovnoramenný trojúhelník ABC s obvodem $6d$ základnu AB délky $2(d-x)$, kde $0 < x < d$, pak $|AC| = |BC| = 2d+x$ a pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník QBC (obr. 72b) zjistíme

$$v = |CQ| = \sqrt{(2d+x)^2 - (d-x)^2} = \sqrt{3d(d+2x)}$$

a

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = (d-x)\sqrt{3d(d+2x)} = \sqrt{3d(d^3 - x^2(3d-2x))} < d^2\sqrt{3},$$

neboť $0 < x^2(3d-2x) < d^3$.



Obr. 72b

Závěr. Ze všech trojúhelníků stejného obvodu má největší obsah rovnostranný trojúhelník.

Druhé řešení úlohy 37 využívá větu o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Uvedeme jen její znění. Důkaz nerovnosti nalezne čtenář v diplomové práci Evy Řezníčkové: *Elementární metody řešení extrémálních úloh* (ke stažení na [a]).

Věta 7 (A-G nerovnost). Pro libovolně zvolená nezáporná čísla x_1, x_2, \dots, x_n platí

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává, právě když platí $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Výraz $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ se nazývá geometrický průměr z čísel x_1, x_2, \dots, x_n

a výraz $A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ se nazývá aritmetický průměr z čísel x_1, x_2, \dots, x_n .

Druhé řešení úlohy 37. Libovolný trojúhelník s obvodem $2s$ a stranami délek a, b, c má podle Heronova vzorce obsah

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (10)$$

Výrazy $s-a, s-b$ a $s-c$ jsou kladné, proto podle věty 7 platí

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3},$$

neboli

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}. \quad (11)$$

Přitom rovnost platí, právě když $a = b = c = \frac{s}{3}$. Po dosazení (11) do (10) zjistíme, že troj-

úhelník s obvodem $2s$ má největší možný obsah $S_{\max} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$ a to právě tehdy, když je rovnostranný.

Základní elementární metody řešení extrémálních úloh

Pro úlohy z odstavce 3.1 je typické, že na množině M útvarů U , které splňují dané podmínky, hledáme útvar U_0 s největší hodnotou v_0 dané veličiny v .

Lze užít některý z těchto postupů:

1. Vyčerpávající metoda. Na základě experimentování nebo využitím symetrie apod. vytipujeme U_0 . Potom ukážeme, že pro všechny $U \in M$ a $U \neq U_0$ je $v < v_0$.

2. Využití odhadu. Pomocí některé ze známých nerovností odhadneme, že pro libovolný útvar $U \in M$ platí $v \leq v_0$, a uvedeme příklad útvaru U_0 , který má $v = v_0$.

3. Postupné přibližování k extrému. Z množiny M postupně vylučujeme ty útvary, které mají $v < v_0$, až nakonec zbydou jen útvary s maximální hodnotou v_0 dané veličiny.

(Viz úlohy CKU_35 - 39.)

Analogicky postupujeme při hledání minima (promyslete jak.)

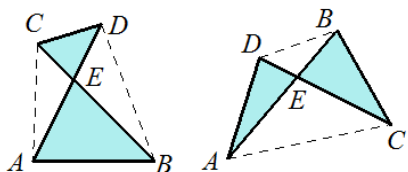
Cvičení

CKU_34. Vyřešte úlohu 36 metodou druhého řešení z úlohy 37 (tzn. pomocí A-G nerovnosti).

CKU_35. a) Dokažte, že ze všech rovnoběžníků, které mají stejný obvod a shodný ostrý vnitřní úhel, má největší obsah kosočtverec.

b) Dokažte, že ze všech rovnoběžníků $ABCD$, které mají $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ má největší obsah čtverec.

CKU_36. Dokažte, že ke každému zkříženému čtyřúhelníku (viz obr. 73) lze nalézt nezkřížený čtyřúhelník s větším obsahem a stejným obvodem.



Ve zkříženém čtyřúhelníku $ABCD$ se v bodě E protínají buď strany BC a AD nebo strany AB a CD . Úhlopříčky AC a BD leží vně čtyřúhelníka. Obsah čtyřúhelníka $ABCD$ je roven součtu obsahů vybarvených trojúhelníků.

Obr. 73

CKU_37. Dokažte, že ke každému nekonvexnímu čtyřúhelníku lze nalézt konvexní čtyřúhelník s větším obsahem a stejným obvodem.

CKU_38. Dokažte, že ke každému konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$, který není souměrný podle osy úhlopříčky AC , lze nalézt čtyřúhelník $KLMN$, který má větší obsah, stejný obvod a úhlopříčku KM délky $|KM| = |AC|$. (Využijte závěr z úlohy 36.)

CKU_39. Dokažte, že ze všech čtyřúhelníků téhož obvodu má největší obsah čtverec. (Využijte výsledky úloh CKU_35-38.)

CKU_40. V rovině je dán pravoúhelník $ABCD$, $|AB| = a$, $|BC| = b$. Bodem B ved'te přímku p tak, aby obsah trojúhelníka ohraničeného přímkami p , DC a DA byl minimální.

3.2 Osová souměrnost - aplikace

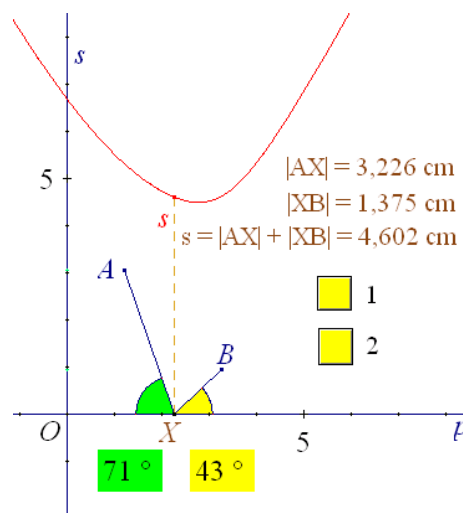
3.2.1 Heronova úloha

Budeme se zabývat úlohou, kterou využil Heron alexandrijský k odvození zákona odrazu světla na rovinném zrcadle nebo vodní hladině. V publikacích rekreační matematiky bývá formulována takto:

Úloha 38. Jezdec, který se nachází na planině v místě A , má namířeno do místa B (obr. 75). Nejdříve však musí napojit koně někde u řeky, kterou na obrázku představuje přímka p . Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby trajektorie z A do X a pak z X do B měla minimální délku.

Úloha 38 bývá i s řešením uváděna ve středoškolských učebnicích. Pokud ji neznáte, pokuste se ji samostatně vyřešit. Prospěšný vám k tomu může být soubor KU_38A z přílohy 1. Snímek obrazovky při práci se souborem představuje obr. 74. Body A , B a X lze přemísťovat a pozorovat, jak se přitom mění hodnoty $|AX|$, $|XB|$, $s = |AX| + |XB|$ a velikosti vyznačených úhlů.

Tlačítko 1 zobrazuje a skrývá čárkovanou úsečku délky s . Jestliže pro její horní koncový bod zvolíme *Stopano*, a bod X rozpoohybujeme, vykreslí se křivka závislosti dráhy s na poloze bodu X . Tuto závislost lze též zobrazit tlačítkem 2.



Obr. 74

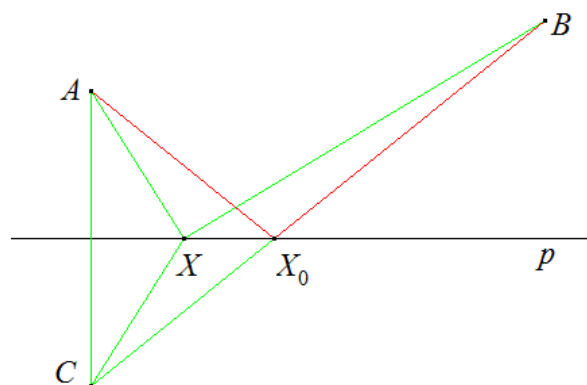
Řešení úlohy 38. Označme C obraz bodu A v souměrnosti podle přímky p (obr. 75). Libovolně zvolený bod $X \in p$ je v souměrnosti podle p samodružný, platí

$$|AX| = |CX| \text{ a } s = |AX| + |XB| = |CX| + |XB| \geq |CB|,$$

neboť délky $|CX|$, $|XB|$ a $|CB|$ splňují trojúhelníkovou nerovnost. Dráha s je nejkratší jen pro $X = X_0$, kde X_0 je průsečík úsečky BC s přímkou p .

Konstrukce:

1. $C = S_p(A)$.
2. $X_0 \in \leftrightarrow BC \cap p$.



Obr. 75

Bod X_0 lze zřejmě sestavit i jako průsečík přímky p a úsečky AD , kde $D = S_p(B)$ (obr. 76).

Z konstrukce plyne, že trojúhelníky ACX_0 a BDX_0 jsou rovnoramenné. Jsou-li P a Q středy jejich základů AC a BD , pak platí

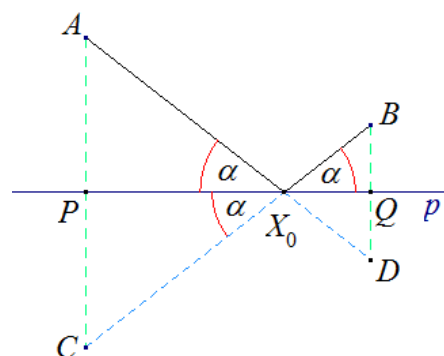
$$|\angle AX_0P| = |\angle PX_0C| = |\angle BX_0Q| = |\angle QX_0D|,$$

neboť úhly $\angle PX_0C$ a $\angle QX_0B$ jsou vrcholové.

Zjistili jsme, že pro bod $X \in p$ který má minimální součet $|AX| + |XB|$, svírají přímky AX a BX stejně velké úhly s přímkou p .

Obráceně: Jestliže pro nějaký bod $X \in p$ svírají navzájem různé přímky AX a BX s přímkou p stejné úhly, pak přímka BX protne kolmici z bodu A na přímkou p v bodě $C = S_p(A)$ a tedy $X = X_0$.

Poznátky shrneme do věty:

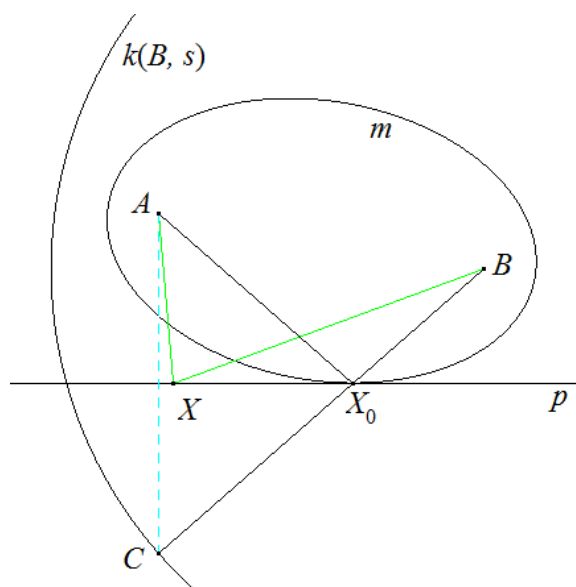


Obr. 76

Věta 8. K libovolným vnitřním bodům A, B ($A \neq B$) poloroviny existuje na její hraniční přímce p právě jeden bod X_0 , pro nějž jsou přímky AX_0 a BX_0 různé a svírají s přímkou p stejně velké úhly. Bod X_0 má jako jediný ze všech bodů $X \in p$ minimální hodnotu výrazu $s = |AX| + |XB|$ a je společným průsečíkem přímek $p, S_p(A)B$ a $AS_p(B)$.

Dosud jsme měli pevně zvoleny body A, B a přímkou p . Zkusme problém pozměnit:

Představme si, že je pevně zvolena hodnota $s = |BC| = |AX_0| + |X_0B|$, kdežto poloha bodu C a v důsledku toho i přímky p je proměnná. Vzhledem k podmínce $s = \text{konst.}$ je množinou všech poloh bodů C kružnice $k(B, s)$ a množinou všech bodů X_0 je elipsa m s ohnisky A, B , pro jejíž hlavní poloosu a platí $2a = s$ (obr. 77). Z předchozího víme, že každý bod $X \neq X_0$ přímky p splňuje vztah $|AX| + |XB| > |AX_0| + |X_0B|$, a tak leží ve vnější oblasti elipsy m . Přímka p má s elipsou m společný pouze bod X_0 . Je tečnou elipsy v bodě X_0 .

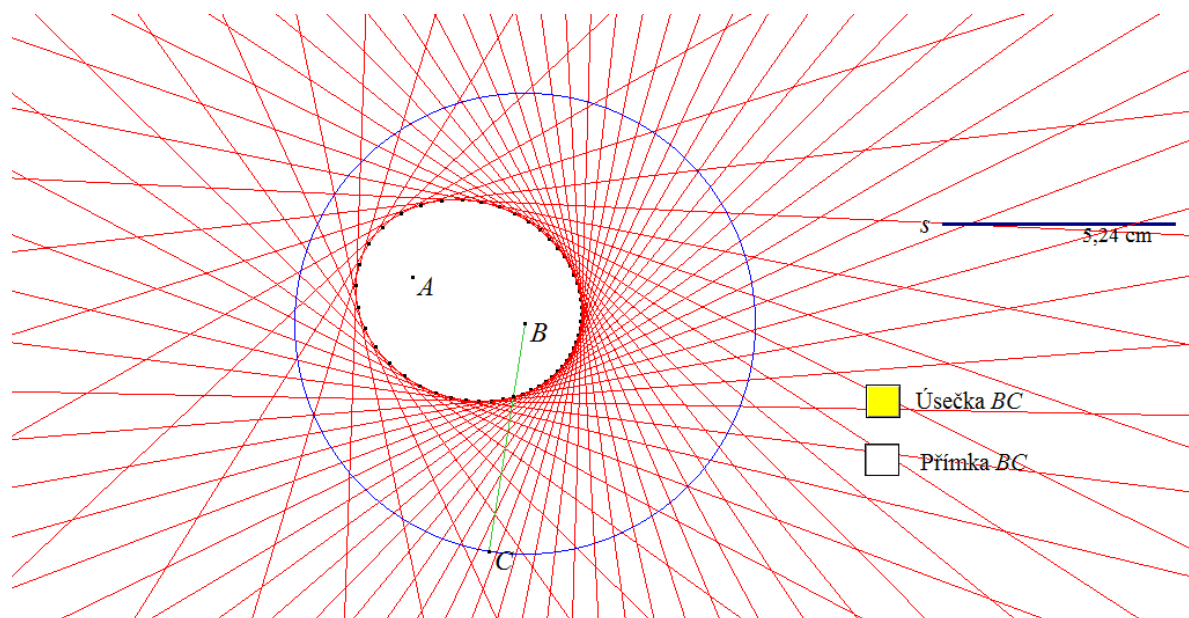


Obr. 77

Cílem této úvahy bylo ukázat souvislost He-

ronovy úlohy se známým poznatkem, že **tečna elipsy pólů vnější úhly průvodičů dotykového bodu**. (Důsledkem faktu, že přímky AX_0 a BX_0 jsou osově souměrné podle p .) Navíc odtud plyne, že při pohybu bodu C po kružnici k obalují osy p úseček AC elipsu

s ohnisky A , B a hlavní poloosou $a = s/2$. Názornou pomůckou pro demonstraci tohoto poznatku je soubor KU_39 ELIPSA_H. Po otevření tohoto souboru označte myší při nabídce *Stopa ano/ne* přímku p , resp. její (neoznačený) průsečík s úsečkou AC . Pak pomocí nabídky *Pohyb objektu* rozpohybujte bod C . Výsledek je znázorněn na obr. 78. Poznamenejme ještě, že tlačítka skrývání umožňují nahradit úsečku BC přímkou BC a naopak, což se nám bude hodit při řešení úloh CKU_45 a CKU_46.

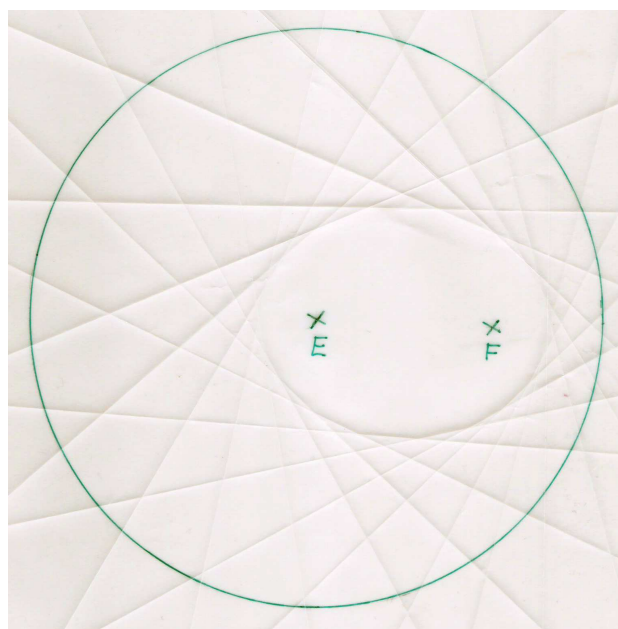


Obr. 78

Jiné vymodelování získáme i bez počítače přehýbáním papíru:

Na list průsvitného papíru sestrojíme kružnici $k(E, s = 2a)$ a v její vnitřní oblasti bod F . Papír postupně přehýbáme tak, aby část kružnice na přehnuté straně listu procházela bodem F .

Přehyby obalují elipsu s ohnisky E , F a hlavní poloosou a (obr. 79).



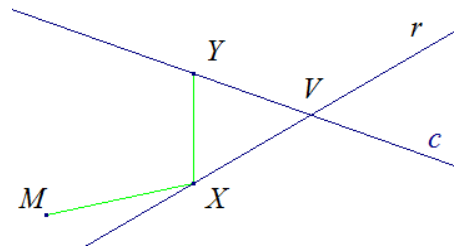
Obr. 79

Při řešení matematických úloh často pracujeme s množinou M určitých veličin, nazýváme je **parametry**, z nichž některé považujeme za dané **konstanty** (tzv. *zafixované parametry*) a jiné za **proměnné**, jejichž hodnoty máme za určitých podmínek nalézt. Jednou z cest objevování nových poznatků je **změna fixace parametrů**: Na množině M zvolíme některé proměnné jako konstanty (zafixujeme je) a některé konstanty "uvolníme" - budeme je považovat za proměnné.

V následujícím cvičení lze při řešení úlohy CKU_41 využít soubory CKU_41_zadání.fig a CKU_41_řešení.fig. Náповědu k řešení úlohy CKU_42 naleznete v odstavci 3.2.2.

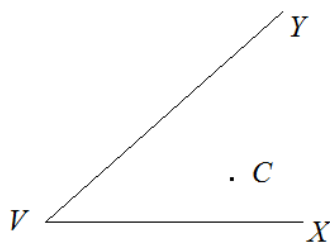
Cvičení

CKU_41. Tulák se nachází na louce v místě M (obr. 80). Přímka r znázorňuje řeku a přímka c silnici. Tulák chce jít do libovolného bodu $X \in r$ a po osvěžení u řeky do libovolného místa $Y \in c$. (Z místa Y pojedete autostopem.) Sestrojte body X a Y tak, aby jeho dráha $s = |MX| + |XY|$ byla minimální.

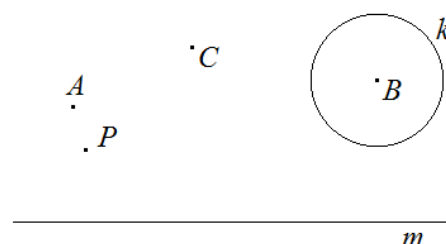


Obr. 80

CKU_42. Uvnitř konvexního úhlu XVY je dán bod C (obr. 81). Na ramenech VX a VY sestrojte body A a B tak, aby byl obvod trojúhelníka ABC minimální.



Obr. 81



Obr. 82

CKU_43. Puk se nachází na ledové ploše v místě P (obr. 82). Hokejista A jej má přihrát spoluhráči B odrazem přes mantinel m , aby puk nezachytil jejich soupeř C . Hokejista B může puk zachytit kdekoli v oblasti ohraničené kružnicí k . Sestrojte množinu všech možných trajektorií úspěšné přihrávky.

CKU_44. V rovině jsou dány body A, B uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p . Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby měl výraz $s = ||AX| - |XB||$ maximální hodnotu. (Řešení je obdobou postupu z úlohy 38).

CKU_45. V rovině je dána kružnice $k(B, s)$ a bod A vně kruhu ohraničeného kružnicí k . Dokažte, že osy p úseček AC , kde $C \in k$, obalují hyperbolu s ohnisky A, B a hlavní poloosou $a = s/2$.

CKU_46. S pomocí souboru KU_39 ELIPSA_H znázorněte množinu všech přímek p z úlohy CKU_45. Vytvořte též analogický model přehýbáním průsvitného papíru.

CKU_47. V rovině je dána přímka p a bod A , který na ní neleží. Dokažte, že osy p úseček AC , kde $C \in p$, obalují parabolu s ohniskem A a řídicí přímkou p .

CKU_48. V Cabri geometrii vymodelujte množinu všech přímek p z úlohy CKU_47. Vytvořte též analogický model přehýbáním průsvitného papíru.

3.2.2 Fagnanova úloha

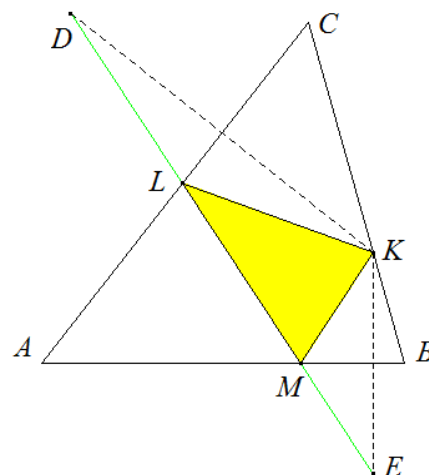
byla předložena I. F. Fagnanem roku 1775: Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do daného ostroúhlého trojúhelníka máme sestrojít ten, který má minimální obvod. Povšimněte si, že při jejím řešení použijeme metodu fixace parametrů. Fixací jednoho z vrcholů hledaného trojúhelníka dostaneme úlohu 39, kterou fixací dalšího vrcholu převedeme na dvě úlohy Heronovy.

Úloha 39. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod K uvnitř strany BC . Na stranách CA a AB sestrojíte po řadě body L a M tak, aby byl obvod trojúhelníka KLM minimální.

Rozbor. Předpokládejme, že vrchol M již byl nalezen (obr. 83). Sestrojit poslední vrchol L pak umíme, neboť jde o úlohu Heronovu: Na přímce AC nalézt bod L tak, aby byl součet $|KL| + |LM|$ minimální. Je-li D obraz bodu K v symetrii podle přímky AC , tzn. $D = S_{\leftrightarrow AC}(K)$, pak L je průsečík úseček DM a AC .

Sestrojení bodu D se obejde bez znalosti polohy bodu M . Dokonce určuje jeho nalezení, neboť dostáváme další Heronovu úlohu: Jsou dány body D, K a na přímce AB máme nalézt bod M tak, aby byl součet $|DM| + |MK|$ minimální. Bod M je tedy průsečík úseček AB a DE , kde $E = S_{\leftrightarrow AB}(K)$. (Lze též sestrojít bod $F = S_{\leftrightarrow AB}(D)$ a nalézt M jako průsečík úseček AB a KF .)

Konstrukce byla popsána v rozboru. Úloha má pro ostroúhlý trojúhelník ABC jediné řešení.

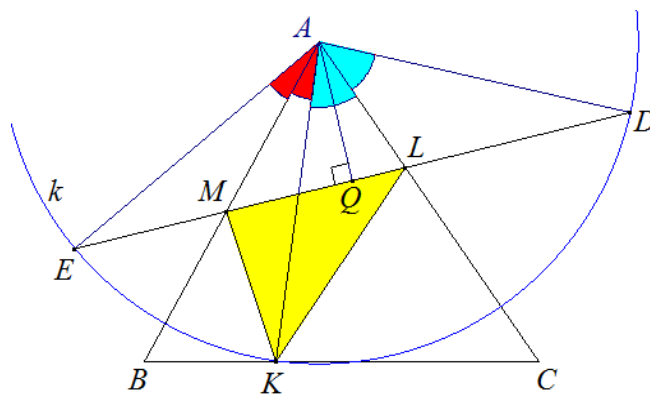


Obr. 83

Úloha 40 (Fagnanova úloha). Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Na stranách BC, CA a AB sestrojíte po řadě body K, L a M tak, aby měl trojúhelník KLM minimální obvod.

Řešení. Pro bod K zvolený na úsečce BC umíme sestrojít trojúhelník KLM minimálního obvodu m (úloha 39). Pro různé polohy bodu K dostáváme různé hodnoty m , mezi nimi hledáme minimum.

Z obr. 84 je zřejmé, že trojúhelník AED je rovnoramenný se základnou DE , jejíž délka je rovna obvodu m trojúhelníka



Obr. 84

KLM . Navíc platí $|\angle DAE| = 2\alpha$, kde $\alpha = |\angle BAC|$. Osa úhlu EAD rozděluje trojúhelník AED na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ADQ a AEQ . Ze vztahů $|EQ| = |AE| \cdot \sin \alpha$, $|AE| = |AK|$ a $2|EQ| = m$ zjistíme $m = 2|AK| \sin \alpha$. Odtud plyne, že m je minimální, právě když je úsečka AK minimální. To nastane, právě když je bod K patou výšky z vrcholu A , tedy $|AK|_{\min} = v_a$ a $m_{1\min} = 2v_a \sin \alpha$. Tento vztah zatím nelze vydávat za řešení úlohy. Provedením analogických úvah pro bod L a poté i pro bod M (nebo prostě cyklickou záměnou) dostaneme další dva vztahy $m_{2\min} = 2v_b \sin \beta$ a $m_{3\min} = 2v_c \sin \beta$. Řešením úlohy je nejmenší prvek množiny $\{m_{1\min}, m_{2\min}, m_{3\min}\}$. Který z nich to je? Naštěstí vedou všechny tři postupy k jedinému trojúhelníku, který má své vrcholy K, L a M v patách výšek trojúhelníka ABC . Trojúhelník KLM se nazývá **ortický trojúhelník**. Abychom ukázali, že tomu tak je, dokážeme nejprve platnost vztahu

$$v_a \sin \alpha = v_b \sin \beta = v_c \sin \alpha = \frac{S}{r},$$

kde S je obsah trojúhelníka ABC a r poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Vztahy plynou z rovností

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c$$

do nichž dosadíme $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$ a $c = 2r \sin \gamma$ (sinová věta). Tvrzení, že trojúhelník KLM , který má $m = m_{\min}$, je ortický, je důsledkem věty 1 (na str. 14):

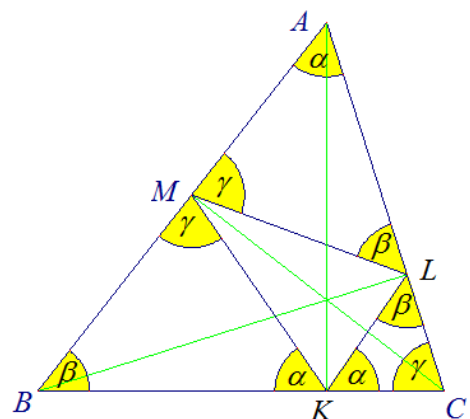
Reflexní vlastnost ortického trojúhelníka

Jsou-li K, L a M po řadě paty výšek z vrcholů A, B a C ostroúhlého trojúhelníka ABC , pak platí (obr. 85):

$$|\angle BKM| = |\angle CKL| = \alpha,$$

$$|\angle CLK| = |\angle ALM| = \beta,$$

$$|\angle AML| = |\angle BMK| = \gamma.$$



Obr. 85

Závěr. Ze všech trojúhelníků vepsaných do daného ostroúhlého trojúhelníka ABC má nejmenší obvod

$$m_{\min} = \frac{2S}{r}$$

trojúhelník ortický (to znamená ten, jehož vrcholy jsou paty výšek trojúhelníka ABC).

Reflexní vlastnost ortického trojúhelníka lze také odvodit jinak: Pokud řešení Fagnanovy úlohy existuje, pak z konstrukce bodů K, L, M podle obr. 84 a věty 8 plyne

$$|\angle BKM| = |\angle CKL|, \quad |\angle CLK| = |\angle ALM| \quad \text{a} \quad |\angle AML| = |\angle BMK|.$$

Při označení podle obr. 86 pro trojúhelníky AML, BKM a CLK dostáváme

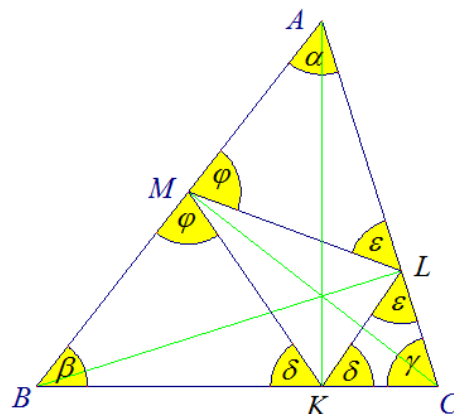
$$\alpha + \varphi + \varepsilon = 180^\circ,$$

$$\beta + \delta + \varphi = 180^\circ$$

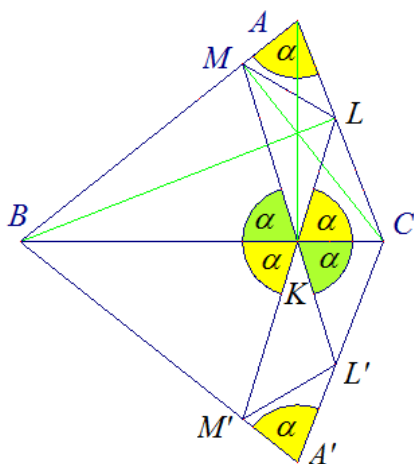
a

$$\gamma + \varepsilon + \delta = 180^\circ.$$

Vyřešením této soustavy tří rovnic dostaneme $\delta = \alpha$, $\varepsilon = \beta$ a $\varphi = \gamma$. Z důkazu věty 1 zjistíme, že platí i její obrácení, a tak je trojúhelník KLM ortický.

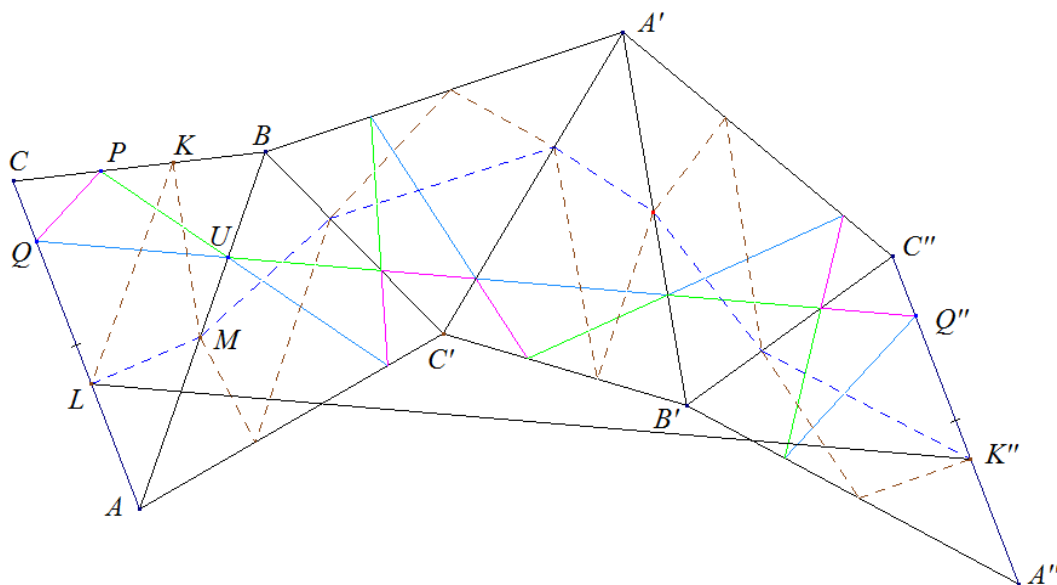


Obr. 86



Obr. 87

V důsledku reflexní vlastnosti ortického trojúhelníka se (při označení podle obr. 87) v osové souměrnosti podle přímky BC zobrazí jeho vrcholy L a M na body $L' = S_{\leftrightarrow BC}(L)$ a $M' = S_{\leftrightarrow BC}(M)$ tak, že L' leží na přímce KM a M' leží na přímce KL . Analogická tvrzení platí pro souměrnosti podle přímek AB a CA . Tyto vlastnosti užil H. A. Schwarz (1843-1921) k elegantnímu řešení úlohy 40. Po opakovaném užití osové souměrnosti vznikl útvar na obr. 88, z něž je řešení zřejmé (promyslete). Nutno upozornit, že na obr. 88 je ortický trojúhelník označen PQU , kdežto KLM je jiný trojúhelník vepsaný základnímu trojúhelníku ABC .)



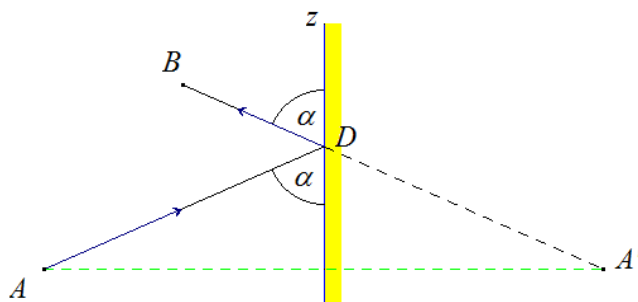
Obr. 88

3.2.3 Rovinná zrcadla

Světlo se na lesklém rozhraní dvou prostředí odráží tak, že odražený paprsek zůstává v rovině dopadu⁴ a svírá s normálou stejně velký úhel jako paprsek dopadající. Zmíněné úhly se nazývají **úhel odrazu** a **úhel dopadu**. Úhly se měří od normály, protože rozhraní nemusí být rovinné. Je-li rovinné, svírají oba paprsky s rovinou rozhraní rovněž shodné úhly.

Zákon odrazu byl znám již ve starověku. Heron alexandrijský jej zdůvodnil na základě hypotézy - tzv. **principu nejkratší dráhy**: **Má-li se světelný paprsek dostat z místa A do místa B, volí vždy cestu, nejkratší délky.**⁵

Z obr. 89 je zřejmé, že konstrukce chodu paprsku z bodu A do bodu B přes odraz na rovinném zrcadle z je řešením Heronovy úlohy. Pozorovatel, jenž hledí do zrcadla

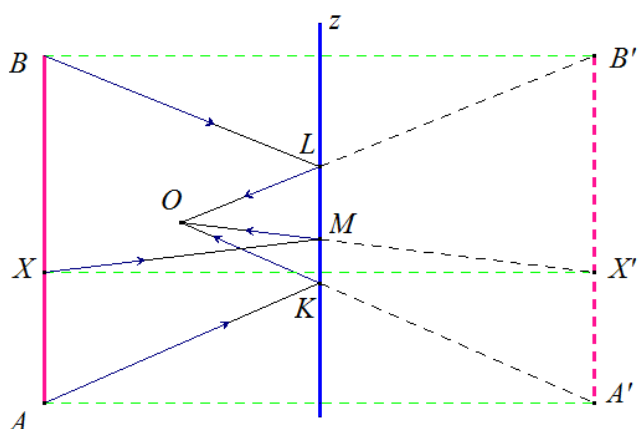


Obr. 89

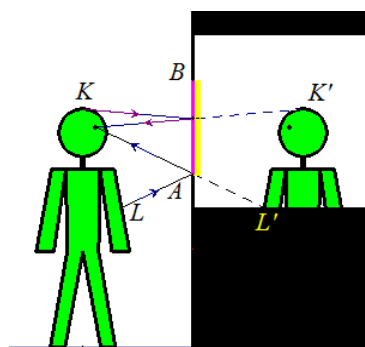
a má oko umístěné v bodě B, vidí místo bodu A jeho obraz A' ve směru odraženého paprsku. Kdybychom bod B (a s ním i oko pozorovatele) přemístili, poloha bodu A' zůstane stejná.

Rovinné zrcadlo vytváří zdánlivý obraz objektů, jež se nachází před zrcadlem, jako jejich obraz v souměrnosti podle roviny lesklého povrchu zrcadla. Pro jednoduchost většinou trojrozměrný prostor nahrazujeme rovinou a souměrnost podle odrazné roviny nahradíme souměrností podle přímky.

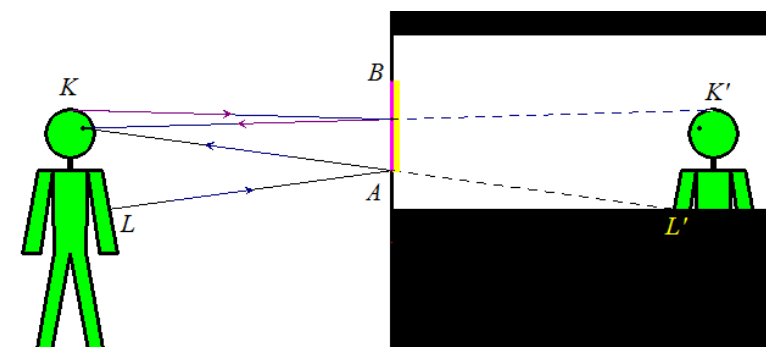
Na obr. 90 představuje úsečka A'B' obraz úsečky AB při zobrazení zrcadlem z. Lomené čáry AKO, BLO a XMO znázorňují chod paprsků z bodů A, B a X do oka O pozorovatele.



Obr. 90



Obr. 91



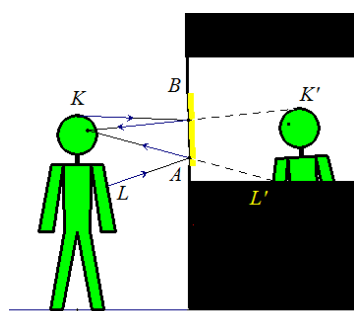
Obr. 92

⁴ Rovina dopadu je určena dopadajícím paprskem a normálou (kolmicí k rozhraní v místě dopadu paprsku).

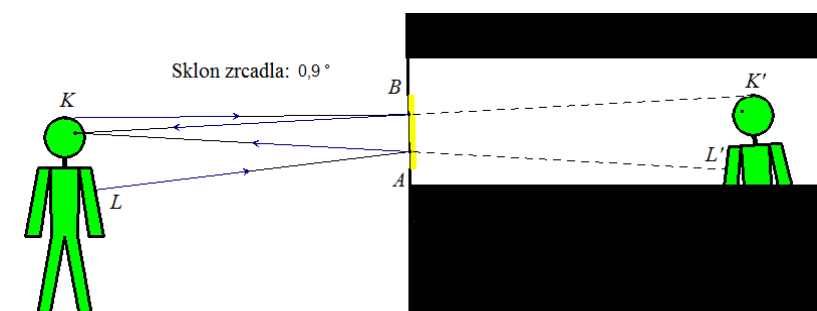
⁵ Princip nejkratší dráhy neumožňuje odvodit zákon lomu. Proto jej v 17. stol. P. Fermat nahradil principem nejkratšího času. Ve skutečnosti však platí princip extrémního času.

Obrázky 91 a 92 demonstrují skutečnost, že pozorovatel, který si prohlíží svůj obraz v zrcadle AB (zrcadlo je zvýrazněno červeně) svisle zavěšeném na stěně, vidí z různých vzdáleností od zrcadla stále stejnou část své postavy. Když jsem se jednou o tomhle jevu zmínil při výuce fyziky na gymnáziu, řekla mi jedna studentka, že to není pravda. Když se doma dívá zblízka do zrcadla, vidí jen svou hlavu a ramena. Když poodstoupí od zrcadla dále, vidí se prý až k pasu. V učebně viselo zrcadlo, tak jsme si to vyzkoušeli. Měla pravdu. Jak je to možné?

Fyzikální zákony platí, avšak zavěšená zrcadla nevisí svisle. Hřebíček, resp. skoba, na které je zrcadlo zavěšené, trčí ze zdi a způsobuje odklon zrcadla od svislého směru. Když se vzdalujeme od zrcadla, posunuje se (i při malém sklonu zrcadla) náš obraz nahoru (viz obr. 93 a 94). Velikost obrazu je stále rovna velikosti naší postavy. Jen ji z větší vzdálenosti vnímáme menší (stejně jako při pozorování skutečných předmětů).

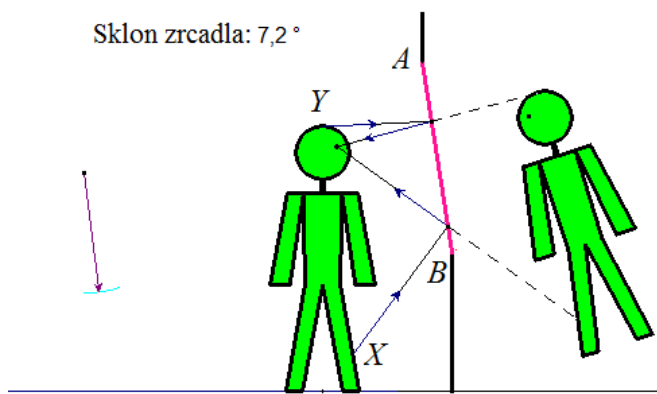


Obr. 93



Obr. 94

Doporučuji ověřit si popsany jev v praxi. K demonstraci na počítači může posloužit soubor R_01.fig z přílohy 1. Snímek obrazovky po jeho otevření vidíme na obr. 95. Velikost zrcadla nastavujeme úchopem za body A, B , polohu postavy před zrcadlem přesunujeme pomocí bodu C a sklon zrcadla nastavujeme koncovým bodem vektoru ovladače umístěného vlevo. Ovladač lze přemísťovat uchopením za počáteční bod vektoru. Trup a končetiny postavy jsou ohraničeny (nekonvexním) n -úhelníkem, po němž lze přemísťovat bod X . Stejně tak lze pohybovat bodem Y po kružnici, která ohraničuje hlavu postavy. Označení obrazů bodů X a Y si může uživatel do souboru doplnit, případně nepotřebná označení vymazat.



Obr. 95

Další zajímavou činností mohou být pokusy se dvěma zrcadly nakloněnými odraznými plochami k sobě. Obraz A_1 bodu A v prvním zrcadle se zobrazí do bodu A_2 druhým zrcadlem, první zrcadlo dále vytváří obraz A_3 bodu A_2 , atd. Někdy vzniká konečný počet obrazů, jindy ne. Otázkou je, jak závisí počet obrazů na úhlu, jež roviny zrcadel svírají.

Úloha 41. Dvě rovinná zrcadla jsou umístěna odraznými plochami k sobě a svírají úhel velikosti a) 90° , b) 60° , c) 40° . Kolik obrazů bodu X umístěného mezi nimi vznikne?

Řešení. a) Obrázek 96 znázorňuje situaci v rovině, která prochází bodem X kolmo na průsečnici rovin zrcadel. Odrazné plochy zrcadel nahrazujeme na obrázku přímkami p, q a optické obrazy bodu X sestrojujeme pomocí osových souměrností podle těchto přímek.

Bod X se zobrazí zrcadlem q do bodu X_1 . Bod X_1 se zobrazí zrcadlem p do bodu X_2 . Bod X_2 se zobrazí zrcadlem q do bodu X_3 , který se v souměrnosti podle p zobrazí do bodu X , neboť obrazec $X_1X_2X_3X$ pravouhelník.

Na obr. 97 je červeně vyznačen chod paprsků z bodu X do oka O pozorovatele, který se dívá na zdánlivé obrazy bodu X v zrcadle.

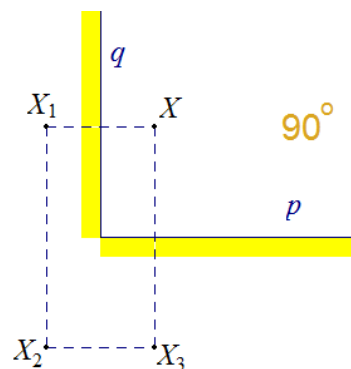
b) Při sklonu zrcadel 60° vznikne pět obrazů (obr. 98).

c) Při sklonu zrcadel 40° vznikne 17 obrazů (obr. 99).

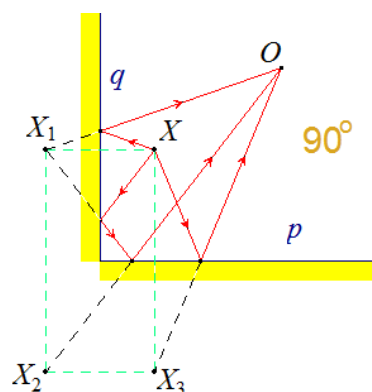
Poznámka. Pro situaci a) je zřejmé, že X, X_1, X_2 a X_3 jsou vrcholy pravouhelníka, a tedy $S_p(X_3) = X$. Výsledky úkolů b) a c) již tak zřejmé nejsou. Můžeme si nechat programem Cabri potvrdit, že v úkolu b) je $S_p(X_3) = X$ a pro situaci c) platí $S_p(X_{17}) = X$. Tato potvrzení však nejsou korektní, neboť

je Cabri ověřuje numericky s omezenou přesností 10^{-10} cm, jež

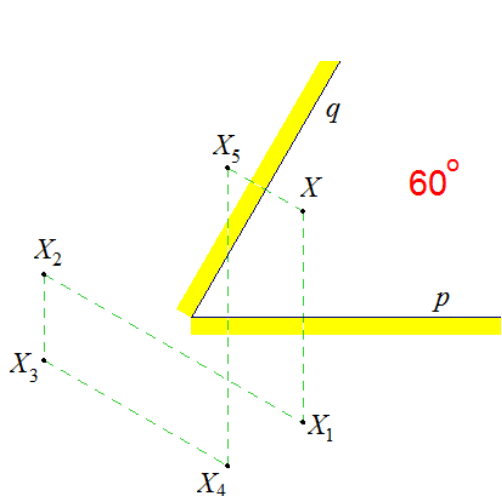
se na první pohled může zdát více než dostatečná. Matematik však potřebuje mít jistotu, že to opravdu nejsou dva různé body (vzdálené např. 10^{-900} cm od sebe). Abychom tuto jistotu získali, potřebujeme vědět, jak se skládají osové souměrnosti. Uvedeme jen to nejnütnější. K podrobnějšímu seznámení s problematikou skládání lze doporučit publikace [9] a [10].



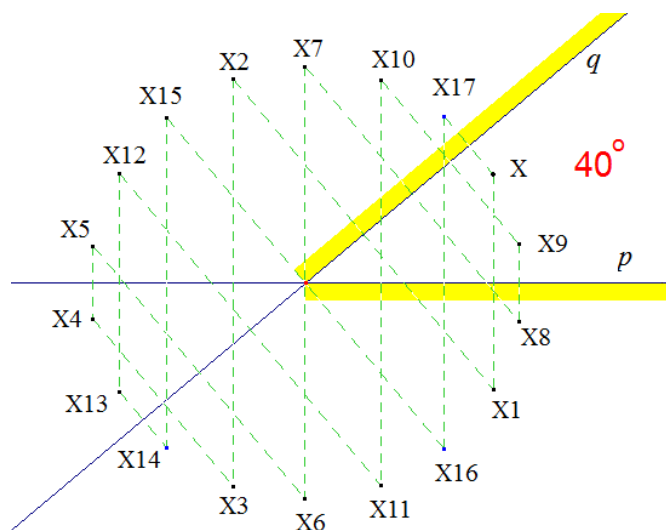
Obr. 96



Obr. 97

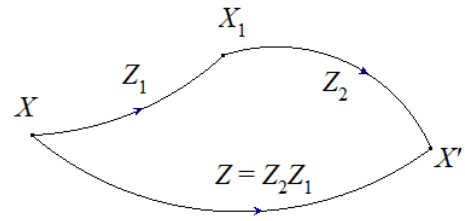


Obr. 98



Obr. 99

Jsou-li Z_1 a Z_2 dvě shodná zobrazení v rovině taková, že pro libovolný bod X roviny je $Z_1(X) = X_1$ a $Z_2(X_1) = X'$, pak složením zobrazení Z_1 a Z_2 (v uvedeném pořadí) rozumíme zobrazení Z , pro něž platí $Z(X) = X'$ (obr. 100). Zapisujeme $Z = Z_2Z_1$, resp. $Z = Z_2 \cdot Z_1$. Povšimněte si, že pořadí, v jakém zobrazení Z_1 a Z_2 skládáme, je v zápisu opačné než jejich pořadí v zápisu $Z = Z_2Z_1$. Je totiž zvykem zapisovat $Z(X) = Z_2(Z_1(X)) = Z_2Z_1(X)$, z čehož logicky dostáváme $Z = Z_2Z_1$.



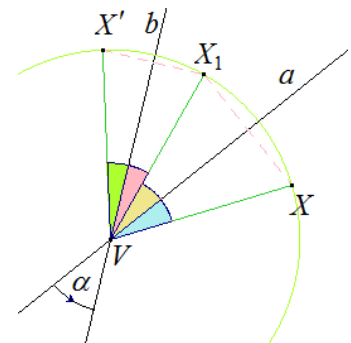
Obr. 100

Jsou-li a, b přímky, jež se protínají v bodě V , pak úhlem $\alpha(a, b)$ budeme rozumět úhel každé rotace se středem V , která zobrazí přímku a na přímku b .

Věta 9. Jestliže se osy a, b souměrností S_a, S_b protínají v bodě V , pak platí

$$S_b \cdot S_a = R_{V, 2\alpha(a,b)} \text{ a } S_a \cdot S_b = R_{V, 2\alpha(b,a)}.$$

Důkaz ponecháváme čtenáři. Nápopědu dává obr. 101. Promyslete různé možnosti rotací i vzájemné polohy os a, b a zobrazovaného bodu. Názorné prozkoumání umožňuje soubor KU_42a.fig. Kruhovým ovladačem nastavujeme velikost úhlu os a a pro různé polohy X sledujeme změny polohy obrazů X_1 a X' .

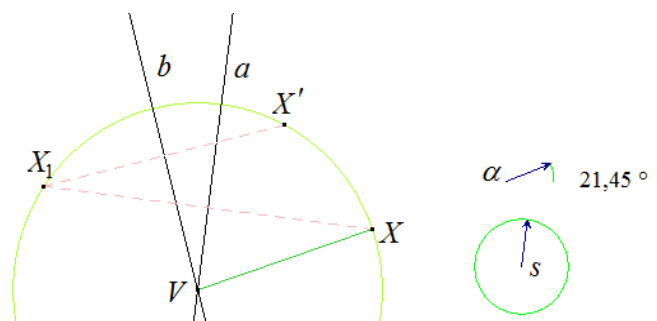


Obr. 101

Důsledek věty 9. Zobrazení $S_a \cdot S_b$ (resp. $S_b \cdot S_a$) se nezmění, jestliže osy a, b otočíme kolem jejich průsečíku o stejný úhel.

Důsledek názorně ověříme pomocí souboru KU_42b.fig, obr. 102 představuje kopii obrazovky po jeho otevření.

Ovladačem α nastavujeme velikost úhlu os a, b . Pomocí ovladače s otáčíme oběma osami. Poloha bodu X_1 se přitom mění. Bod X' zůstává na místě, pokud nepřemístíme X a neměníme α .



Obr. 102

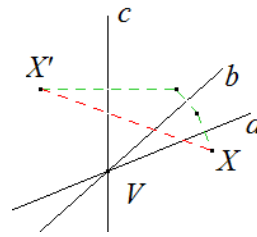
Věta 10. Jestliže se osy a, b, c souměrností S_a, S_b, S_c protínají v bodě V , pak platí $S_c \cdot (S_b \cdot S_a) = (S_c \cdot S_b) \cdot S_a = S_d$, kde $d = R_{V, \alpha(b,c)}(a)$.

Při důkazu věty 10 budeme vycházet z faktu, že skládání shodností je asociativní. (Ověřte si sami, že pro libovolné shodnosti Z_1, Z_2 a Z_3 platí $Z_3(Z_2Z_1) = (Z_3Z_2)Z_1$ nakreslením podobného schématu jako na obr. 100.)

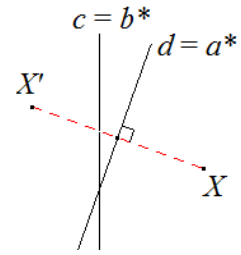
Důkaz věty 10. Označme $b^* = R_{V, \alpha(b,c)}(b) = c$,

$$\text{pak } S_c(S_b S_a) = S_c R_{V, 2\alpha(a,b)} = S_c(S_{c^*} S_{a^*}) = \\ = S_c(S_c S_d) = (S_c S_c) S_d = S_d, \text{ neboť zobrazení}$$

$S_c S_c$ je identita, tedy zobrazení I , které každý bod roviny zobrazí na sebe: $I(X) = X$. \square



Obr. 103a



Obr. 103b

Úloha 42. Dvě rovinná zrcadla jsou umístěna odraznými plochami k sobě a svírají úhel velikosti α . Kolik vznikne obrazů bodu X , který je umístěn mezi nimi?

Řešení. Úlohu budeme řešit v rovině, jež prochází bodem X a je kolmá na průsečnici rovin zrcadel, jež jsou v této rovině zastoupeny různoběžkami p, q s průsečíkem V a úhlem $\alpha(p, q) = \alpha$. Označme po řadě

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \dots \quad (12)$$

obrazy bodu X ve zobrazeních

$$S_p, S_q S_p, S_p S_q S_p, S_q S_p S_q S_p, S_p S_q S_p S_q S_p, \dots$$

Pomocí vět 9 a 10 lze tuto posloupnost složených zobrazení nahradit posloupností

$$S_p, R_{V, 2\alpha}, S_1, R_{V, 4\alpha}, S_2, \dots,$$

kde S_1, S_2, \dots jsou osové souměrnosti podle přímk $c_1 = R_{V, -\alpha}(p), c_2 = R_{V, -\alpha}(c_1), \dots$

Dále po řadě označme

$$X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5, \dots \quad (13)$$

obrazy bodu X ve zobrazeních

$$S_q, S_p S_q, S_q S_p S_q, S_p S_q S_p S_q, S_q S_p S_q S_p S_q, \dots$$

Pomocí vět 9 a 10 lze tuto posloupnost složených zobrazení nahradit posloupností

$$S_q, R_{V, -2\alpha}, S_{d_1}, R_{V, -4\alpha}, S_{d_2}, \dots,$$

kde S_{d_1}, S_{d_2}, \dots jsou osové souměrnosti podle přímk $d_1 = R_{V, \alpha}(q), d_2 = R_{V, \alpha}(d_1), \dots$

1. Situace, kdy bod X leží na některé z přímk c_1, c_2, \dots nebo některé z přímk d_1, d_2, \dots nebudeme obecně řešit. Uvedeme jen několik konkrétních příkladů ve cvičení.
2. Předpokládejme, že bod X neleží na žádné z přímk c_1, c_2, \dots ani na žádné z přímk d_1, d_2, \dots . Konečný počet jeho obrazů vznikne tehdy, když bude některý z bodů (12) nebo (13) totožný s bodem X . Nemůže to být bod s lichým indexem, protože pro lichá k je X_k , resp. X'_k obrazem bodu X v souměrnosti podle některé přímky c_i nebo d_i . Výsledné

zobrazení, které zobrazí bod X na sebe je tedy rotace se středem V o úhel jehož velikost je celistvým násobkem úhlu 2α . Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $\alpha > 0$. (Kdyby tomu tak nebylo, stačí zaměnit označení přímk p a q .) Dále již snadno ověříme:

Pokud existují nesoudělná přirozená čísla m a n , pro která platí $m \cdot 2\alpha = n \cdot 360^\circ$, vznikne $2m - 1$ obrazů bodu X . Pokud taková čísla neexistují, má bod X nekonečně mnoho obrazů.

Cvičení

- CKU_49. Dívka se prohlíží ve svisle pověšeném zrcadle, stojí na vodorovné podlaze a má výšku 170 cm. Její oči se nacházejí ve výšce 158 cm a mají vzdálenost 6 cm. Maximální šířka její postavy je 42 cm. Jakou minimální výšku má zrcadlo a jak vysoko se nachází dolní okraj zrcadla od podlahy, jestliže se v něm vidí celá? Jakou má zrcadlo minimální šířku, aby se dívka a) viděla celá jedním okem, b) viděla celá když se bude pozorovat jen levým okem a potom při nezměněné hlavy jen pravým okem? (Návod: Nakreslete si obrázky chodu paprsků při pohledu z boku a shora.)
- CKU_50. Dokažte, že složením lichého počtu osových souměrností, jejichž osy se všechny protínají ve stejném bodě M , je souměrnost podle osy, která prochází bodem M .
- CKU_51. Dokažte, že složením sudého počtu osových souměrností, jejichž osy se všechny protínají ve stejném bodě M , je otočení se středem M .
- CKU_52. Dokažte, že složením dvou symetrií s navzájem kolmými osami je středová souměrnost podle průsečíku os.
- CKU_53. Dokažte, že $R_{O,\alpha} \cdot R_{O,\beta} = R_{O,\beta} \cdot R_{O,\alpha} = R_{O,\alpha+\beta}$.
- CKU_54. Necht' jsou dány rovnoběžky a a b , které kolmice k nim protíná po řadě v bodech A a B . Dokažte, že platí $S_b \cdot S_a = T_{AB}$, kde T_{AB} je posunutí o vektor \overrightarrow{AB} .
- CKU_55. Dokažte, že složením posunutí a středové souměrnosti je středová souměrnost.
- CKU_56. Dokažte, že složením dvou středových souměrností vzniká posunutí.
- CKU_57. Rovinná zrcadla jsou umístěna odraznými plochami k sobě a svírají úhel velikosti 45° . Sestrojte všechny obrazy bodu X umístěného mezi nimi. Rozlište dvě situace: a) Bod X neleží v rovině souměrnosti zrcadel. b) Bod X leží v rovině souměrnosti zrcadel.
- CKU_58. Bod X je umístěn mezi rovinnými zrcadly tak, že vznikají jen dva jeho obrazy. Určete sklon zrcadel a možné polohy bodu X .
- CKU_59. Rovinná zrcadla jsou umístěna odraznými plochami k sobě a svírají úhel velikosti 50° . Sestrojte všechny obrazy bodu X umístěného mezi nimi. Přitom označte ρ rovinu, která je dána bodem X a průsečnicí rovin zrcadel, a rozlište tři situace: a) Rovina ρ svírá s rovinou některého zrcadla úhel velikosti 10° .
 b) Rovina ρ svírá s rovinou některého zrcadla úhel velikosti 20° .
 c) Neplatí podmínka a) ani b).

3.2.4 Matematické kulečnický a příbuzné úlohy

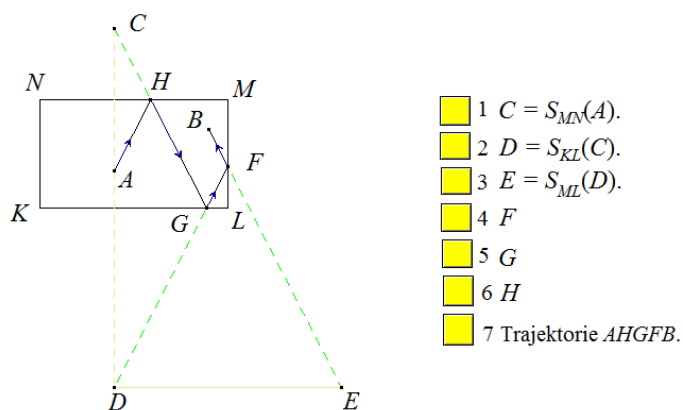
Kulečnický koule se odráží od mantinelů podle stejných zákonů jako světelné paprsky od zrcadel. Matematický kulečnický je rovinný útvar ohraničený uzavřenou čarou (n -úhelníkem, kružnicí, elipsou, ...). Jeho hranice představuje mantinel reálného kulečnický.

V tomto odstavci stručně zmíníme některé problémy pohybu kulečnický koule, kterou v matematickém modelu nahradíme bodem. Podrobněji o problematice pojednává ruská publikace [11] nebo anglicky psaný text [12].

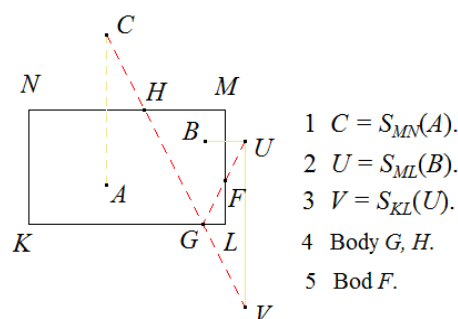
Nejprve budeme zkoumat **regulární pohyb** koule - bodu v kulečnický tvaru n -úhelníka. Pohyb bodu, resp. jeho trajektorii pokládáme za regulární, pokud trajektorie bodu neobsahuje vrchol hraničního n -úhelníka. To znamená, že k odrazům dochází pouze ve vnitřních bodech stran hranice. Jestliže se koule při svém pohybu octne v některém vrcholu hranice kulečnický, jedná se o **singulární pohyb**, resp. **singulární trajektorii**. Singulárními pohyby se nebudeme zabývat.

Úloha 43. V pravoúhelníkovém kulečnický $KLMN$ jsou zvoleny body A, B . Sestrojte trajektorii kulečnický koule z A do B , tak aby se koule při pohybu odrazila po řadě na úsečkách MN , KL a LM .

Řešení spočívá v rozkladu problému na několik po sobě jdoucích Heronových úloh. Postup je zřejmý z obr. 104, viz též soubor KU_43.fig v příloze 1. Zdůvodněte jej sami na základě analogie s řešením úlohy 39. Obrázek 105 znázorňuje úspornější konstrukci bodů F, G, H .



Obr. 104



Obr. 105

Úloha 45. V pravoúhelníkovém kulečnický $KLMN$ jsou zvoleny body A, B . Sestrojte všechny možné trajektorie kulečnický koule z A do B , tak aby se koule při pohybu odrazila na každé straně mantinelu právě jednou. Která z nich je nejkratší?

Řešení. Necht' je trajektorií lomená čára $ACDEFB$. Kdybychom vyšetřovali všechna možná pořadí bodů C, D, E a F na stranách KL, LM, MN a NK , zkoumali bychom celkem 24 situací. Naštěstí mnohé z nich nemohou nastat. Úlohu vyřešíme důvtipnou metodou, při níž se stačí zabývat nejvýše čtyřmi možnostmi, a která nám navíc ihned prozradí nejkratší i nejdělsí dráhu kulečnický koule.

Zadaný pravoúhelník $KLMN$ doplníme o jeho obrazy, i o obrazy bodu B , v osových souměrnostech podle jeho všech stran. Dále přidáme všechny dosud nesestrojené obrazy přidaných obrazů (pravoúhelníka i bodu B) v osových souměrnostech podle jejich stran. Tak neustále pokračujeme, až nakonec obdržíme pravoúhelníkovou síť pokrývající celou rovinu⁶. Nazveme ji **přidružená síť kulečnicku**. Každému políčku sítě (resp. útvarům, které v něm budou) přiřadíme "souřadnice," - uspořádanou dvojici celých nezáporných čísel s touto vlastností: Když si představíme nejkratší přemístění pravoúhelníka $KLMN$ na dané políčko osovými souměrnostmi podle přímek mříže, pak první číslo uspořádané dvojice čísel uvádí počet potřebných souměrností podle svislých mřížových přímek, a druhé počet potřebných souměrností podle vodorovných mřížových přímek (obr. 106).

(2, 3)	(1, 3)	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)
(2, 2)	(1, 2)	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)
.
(2, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
		N	M	
(2, 0)	(1, 0)	$\overset{\cdot}{A}$ (0, 0)	(1, 0)	(2, 0)
.	.	$B \cdot$.	.
.	.	K	L	.
(2, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
(2, 2)	(1, 2)	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)

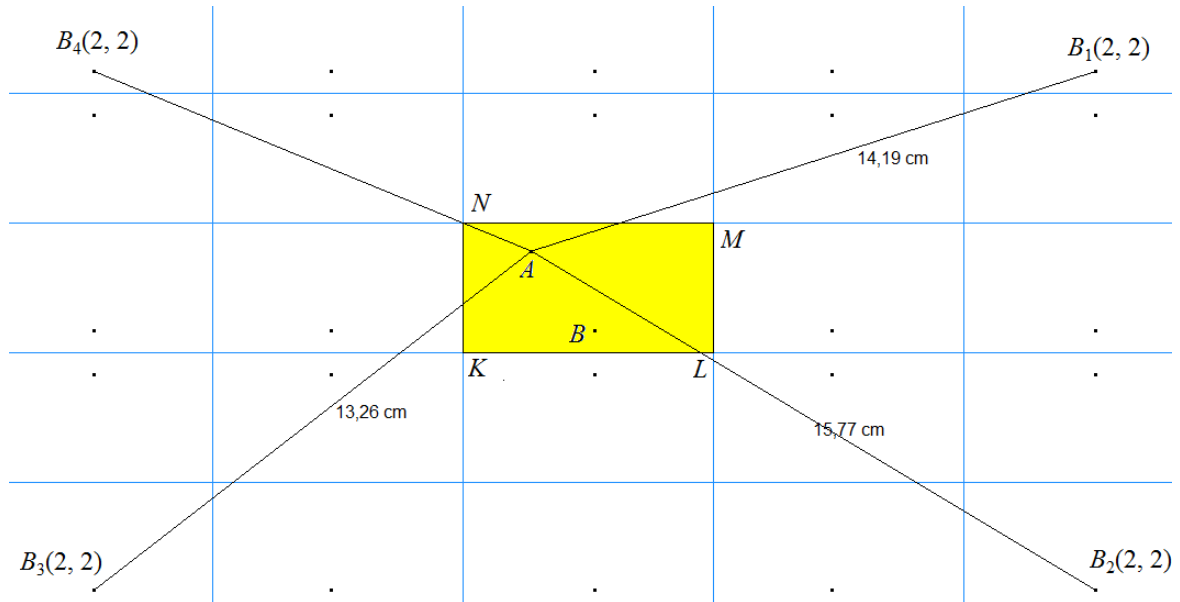
Obr. 106

Přidružená síť obsahuje osy všech souměrností potřebných pro heronovské sestrojení trajektorie kteréhokoli regulárního pohybu koule v kulečnicku a zároveň i všechny potřebné obrazy vzniklé z bodu B v těchto souměrnostech. Přistoupíme nyní k vlastnímu řešení úlohy, jež je zároveň ukázkou využití přidružené sítě.

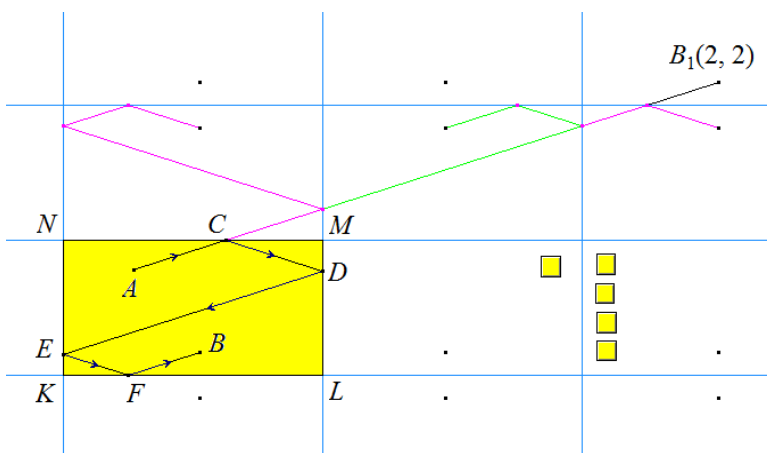
Zadání požaduje právě jeden odraz na každé straně pravoúhelníka $KLMN$. K nalezení trajektorie jsou tedy zapotřebí dvě souměrnosti se svislými osami a dvě s vodorovnými. Tomu odpovídají políčka typu (2, 2). Body, které jsou v nich sestrojené označíme B_1, B_2, B_3 a B_4 , resp. $B_1(2, 2), B_2(2, 2), B_3(2, 2)$ a $B_4(2, 2)$ (obr. 107). Úsečky AB_1, AB_2, AB_3 a AB_4 jsou tzv. **napřímené trajektorie** pohybů, které připadají v úvahu. Z nich vyloučíme singulární trajektorii příslušnou úsečce AB_4 (prochází vrcholem N).

⁶ Sice to nelze narýsovat, ale v myslí matematika, který pracuje s bezrozměrnými body, nekonečně tenkými čarami a mnoha jinými abstrakcemi, je taková představa běžná.

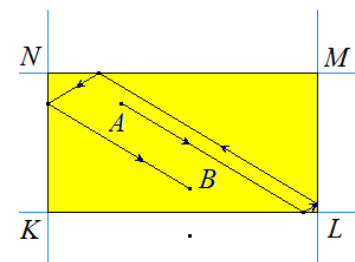
Délky úseček AB_1 , AB_2 a AB_3 jsou rovny délkám příslušných trajektorií, které postupně sestrojíme pomocí souměrností podle těch přímek sítě, jež protínají napřímenou trajektorii. Začínáme vždy od bodu $B(2,2)$.



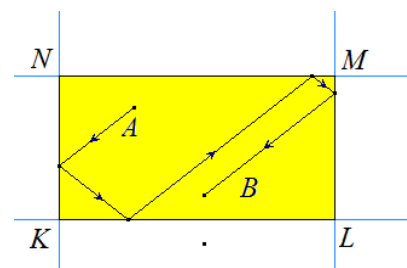
Obr. 107



Obr. 108 a



Obr. 108 b



Obr. 108 c

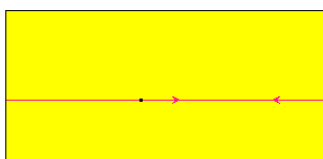
Postup sestrojení pro bod $B_1(2,2)$ vidíme na obr. 108 a. Obrázky 108 b, c představují již jen výsledky pro body $B_2(2,2)$ a $B_3(2,2)$.

Celé řešení je možno interaktivně prozkoumat pomocí souborů $KU_44\ B1.fig$, $KU_44\ B2.fig$, a $KU_44\ B3.fig$. (pro každý z bodů B_1, B_2 a B_3 jeden soubor). Tlačítka lze skrývat a zobrazovat jednotlivé části konstrukce. Velikost buněk sítě nastavujeme úchopem za body L a N . Body A, B lze přemísťovat. Nejkratší je trajek-

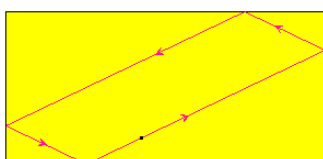
torie na obr. 108 c, která odpovídá bodu $B_3(2,2)$. Její (zaokrouhlená) délka je 13,26 cm.

Úloha 46. Vyšetřete, za jakých podmínek je trajektorie koule vyslané z daného bodu B v pravouhelníkovém kulečnicku cyklická (tzn. že je to uzavřená čára).

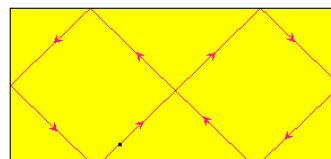
Řešení. Nejjednodušší **cyklická trajektorie** je úsečka rovnoběžná se dvěma protilehlými stranami kulečnicku, obr. 109 a. Koule se při pohybu střídavě naráží kolmo na zbývající stěny a odráží se od nich. Složitější cyklická trajektorie koule v kulečnicku je uzavřená lomená čára, viz např. obr. 109 b, c. Nedochozí-li ke ztrátám energie, vykonává koule **periodický pohyb**, tzn. že se stejný pohyb neustále opakuje po stejných časových intervalech.



Obr. 109 a



Obr. 109 b

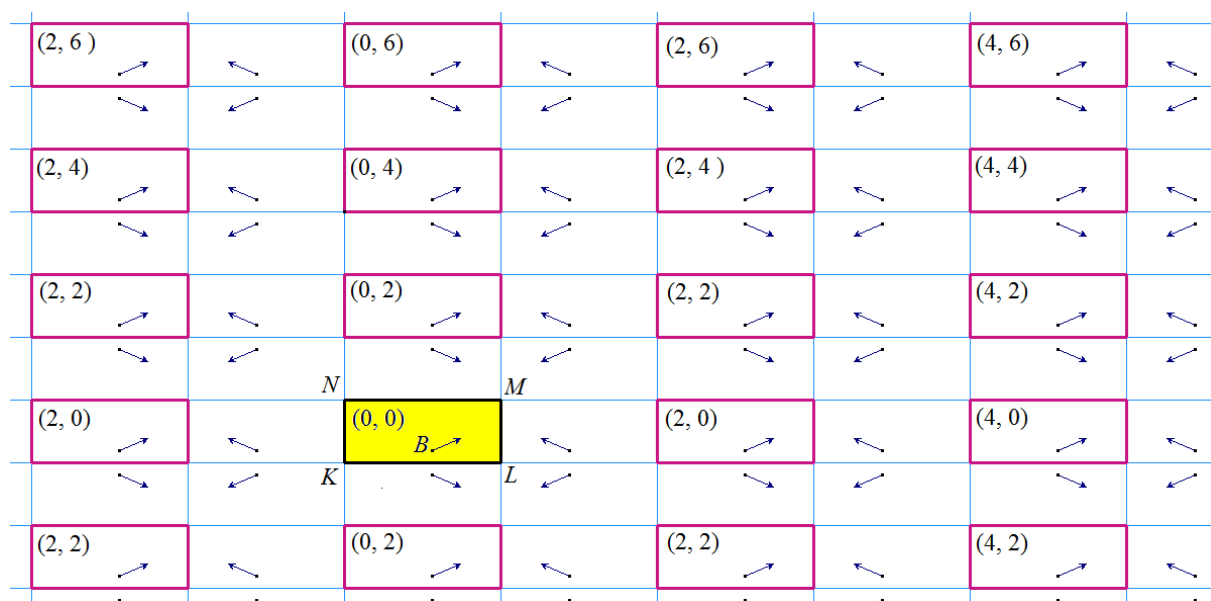


Obr. 109 c

Pro vznik periodického pohybu je nutné a postačující, aby koule vyslaná z bodu B procházela po konečném počtu odrazů opět bodem B se stejnou rychlostí (co do velikosti i směru) jako na počátku, a přitom byla její trajektorie regulární.

Podmínku stejného místa při hledání cyklické trajektorie metodou z úlohy 45 splníme tak, že v síti z obr. 106 umístíme A a B do téhož bodu. (Symbol A zrušíme, napřímená trajektorie pohybu bude úsečka s krajními body B a $B(m,n)$.)

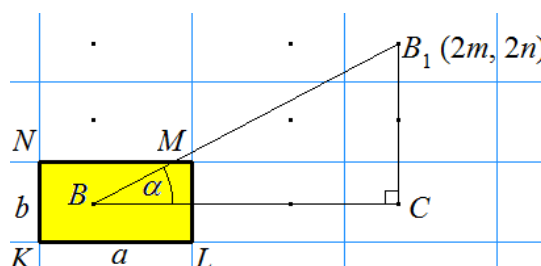
Z podmínky stejného vektoru rychlosti zjistíme, které koncové body $B(m,n)$ lze použít. Když do procesu vytváření přidružené sítě zahrneme i vektor počáteční rychlosti pohybu, jsou ve sloupcích i řadách sítě stejné vektory vždy v každém druhém políčku (obr. 110). Je to důsledek tvrzení z úlohy CKU_54, že složením dvou souměrností s rovnoběžnými osami vzniká posunutí.



Obr. 110

Závěr. Trajektorie koule v pravoúhelníkovém kulečnicku je cyklická, právě když vnitřek napřímené trajektorie neobsahuje uzlový bod přidružené sítě a vnější koncový bod napřímené trajektorie leží v políčku se sudými souřadnicemi.

Stanovíme ještě, pod jakým úhlem je nutno kulečnickovou kouli z bodu B vyslat, aby byla trajektorie pohybu cyklická. Uvažujme kulečník $KLMN$, $|KL|=a$, $|KN|=b$ (obr. 111). Bod B_1 napřímené cyklické dráhy má souřadnice $2m$ a $2n$. V pravoúhlém trojúhelníku BB_1C je tedy $|BC|=2ma$ a $|CB_1|=2nb$. Jestliže označíme α odchylku přímky BB_1 (rovnoběžné s vektorem počáteční rychlosti) od směru přímky KL , pak



Obr. 111

$$\tan \alpha = \frac{|B_1C|}{|BC|} = \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a}.$$

Odtud plyne

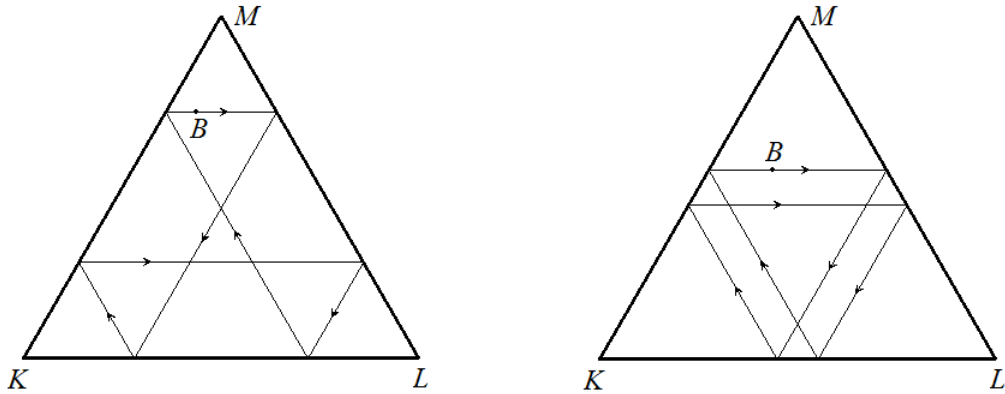
Věta 11. Regulární trajektorie kulečnickové koule v pravoúhelníkovém kulečnicku je cyklická, právě když je tangens úhlu, který svírá vektor počáteční rychlosti se směrem strany kulečnicku racionálním násobkem podílu délek stran kulečnicku.

Cvičení

- CKU_60. Z vnitřního bodu A trojúhelníka KMN je v pravoúhelníkovém kulečnicku $KLMN$ vyslána koule rovnoběžně s úhlopříčkou KM . Určete množinu všech bodů B , z nichž je možno vyslat druhou kulečnickovou kouli se stejnou počáteční rychlostí (co do velikosti i směru) tak, aby se s první koulí srazila.
- CKU_61. V pravoúhelníkovém kulečnicku $KLMN$ s rozměry $m \times 2n$, kde m, n jsou lichá přirozená čísla, je vyslána koule z vrcholu K tak, že svírá se stranou KL úhel $\alpha = 45^\circ$. Zjistěte, zda se po určitém počtu odrazů dostane a) do vrcholu M , b) do L nebo N , c) do středu některé strany.
- CKU_62. Řešte předchozí úlohu a) pro $\alpha = 60^\circ$, b) pro $\alpha = 30^\circ$.
- CKU_63. V pravoúhelníkovém kulečnicku zvolte body A, B a sestrojte všechny trajektorie kulečnickové koule z A do B a) se třemi odrazy, b) s pěti odrazy. Určete rovněž délky těchto trajektorií. Pro konstrukci v Cabri využijte soubor KULECNIK_OBD_SIT ze složky PŘÍLOHA 1.
- CKU_64. V pravoúhelníkovém kulečnicku vykonává koule periodický pohyb tak, že s každým odrazem se její směr změní o 90° . Může mít její trajektorie celkový počet odrazů a) 4, b) 6, c) 5, d) 18? (Pokud ne, dokažte proč. Pokud ano, sestrojte konkrétně zvolený příklad.)

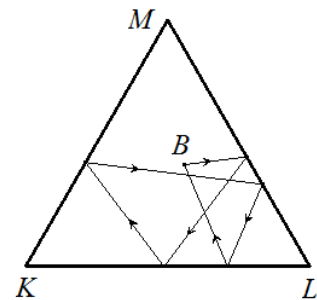
Věta 12. Kulečnick tvaru rovnostranného trojúhelníka má tu vlastnost, že trajektorie koule vyslané rovnoběžně s jeho stranou je složena z úseček rovnoběžných se stranami trojúhelníka a je cyklická.

Důkaz necháváme čtenáři (nápopověda: obr. 112).



Obr. 112

Řešení úloh o kulečnicku tvaru rovnostranného trojúhelníka je podobné jako v případě pravoúhelníkového kulečnicku. K vyšetřování je výhodné používat přidruženou trojúhelníkovou síť - soubor KULECNIK_TROJ_SIT v příloze 1. Příklad trajektorie, kdy se koule po pěti odrazech opět vrací do bodu B , z něhož byla vyslána, vidíme na obr. 113. Trajektorie není cyklická (pokud se koule v bodě B nezastaví, pohyb pokračuje bez zacyklení, jak plyne z řešení úlohy CKU_66).



Obr. 113

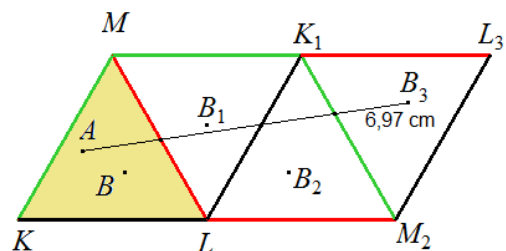
Úloha 47. Uvnitř rovnostranného trojúhelníka KLM s délkou strany 4 cm jsou dány body A, B . Přitom $A \in k_1(K, 2 \text{ cm}) \cap k_2(L, 3 \text{ cm})$ a B leží na ose úhlu KLM ve vzdálenosti 2 cm od vrcholu L . Úsečka KL je vytvořena z cukru, úsečka LM z povidel a úsečka MK z medu.

- Mravenec se chce z místa A dostat do místa B tak, aby během cesty ochutnal povidla, med i cukr. Najděte jeho nejkratší cestu, jestliže
- chce laskominy ochutnat v pořadí povidla, cukr, med.
 - nezáleží na tom, v jakém pořadí dobroty navštíví.

Řešení. a) Na obr. 114 je zobrazeno sestrojení napřímené trajektorie z A do B :

- $K_1 = S_{\leftrightarrow LM}(K)$, $B_1 = S_{\leftrightarrow LM}(B)$.
- $M_2 = S_{\leftrightarrow LK_1}(M)$, $B_2 = S_{\leftrightarrow LK_1}(B_1)$.
- $L_3 = S_{\leftrightarrow K_1M_2}(L)$, $B_3 = S_{\leftrightarrow K_1M_2}(B_2)$.

Délka trajektorie je 6,97 cm. Je dána délkou úsečky AB_3 a na obrázku vyznačena číslem poblíž bodu B_3 . Zpětnou konstrukcí sestrojíme



Obr. 114

hledanou trajektorii z A do B (obr. 115).

Pro větší názornost jsou na obrázcích "povidlové úsečky" vyznačeny červeně, "cukrové" černě a "medové" zeleně.

b) Existuje celkem šest pořadí, které schématicky zapíšeme uspořádanými trojicemi:

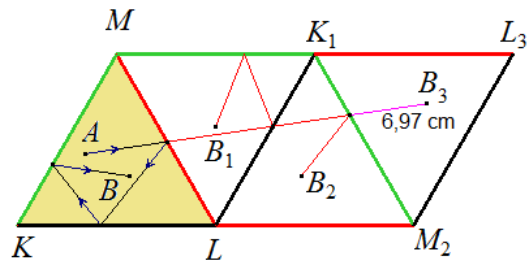
(c, m, p) , (c, p, m) , (m, c, p) ,

(m, p, c) , (p, c, m) , (p, m, c) ,

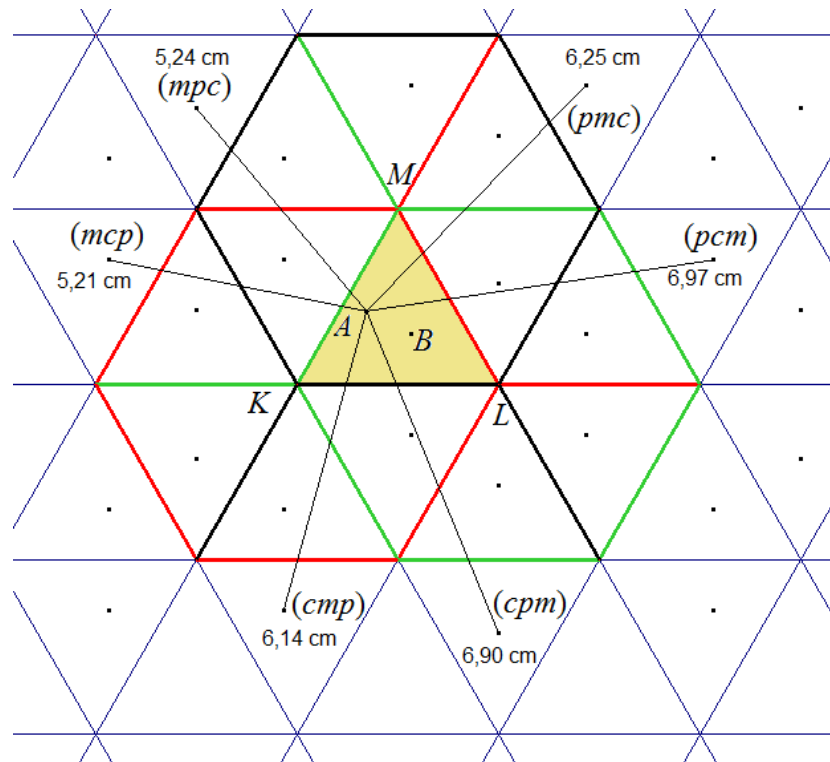
kde c značí cukr, m značí med a p povidla.

K řešení jsme využili přidruženou trojúhelníkovou síť ze souboru KULECNIK_TROJ_SIT.

Obr. 116 představuje všech šest možných napřímených trajektorií. Jejich koncové body (různé od A) jsou označeny trojicemi, jež udávají pořadí. U těchto označení vidíme i délky trajektorií (zaokrouhlené na desetiny milimetru).



Obr. 115



Obr. 116

Nejkratší trajektorie odpovídá pořadí "med - cukr - povidla" a má délku 5,21 cm. Její sestrojění zpětnou konstrukcí přenecháváme čtenáři.

(Poznamenejme, že pilný mravenec ze situace a) volil trasu, která je nejdelší ze všech šesti.)

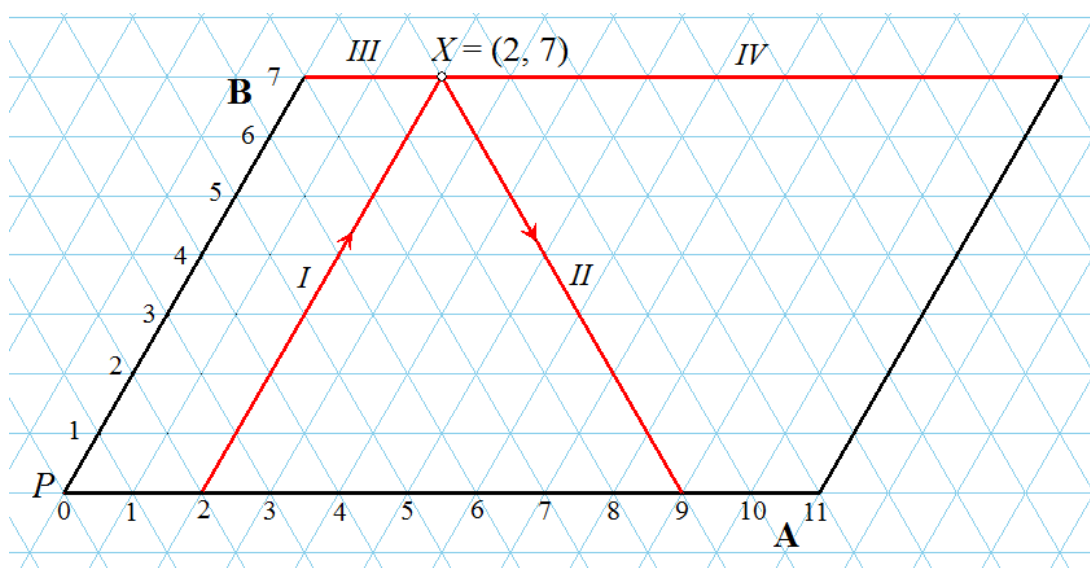
Kulečníky sestrojené na síti rovnostranných trojúhelníků se dají výhodně využít k řešení tzv. úloh o přelévání kapaliny. V nich je k dispozici několik nádob známého objemu. Naplňováním některých z nich kapalinou a přeléváním, resp. vyléváním kapaliny máme odměřit určité

množství kapaliny. Přidává se podmínka, aby kroků bylo co nejméně. Jak uvidíme, stačí vyslat kuličku do vhodného kulečnicku a její pohyb úlohu kompletně vyřeší.

Omezíme se nejprve na úlohy, v nichž jsou dány nádoby **A**, **B**, které mají po řadě objemy m a n litrů (m, n jsou přirozená čísla a $n < m$). Máme pomocí nich odměřit v litrů vody, kde $v \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Vodu lze nabírat ze zásobárny **C** (nádoby, v níž je více než $m+n$ litrů vody). Na nádobách nejsou žádné rysky, které by označovaly díly jejich objemů.

Zřejmě začneme tak, že jednu nádobu naplníme, například nádobu **A**. Přelitím vody z **A** do **B** tak, aby nádoba **B** byla plná, zbyde v nádobě **A** voda s objemem $m-n$, a podobně pokračujeme dále.

V každém kroku jednu z nádob **A**, **B** buď naplníme, nebo vyprázdníme. To znamená, že objemy vody v nádobách **A**, **B** můžeme vyjádřit jako souřadnice mřížových bodů na hranici rovnoběžníka v síti rovnostranných jednotkových trojúhelníků. Rovnoběžník je ohraničen přímkami mříže a délky jeho stran jsou m a n . Na obr. 117 je takový rovnoběžník znázorněn pro $m=11$ a $n=7$ (litrů). Bod $X=(2,7)$ udává stav vody v nádobách **A**, **B** v určité fázi procesu přelévání: v dané chvíli jsou v nádobě **A** 2 litry vody a v nádobě **B** je 7 litrů.



Obr. 117

Předpokládejme, že tento stav ještě není řešením úlohy, a zkusme zjistit, jaké máme možnosti dalšího postupu, když se chceme co nekratší cestou dostat k cíli. Teoreticky jsou 4 možnosti:

- Vyprázdníme nádobu **B** přelitím do zásobárny **C**, což je cesta *I* (na obrázku proti směru šipky) z X do bodu $(2, 0)$.
- Přelijeme vodu z nádoby **B** do nádoby **A**, cesta *II* z X do $(9, 0)$.
- Vyprázdníme nádobu **A** přelitím do zásobárny **C**, cesta *III*. Dostaneme se do stavu $(0, 7)$, což je jeden ze dvou možných začátků řešení.⁷ Tuto cestu zakážeme, neboť zvětšuje počet kroků řešení.
- Doplníme nádobu **A** vodou, cesta *IV* do stavu $(11, 7)$. Obě nádoby jsou plné, v dalším kroku musíme jednu z nich vylít, což znamená opět návrat na začátek řešení. Tuto cestu rovněž zakážeme.

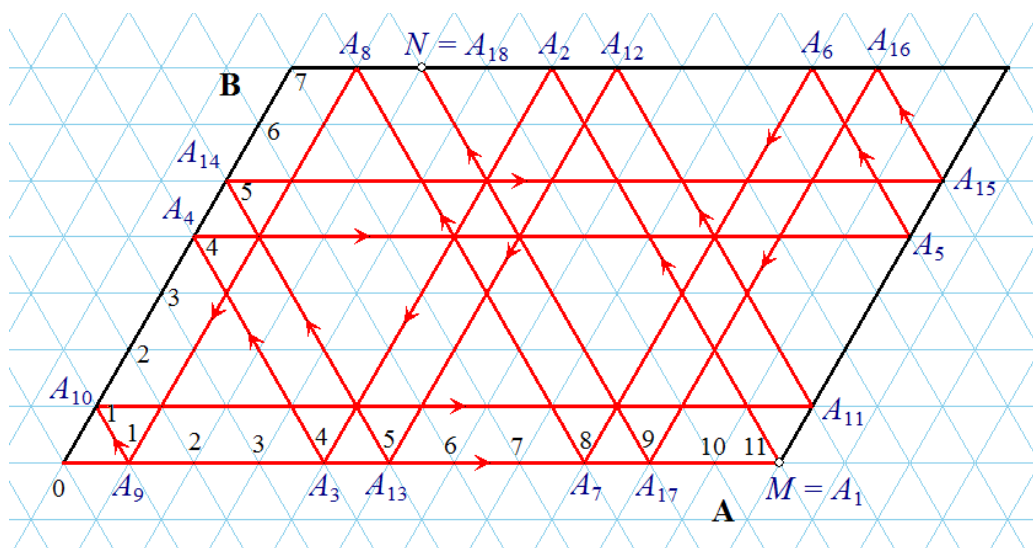
⁷ Obecně začínáme přechodem ze stavu $(0, 0)$ buď do stavu $(m, 0)$ nebo do stavu $(0, n)$.

Do stavu znázorněného bodem $X = (2, 7)$ je možné se dostat pouze po jedné z cest *I* a *II*. (Zdůvodněte, proč to nejde po cestě *III* nebo po cestě *IV*.) To znamená, že po přechodu od stavu $(2, 0)$ do stavu $(2, 7)$ máme při postupu s co nejmenším počtem přelévání jedinou volbu dalšího kroku: cestu *II* ze stavu $(2, 7)$ do stavu $(9, 0)$. Obráceně, pokud jsme se do bodu X dostali po cestě *II*, nelze při nejmenším počtu přelévání pokračovat jinak, než po cestě *I*. Úsečky *I* a *II* přitom lze interpretovat jako znázornění trajektorie v kulečnicku $PABC$ pro pohyb koule z bodu $(2, 0)$ do bodu $(9, 0)$ s odrazem v bodě X (resp. pro pohyb z bodu $(9, 0)$ do bodu $(2, 0)$ s odrazem v X).

Z dosavadních úvah plyne, že řešení úloh o přelévání vody lze převést na sestavení trajektorie pohybu koule v kulečnicku ohraničeném přímkami mříže v síti jednotkových rovnostranných trojúhelníků.

Úloha 48. Máme zásobárnu **C** (nádoby neznámého objemu), ve které je více než 20 litrů vody, nádobu **A** s objemem 11 litrů a nádobu **B** s objemem 7 litrů, obě prázdné a bez rysek. Co nejmenším počtem přelévání máme s těmito pomůckami odměřit 2 litry vody.

Řešení. a) Řešení, které začíná naplněním nádoby **A**, schématicky znázorňuje obr. 118, jednotlivé kroky jsme zaznamenali do tabulky 48A, je jich celkem 18.



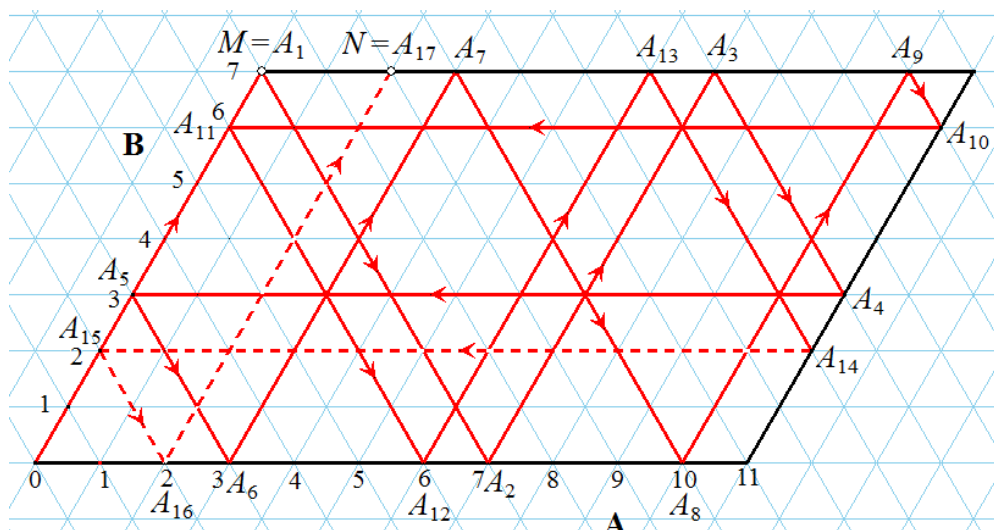
Obr. 118

Tabulka 48A

Krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A (l)	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2
B (l)	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7

Poznamenejme, že pohyb kulečnickové koule je "spuštěn" z bodu M , tedy až po naplnění nádoby **A**.

b) Řešení, které začíná naplněním nádoby **B**, schématicky znázorňuje obr. 119, jednotlivé kroky jsme zaznamenali do tabulky 48B, je jich celkem 14



Obr. 119

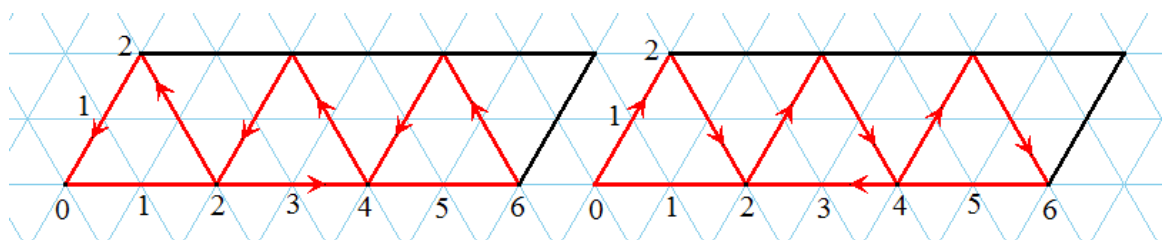
Tabulka 48B

Krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A (l)	0	7	7	11	0	3	3	10	10	11	0	6	6	11
B (l)	7	0	7	3	3	0	7	0	7	6	6	0	7	2

Závěr. Nejkratší postup začíná naplněním nádoby **B**. Skládá se ze 14 kroků, jež přehledně uvádí tabulka 48B.

Poznámka. Kdybychom v přelévání pokračovali, dostaneme se při 17. kroku do stavu (2, 7). Postupy a) a sedmnáctikrokový b) se navzájem doplňují. Obrázky 118 a 119 ukazují, že pomocí nádob o objemech 7 a 11 litrů můžeme přeléváním odměřit jakýkoliv celočíselný objem od 1 do 11 litrů. Zároveň zobrazují postup přelévání.

Kdybychom pomocí nádob o objemech 2 a 6 litrů měli odměřit 5 litrů vody, tak se nám to nepovede, jak je zřejmé z faktu, že rozdíl a součet sudých čísel je vždy číslo sudé. Můžeme odměřit pouze 2, 4 a 6 litrů (obr. 120).

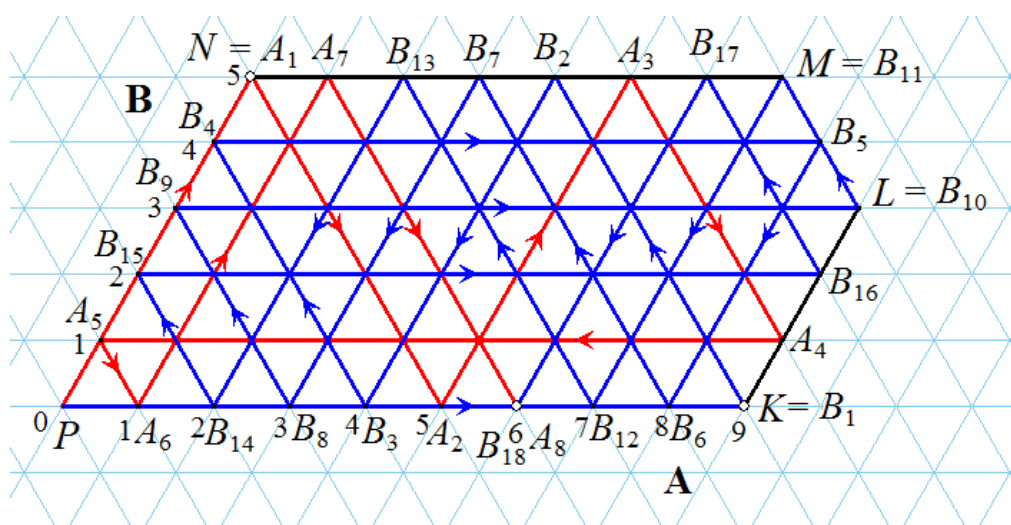


Obr. 120

Další úlohy se od té předchozí liší tím, že největší nádoba **C** má známý objem a je v počátečním stavu plná kapaliny.

Úloha 49. Farmářka má dvanáctilitrovou nádobu **C** plnou mléka a prázdné nádoby **A** a **B** s objemy 9 a 5 litrů (v daném pořadí). Určete, jak s co nejmenším počtem přelévání rozdělí mléko do dvou větších nádob po šesti litrech.

Řešení. Kulečnick tvaru rovnoběžníka 9×12 nemůžeme celý použít, protože s dvanácti litry mléka nelze realizovat stavy $(9, 5)$, $(9, 4)$ a $(8, 5)$. Použijeme tedy kulečnick tvaru pětiúhelníka $PKLMN$ na obr. 121, do nějž jsme zakreslili trajektorie obou postupů.



Obr. 121

Nejkratší postup se skládá z osmi kroků, začíná naplněním nádoby **A**, odpovídá červeně vyznačené trajektorii a je též popsán tabulkou 49A.

Tabulka 49A

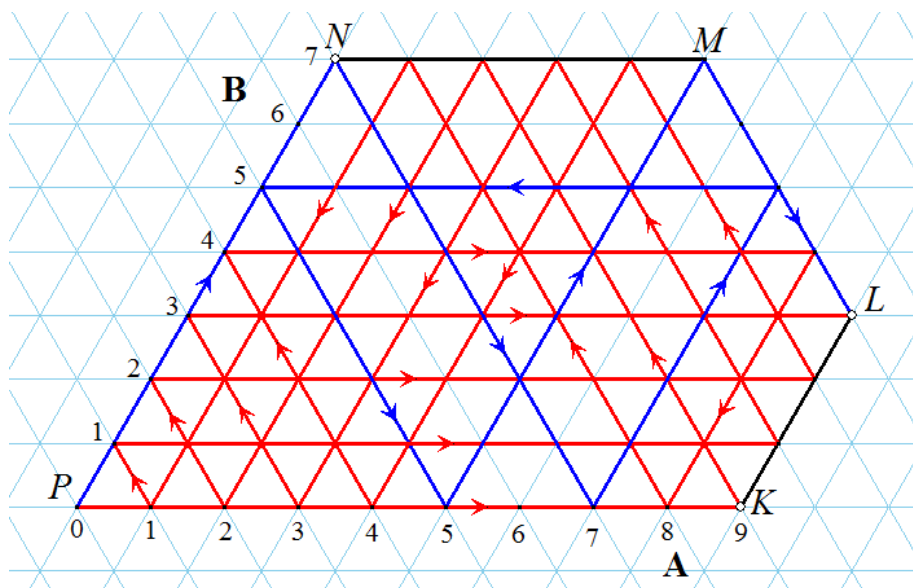
Krok	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A (l)	0	0	5	5	9	0	1	1	6
B (l)	0	5	0	5	1	1	0	5	0
C (l)	12	7	7	2	2	11	11	6	6

Tabulka 49B

Krok	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A (l)	0	9	4	4	0	8	8	5	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
B (l)	0	0	5	0	4	4	0	3	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
C (l)	0	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Úloha 50. Dvanáctilitrová nádoba **C** je plná právě vylisovaného jablečného moštu. Máme ji přeléváním rozdělit na dvě množství po šesti litrech pomocí nádob **A** a **B**, jež mají po řadě objemy 9 a 5 litrů.

Řešení. Při použití daných nádob nelze takovéto rozdělení přeléváním provést, jak je zřejmé z obr. 122.



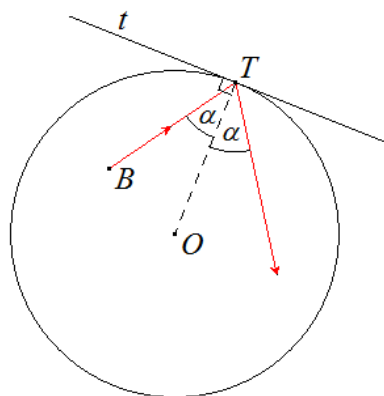
Obr. 122

Cvičení

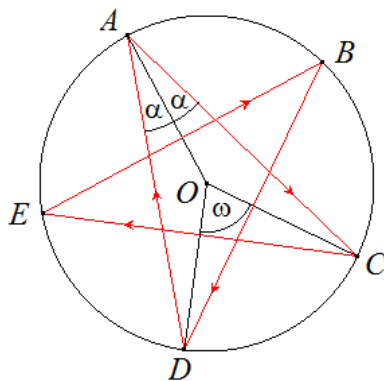
- CKU_65. V kulečnicku tvaru rovnostranného trojúhelníka zvolte vnitřní bod B a sestrojte nejkratší trajektorii z B do B se sedmi odrazy.
- CKU_66. V kulečnicku tvaru rovnostranného trojúhelníka zvolte vnitřní bod B a sestrojte všechny cyklické trajektorie, které prochází bodem B a skládají se jen ze dvou úseček. Dokažte, že délka každé této trajektorie je rovna výšce trojúhelníka, který ohraničuje kulečník. Dokažte dále, že cyklické trajektorie jsou jen ty, kdy je koule z bodu B vyslána buď rovnoběžně se stranou kulečnicku, nebo kolmo na ni.
- CKU_67. Petr si chce uvařit polévku přesně podle návodu na sáčku. Potřebuje k tomu odměřit 1 litr vody, ale má jen nádoby o objemech 3 a 5 litrů. Jak to přeléváním provede s nejmenším možným počtem kroků?
- CKU_68. Pomocí devítilitrové a čtyřlitrové nádoby odměřte 6 litrů vody. (Vodu čerpáme do nádob z vodovodu.)
- CKU_69. Máme dvacetilitrový kanistr naplněný vínem a dva prázdné demižony s objemy 12 a 17 litrů. S minimálním počtem přelévání rozdělte víno tak, aby ve dvou nádobách bylo po sedmi litrech a ve třetí 6 litrů.
- CKU_70. Máme desetilitrový kanistr plný benzínu a dvě prázdné nádoby s objemy 7 a 2 litry. S minimálním počtem přelévání rozdělte benzín tak, aby ve dvou větších nádobách bylo po pěti litrech.
- CKU_71 Dvanáctilitrový demižon je plný medoviny. Kromě něj máme jen 2 prázdné nádoby s objemy 8 a 5 litrů. S minimálním počtem přelévání rozdělte medovinu na dvě stejná množství.

V kulečnicích se zakřivenými mantinely se koule odráží tak, že trajektorie před odrazem i po něm svírají stejně velké úhly s tečnou rovinou sestrojenou v místě odrazu.

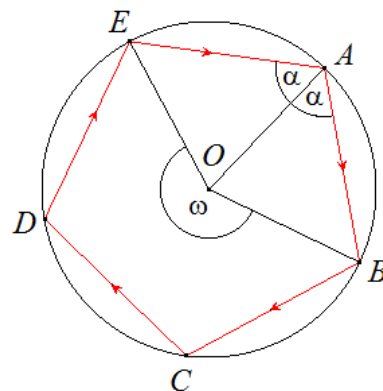
V kruhovém kulečniku je normálou vždy příčka, která prochází středem hraniční kružnice kulečniku a místem dopadu. Na obr. 123 je pro kruhový kulečník červeně vyznačena trajektorie koule vyslané z bodu B s odrazem v místě T .



Obr. 123



Obr. 124



Obr. 125

Věta 13. Cyklické trajektorie v kruhovém kulečniku mají tvar pravidelných n -úhelníků, které mohou být hvězdicové (obr. 124 pro $n = 5$), nebo konvexní (obr. 125 pro $n = 5$). Trajektorie je cyklická, právě když je úhel dopadu racionálním násobkem 180° .

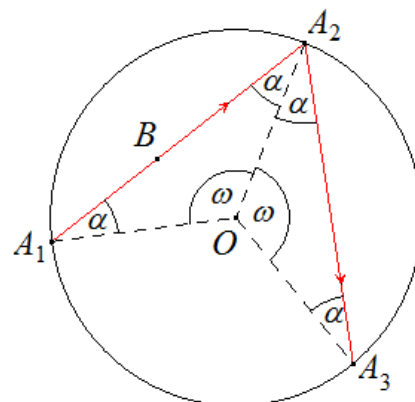
Důkaz. Z osové souměrnosti rovnostranných trojúhelníků A_1A_2O a A_3A_2O na obr. 126 plyne $|A_1A_2| = |A_2A_3|$ a proto je každá (i necyklická) trajektorie pohybu koule v kruhovém kulečniku lomená čára složená z navzájem shodných úseček. Označme následující body odrazů A_4, A_5, \dots . Trajektorie je cyklická, právě když některý z nich, označme jej A_{n+1} , splyne s bodem A_1 . Lomená čára se přitom uzavře do tvaru pravidelného n -úhelníka (hvězdicového, nebo konvexního). Při označení podle obr. 126 je uzavření trajektorie spjato s podmínkou $n \cdot \omega = k \cdot 360^\circ$, kde k je přirozené číslo. Z trojúhelníka A_1A_2O navíc dostáváme $2\alpha + \omega = 180^\circ$, tedy

$$2n \cdot \alpha = n \cdot 180^\circ - n \cdot \omega = (n - 2k) \cdot 180^\circ.$$

Po označení $2n = r$ a $n - 2k = s$ zjišťujeme, že trajektorie je cyklická, právě když

$$\alpha = \frac{s}{r} \cdot 180^\circ,$$

kde r a s jsou přirozená čísla.



Obr. 126

Cvičení

- CKU_72. Na obr. 124 a 125 jsou znázorněny cyklické trajektorie s pěti body odrazu v kruhovém kulečnicku. Vypočítejte pro ně α a ω .
- CKU_73. V kruhovém kulečnicku zvolte vnitřní bod B a sestrojte z něj všechny cyklické trajektorie se sedmi body odrazu.
- CKU_74. Zkuste sestrojít trajektorie z A do B , resp. cyklické trajektorie pro kulečnick
- tvary půlkruhu,
 - tvary čtvrtkruhu.
- CKU_75. Pro kulečnick tvaru elipsy dokažte, že trajektorie koule vyslané z ohniska hraniční elipsy je buď úsečka s krajními body v hlavních vrcholech elipsy, nebo lomená čára, jejíž každá úsečka prochází právě jedním ohniskem elipsy. (Využijte poznatky z odstavce 3.2.1.)

3.3 Minimální síť

Budeme se zabývat úlohou, kterou lze v rekreační matematice zformulovat takto:

Na planině se nachází u obcí. Máme vybudovat systém cest tak, abychom se po nich mohli dostat z každé obce do kterékoli z ostatních a aby byl navíc součet délek všech cest minimální.

V matematické formulaci si obce představíme jako body roviny a silnice budou čáry, jež tyto body spojují. Pro $u = 2$ je řešení zřejmé: dané dva body spojíme úsečkou.

Pro $u > 2$ je problém složitější. Obecné řešení úlohy není známo. Vyřešíme nejprve úlohu pro $u = 3$ a po stanovení základních vlastností minimální sítě se budeme zabývat případy, kdy řešení není příliš složité.

3.3.1 Fermatova úloha

Pierre Fermat v jednom dopise páteru Mersenovi popisoval svou metodu určování maximálních a minimálních hodnot funkcí a mimo jiné uvedl "*Qui hanc methodum non probaverit, ei proponitur: Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectae ad data puncta, summa trium harum rectorum sit minima quantitas*" [13], po přeložení do češtiny: "*Kdo tuto metodu neocenil, nechť vyřeší úlohu: Ke třem daným bodům nalezněte čtvrtý tak, aby tři úsečky vedené z něj do daných bodů měly minimální součet délek.*"

Fermat tím snad naznačuje, že umí úlohu vyřešit, jeho řešení však není známo. Podle některých pramenů je citovaná věta výzvou pro Evangelistu Torricelliho. Ten ji vyřešil, dokonce několika způsoby. Torricelliho řešení je nejstarší známé. V průběhu několika staletí úlohu řešila řada matematiků různými metodami. S Fermatovou úlohou souvisí některé zajímavé poznatky s nimiž se postupně seznámíme.

Úloha 51. Dokažte Vivianovu větu:

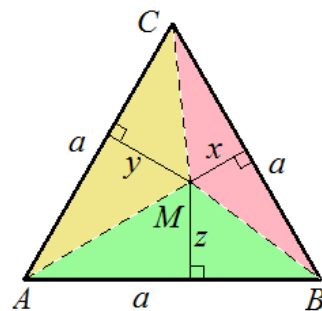
V rovnostranném trojúhelníku má jeho každý bod tentýž součet vzdáleností od stran trojúhelníka. Tento součet je roven výšce trojúhelníka.

1. řešení. Necht' ABC je rovnostranný trojúhelník s vnitřním bodem M a délkou strany a . Vzdálenosti bodu M od stran AB , BC , CA , které označíme po řadě x , y , z , jsou výškami trojúhelníků BCM , CAM a ABM z jejich společného vrcholu M (obr. 127). Z faktu, že součet obsahů těchto trojúhelníků je roven obsahu trojúhelníka ABC , dostáváme

$$\frac{1}{2}a \cdot x + \frac{1}{2}a \cdot y + \frac{1}{2}a \cdot z = \frac{1}{2}a \cdot v,$$

kde v je výška trojúhelníka ABC . Odtud po vynásobení výrazem $2/a$ dostáváme dokazované tvrzení:

$$x + y + z = v. \tag{14}$$

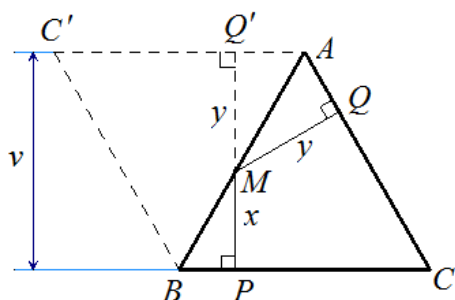


Obr. 127

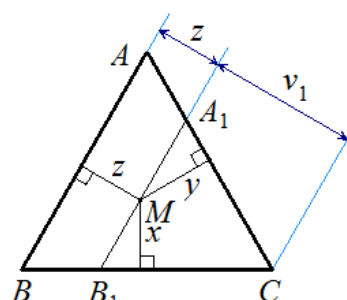
2. řešení. Uvažujme nejprve bod M na straně AB (obr. 128a). V souměrnosti S podle přímky AB označme $Q' = S(Q)$ a $C' = S(C)$. Pak

$$x + y + z = |MP| + |MQ| + 0 = |MP| + |MQ'| = |PQ'| = v.$$

Vztah (14) tedy pro $M \in AB$ platí. (Cyklickou záměnou zjistíme, že platí i když se M nachází na stranách BC a CA .)



Obr. 128a

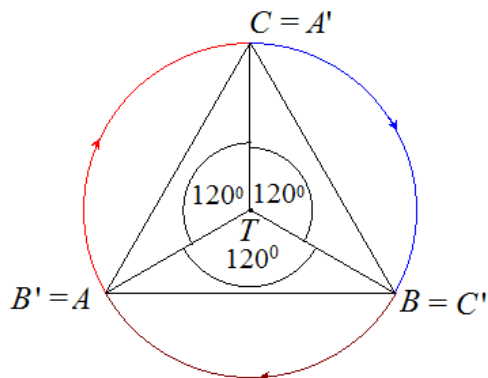


Obr. 128b

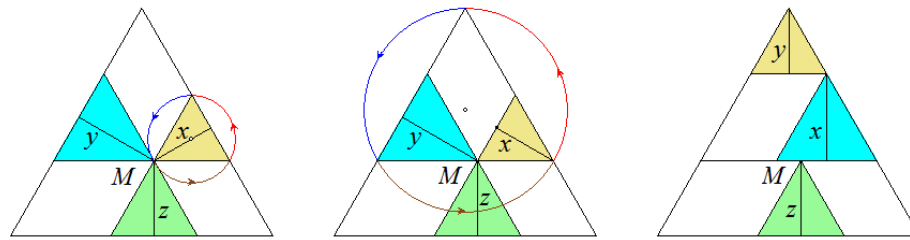
Zbývá ověřit platnost rovnosti (14) pro bod M uvnitř trojúhelníka ABC . V takovém případě vytvoří rovnoběžka se stranou AB vedená bodem M rovnostranný trojúhelník A_1B_1C , který má bod M uvnitř strany A_1B_1 . Již víme, že pro jeho výšku v_1 platí $v_1 = x + y$ a pomocí obr. 128b snadno ověříme: $x + y + z = v_1 + z = v$. \square

3. řešení je postaveno na poznatku, že rovnostranný trojúhelník je invariantní vzhledem k otočení o úhel $\pm 120^\circ$ kolem těžiště, které je zároveň středem opsané kružnice, ortocentrem a průsečíkem os úhlů. To znamená, že při každém takovém otočení se trojúhelník zobrazí sám na sebe (obr. 129).

Řešení vidíme na obr. 130, netřeba je vysvětlovat.



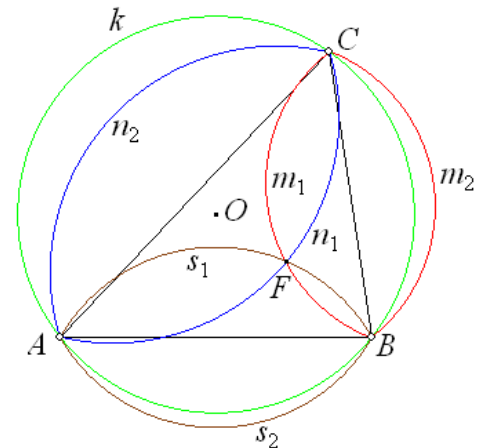
Obr. 129



Obr. 130

Úloha 52. V rovině je dán trojúhelník ABC . Určete ty body dané roviny, z nichž jsou všechny tři strany vidět pod úhlem 120° .

Řešení. Předpokládejme nejprve, že vnitřní úhly trojúhelníka ABC jsou menší než 120° . Ke straně BC sestrojíme množinu všech bodů dané roviny, z nichž je úsečka BC vidět pod úhlem 120° . Tou je sjednocení $m_1 \cup m_2$ kruhových oblouků m_1 a m_2 s obvodovým úhlem 120° a společnou tětivou BC (bez krajních bodů B a C). Analogicky sestrojíme množiny $n_1 \cup n_2$ (k úsečce CA) a $s_1 \cup s_2$ (k úsečce AB). Označení oblouků volíme tak, aby oblouk m_1 ležel uvnitř pol roviny BCA , n_1 uvnitř CAB a s_1 uvnitř ABC (obr. 131).



Obr. 131

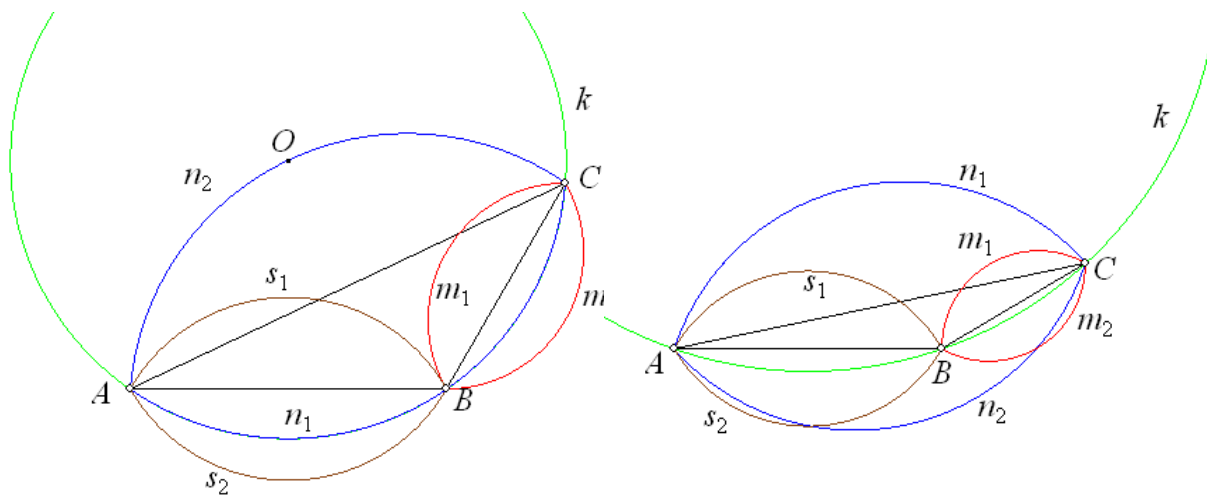
Protože jsou vnitřní úhly trojúhelníka menší než 120° , leží tyto tři oblouky i v kruhu ohraničeném kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC a navzájem se protínají. Když označíme F průsečík oblouků m_1 a n_1 , dostáváme $|\angle AFB| = 360^\circ - (|\angle BFC| + |\angle CFA|) = 120^\circ$. Odtud $F \in s_1$, všechny tři oblouky se protínají v jediném bodě. Oblouky m_2 , n_2 a s_2 leží vně trojúhelníka. Nemají společné (vnitřní) body, ani se neprotínají s oblouky m_1 , n_1 a s_1 .

Jestliže některý z vnitřních úhlů trojúhelníka ABC má velikost 120° , leží některý z oblouků m_1 , n_1 , nebo s_1 na kružnici k . Pro $\beta = 120^\circ$ je to například oblouk n_1 , jak vidíme na obr. 132.

Množiny $m_1 \cup m_2$, $n_1 \cup n_2$ a $s_1 \cup s_2$ nemají společný bod.

Stejně tak tomu je, když některý z vnitřních úhlů trojúhelníka ABC má velikost větší než 120° (obr. 133).

Věta 14. V trojúhelníku, který má velikosti vnitřních úhlů menší než 120° , existuje právě jeden bod F , z něž jsou strany trojúhelníka vidět pod úhly 120° . Má-li některý z vnitřních úhlů trojúhelníka velikost aspoň 120° , pak takový bod neexistuje. Bod F se nazývá **Fermatův bod**, někdy též **Torricelliho bod**, jeho další vlastnosti postupně ukážeme.



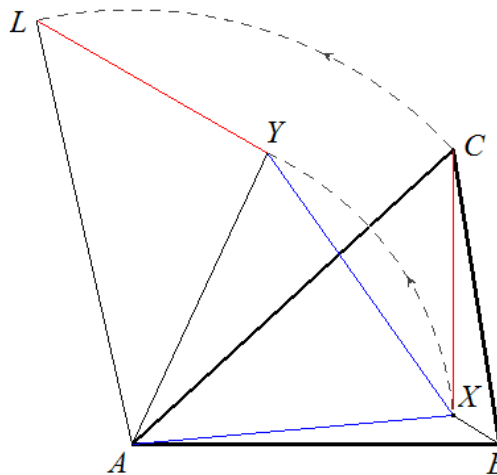
Obr. 132

Obr. 133

Úloha 53. V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly menšími než 120° najděte bod, který má minimální součet vzdáleností od vrcholů trojúhelníka.

1. řešení. Je to asi nejznámější řešení. Bylo nalezeno v různých dobách různými matematiky nezávisle na sobě.

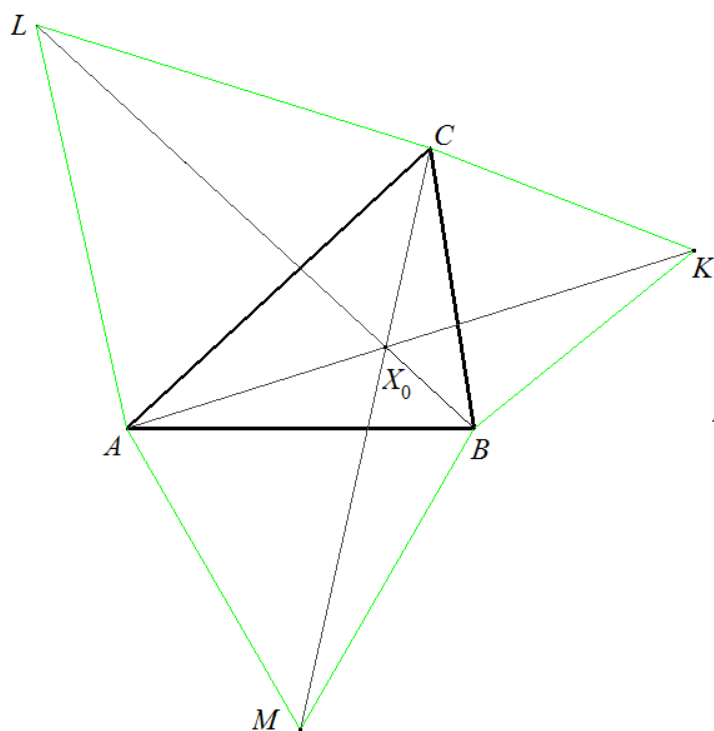
Zvolíme libovolný vnitřní bod X trojúhelníka ABC a přemístíme trojúhelník AXC rotací R_1 kolem bodu A o 60° , $Y = R_1(X)$ a $L = R_1(C)$ (obr. 134). Trojúhelník AYL je shodný se svým vzorem, platí tedy $|CX| = |YL|$. Navíc je trojúhelník AXY rovnostranný, proto $|AX| = |XY|$. Pomocí těchto vztahů dostáváme $|BX| + |AX| + |CX| = |BX| + |XY| + |YL| = |BXYL| \geq |BL|$, kde symbol $|BXYL|$ označuje délku lomené čáry $BXYL$. Pokud bod X_0 s minimálním součtem vzdáleností od vrcholů A , B a C existuje, nachází se na úsečce BL .



Obr. 134

Analogickými úvahami o rotacích R_2 a R_3 trojúhelníků ABX a BCX kolem bodů B a C o úhel 60° zjistíme, že bod X_0 leží na úsečkách CM a AK , kde $M = R_2(A)$ a $K = R_3(B)$. Jinými slovy: Bod X_0 je společným průsečíkem úseček AK , BL a CM , kde K , L a M jsou vrcholy rovnostranných trojúhelníků BCK , CAL a ABM vně připsaných ke stranám trojúhelníka ABC (obr. 135).

Měli bychom se ještě přesvědčit, že se úsečky AK , BL a CM opravdu protínají v jediném bodě a mají stejnou délku. Vraťme se proto na počátek řešení a pro $X_0 \in BL$ uvažujme kromě rotace R_1 ještě rotaci R_4 kolem vrcholu C o úhel -60° . Je $R_4(A) = L$, $R_4(X_0) = Z$ (obr. 135) a z rovnostranných trojúhelníků AX_0Y a BZX_0 plyne $|\angle AX_0L| = 60^\circ = |\angle LX_0C|$.



Obr. 135

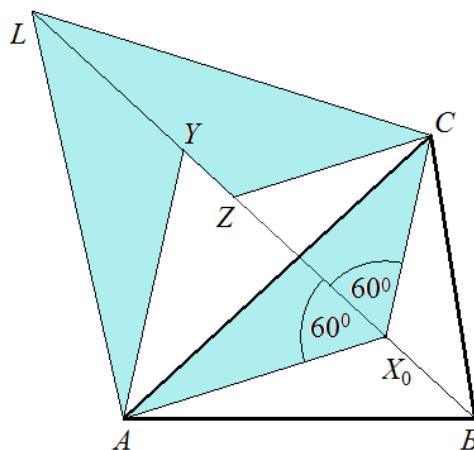
Vidíme, že

$$|\angle AX_0C| = |\angle AX_0L| + |\angle LX_0C| = 120^\circ.$$

Analogicky zjistíme

$$|\angle AX_0B| = 120^\circ = |\angle BX_0C|,$$

tedy $X_0 = F$. Existence a jednoznačnost bodu F plyne z věty 14.



Obr. 136

Pomocí kosinové věty pro trojúhelníky ABL , BCL a ACK dále dostaneme

$$|BL|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) = |AK|^2.$$

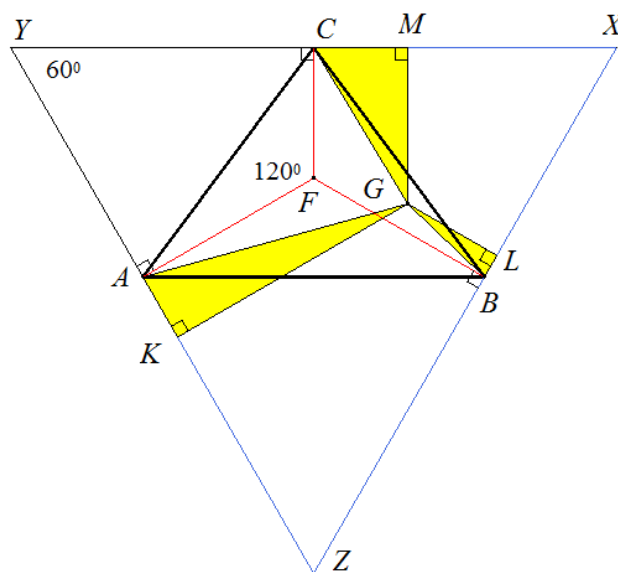
Odtud $|BL| = |AK|$. Podobně nalezneme $|AK| = |CM|$. \square

2. řešení. (Torricelli, podle [14].)

Podle věty 14 existuje jediný bod F z něhož jsou strany trojúhelníka vidět pod úhly 120° . Kolmice sestrojené ve vrcholech A , B a C po řadě k přímkám AF , BF a CF ohraničují trojúhelník XYZ . Při označení podle obr. 137 pro čtyřúhelník $AFCY$ platí

$$|\angle AYC| = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ.$$

Analogicky zjistíme, že trojúhelník XYZ má i při vrcholech X a Z vnitřní úhly velikosti 60° . Je tedy rovnostranný. Necht' K , L , M jsou paty kolmic z libovolného bodu $G \neq F$ trojúhelníka XYZ na jeho strany YZ , ZX , XY . Nejvýš jeden z bodů K , L , M patří do množiny $\{A, B, C\}$.



Obr. 137

S ohledem na Vivianovu větu (z úlohy 51) a fakt, že přepona v pravouhlém trojúhelníku je delší než odvěsna, dostáváme $|GA| + |GB| + |GC| > |GK| + |GL| + |GM| = |FA| + |FB| + |FC|$.

Úloze tedy vyhovuje pouze Fermatův bod F (obr. 135). \square

Věta 15. Pro každý bod X , který se nachází vně trojúhelníka ABC s velikostmi vnitřních úhlů menšími než 120° , platí vztah

$$|AX| + |BX| + |CX| > |AF| + |BF| + |CF|,$$

v němž F je Fermatův bod trojúhelníka ABC .

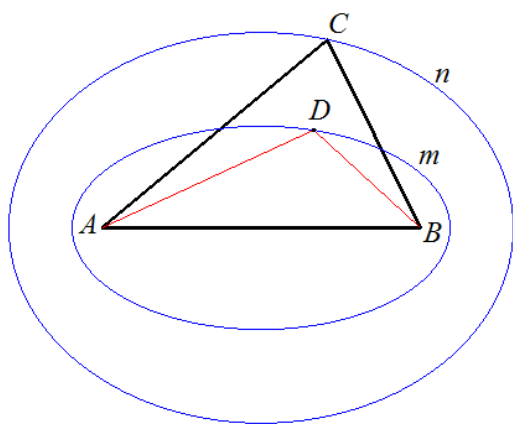
Důkaz věty 15 ponecháváme čtenáři jako cvičení CKU_77.

Úloha 54. Dokažte, že pro libovolný bod D trojúhelníka ABC platí

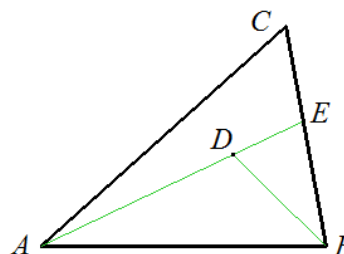
$$|AC| + |BC| \geq |AD| + |BD|, \quad (15)$$

přičemž rovnost nastává jen pro $D = C$.

Řešení. Důkaz plyne z vlastností elipsy a obr. 138, na němž mají elipsy m a n společná ohniska A a B .



Obr. 138



Obr. 139

Ukážeme ještě, jak toto tvrzení dokázal Eukleides ve svých Základech:

Pro $D = C$ je rovnost ve vztahu (15) zřejmá. Předpokládejme dále, že $D \neq C$. Nechť E je průsečík polopřímky AD se stranou BC (obr. 139). Trojúhelníkovou nerovnost $|AC| + |EC| > |AE|$ pro trojúhelník ACE upravíme přičtením výrazu $|BE|$ k jejím oběma stranám na tvar

$$|AC| + |BC| > |AE| + |BE|. \quad (16)$$

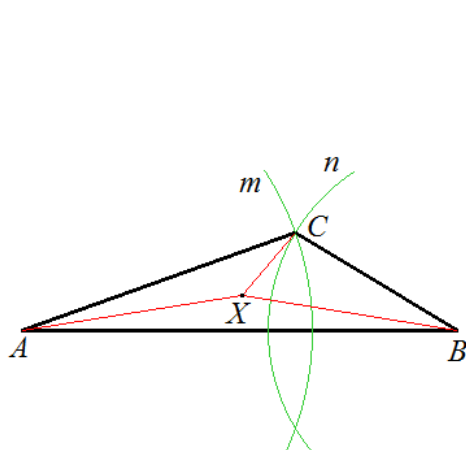
Podobně nerovnost $|DE| + |BE| > |BD|$ pro trojúhelník DBE upravíme přičtením $|AD|$ na tvar $|AE| + |BE| > |AD| + |BD|$. Odtud a ze vztahu (16) dostáváme dokazovanou nerovnost.

Úloha 55. V rovině trojúhelníka, který má vnitřní úhel větší nebo roven 120° , najděte bod s minimálním součtem vzdáleností od vrcholů trojúhelníka.

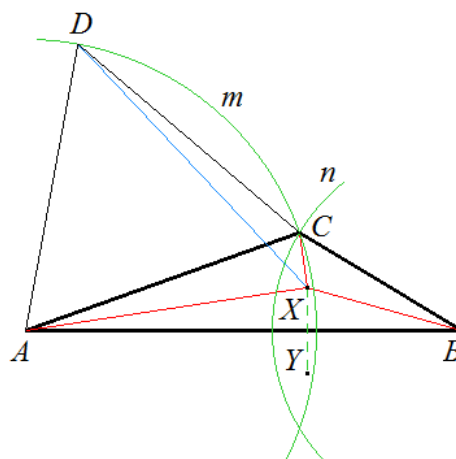
Řešení. Necht' ABC je trojúhelník s úhlem $\gamma \geq 120^\circ$ a M, N jsou po řadě vnitřky kruhů s hraničními kružnicemi $m(A, |AC|)$ a $n(B, |BC|)$. Předpokládejme nejprve, že bod X leží vně útvaru N (obr. 140). Pak $|BX| \geq |BC|$ a z trojúhelníkové nerovnosti $|AX| + |CX| \geq |AC|$ plyne

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |AC| + |BC|, \quad (17)$$

přičemž rovnost nastane, právě když $X = C$. Jestliže bod X leží vně M dokážeme vztah (17) analogicky.



Obr. 140



Obr. 141

Nakonec předpokládejme, že se bod X nachází v průniku P útvarů M a N . Útvar P je symetrický podle přímky AB . Každý bod X , který leží v průniku Q útvaru P s trojúhelníkem ABC , a jeho obraz Y v souměrnosti podle přímky AB proto splňují vztah $s(X) < s(Y)$. Můžeme se tedy omezit jen na body $X \in Q$. Uvažujme libovolný z nich a sestrojme rovnostranný trojúhelník ACD podle obr. 141. Užitím věty z úlohy CKU_80 dostáváme pro čtveřici bodů (A, X, C, D) vztah

$$|AX| + |CX| \geq |DX|. \quad (18)$$

Z velikostí úhlů ACB a ACD snadno ověříme, že pro bod C leží v trojúhelníku BDX . Použitím vztahu (15) dostáváme $|BX| + |DX| \geq |BC| + |DC| = |BC| + |AC|$. Odtud a z (18) dále plyne $s(X) = |BX| + |AX| + |CX| \geq |BX| + |DX| \geq |BC| + |AC|$, přitom rovnost platí jen pro $X = C$.

Pro $\gamma \geq 120^\circ$ má tedy minimální součet vzdáleností od vrcholů trojúhelníka pouze vrchol C .

Výsledek zobecníme do věty 16, jejíž druhá část je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti.

Věta 16. Má-li některý z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC velikost větší než 120° , nabývá součet $s(X) = |AX| + |BX| + |CX|$ svého minima jen ve vrcholu tohoto úhlu. Jsou-li body A, B a C kolineární, je $s(X)$ minimální jen když X je jedním z těchto bodů a leží mezi druhými dvěma.

Úloha 56. V rovině jsou dány body A , B a C . Sestrojte bod X tak, aby měl součet

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX|$$

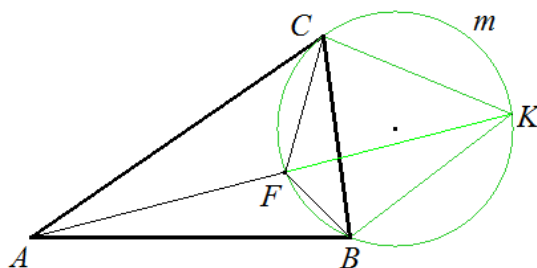
minimální hodnotu.

Řešení. a) Pokud se body A , B a C nachází na téže přímce, zvolíme (podle věty 16) za X ten z nich, který se nachází mezi zbylými dvěma.

b) Je-li ABC trojúhelník s některým vnitřním úhlem velikosti aspoň 120° , je (podle věty 16) bodem X vrchol trojúhelníka při tomto úhlu.

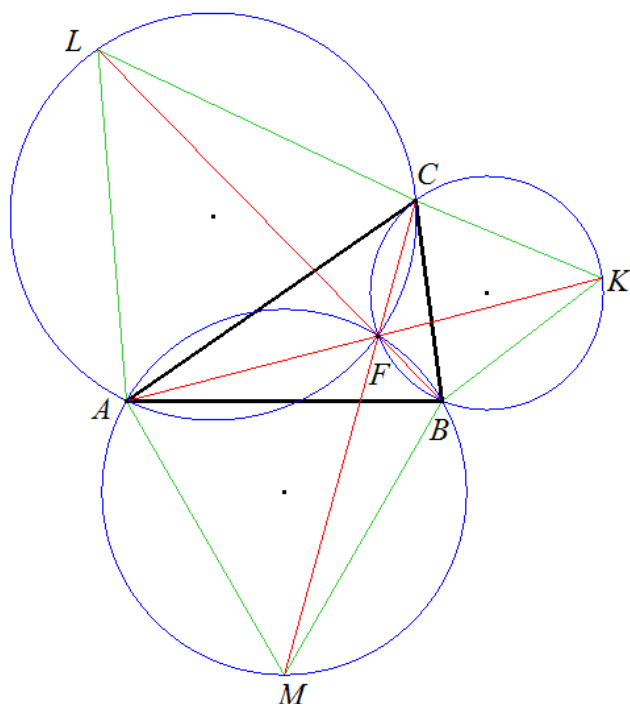
c) Nechť ABC je trojúhelník, který má všechny vnitřní úhly menší než 120° . Již víme, že $s(X)$ je minimální pro $X = F$, přičemž Fermatův bod F trojúhelníka ABC lze výhodně sestrojit takto:

1. Zvolíme libovolnou stranu trojúhelníka sestrojíme k ní vně připsaný rovnostranný trojúhelník a opíšeme mu kružnici m . (Na obr. 142 trojúhelník CBK .)
2. Při označení podle obr. 142 sestrojíme bod F jako průsečík kružnice m s úsečkou AK . \square



Obr. 142

Při práci s programem Cabri II+ si můžete při této konstrukci usnadnit práci využitím makrokonstrukce FERMAT 0.mac nebo FERMAT 1.mac, které lze do souboru, s nímž pracujete, vložit ze složky PŘÍLOHA 1.



Obr. 143

Shrnutí podstatných vlastností:

V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly menšími než 120° (obr. 143) platí:

1. Kružnice opsané rovnostranným trojúhelníkům CBK , ACL a BAM se protínají ve Fermatově bodě F .
2. Úsečky AK , BL a CM jsou stejně dlouhé, každé dvě z nich svírají úhel 60° a protínají se v bodě F .
3. Když pro libovolný bod X dané roviny označíme

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX|, \text{ pak}$$

$$S(X)_{\min} = |AF| + |BF| + |CF|$$

a zároveň

$$S(X)_{\min} = |AK| = |BL| = |CM|.$$

Cvičení

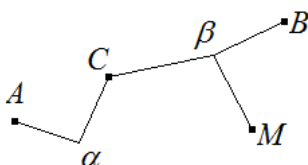
- CKU_76. Uvažujme libovolný rovnostranný kladně orientovaný trojúhelník ABC s výškou v a libovolný bod M roviny ABC . (Orientace trojúhelníka ABC je kladná, jestliže pohyb po hranici trojúhelníka v pořadí $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ probíhá proti směru pohybu hodinových ručiček. Probíhá-li tento pohyb po směru pohybu hodinových ručiček, je orientace trojúhelníka ABC záporná. Při volbě orientace musíme rozlišovat pořadí, v jakém zapisujeme vrcholy trojúhelníka: Při pevně zvolených nekolineárních bodech A, B, C mají trojúhelníky ABC, BCA a CAB tutéž orientaci, která je opačná než orientace trojúhelníků BAC, CBA a ACB .) Vzdálenosti x bodu M od přímky BC přiřadíme buď znaménko "+", je-li trojúhelník MBC orientován kladně, nebo znaménko "-", je-li trojúhelník MBC orientován záporně. Analogicky přiřadíme znaménko vzdálenosti y (resp. z) bodu M od přímky CA (resp. AB) podle orientace trojúhelníka MCA (resp. MAB). Dokažte, že při této znaménkové dohodě platí: $|x + y + z| = v$.
- CKU_77. Pomocí tvrzení z úlohy CKU_76 dokažte větu 14.
- CKU_78. Jsou dány čtverce $OABC$ a $OKLM$. Dokažte, že úsečky AK a CM jsou shodné a navzájem kolmé. (Využijte otočení jako při řešení úlohy 53, podobně řešte i úlohy CKU_79 a CKU_80.)
- CKU_79. Dokažte van Schootenovu větu: *Pro libovolný bod X , který leží na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC , je jedna z jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníka rovna součtu zbývajících dvou.*
- CKU_80. Dokažte větu: *Je-li ABC rovnostranný trojúhelník a X bod, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC , pak $|AX| + |BX| \geq |CX|$. Kdy platí rovnost?*

3.3.2 Steinerova úloha

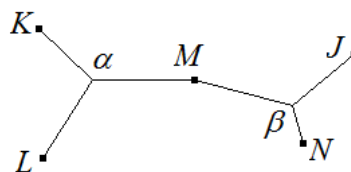
V tomto odstavci vycházíme z článku [15]. Budeme užívat některé pojmy z teorie grafů, terminologii si však (v souladu s [15]) poněkud upravíme:

Nechť je v rovině dáno u bodů, které budeme nazývat **uzly**. **Uzlový graf**, nebo stručněji jen **graf** je soustava uzlů, z nichž některé jsou spojeny čarami. Tyto čáry nazýváme **hrany grafu**. Termínem **sít'** rozumíme takový soubor úseček, ve kterém jsou libovolné dva uzly spojeny lomenou čarou z těchto úseček. Přitom každá úsečka sítě náleží lomené čáře spojující některé dva uzly. Konce úseček sítě, které nejsou uzly, budeme nazývat **vidlice**. Uzly značíme (jako body v rovině) velkými písmeny latinské abecedy a zakeslujeme je jako větší tečky, zatímco vidlice budeme značit malými písmeny řecké abecedy a v obrázcích je ponecháváme jako konce úseček bez zvýraznění. **Délka sítě** je součet délek všech úseček sítě.

Na obr. 144 a obr. 145 vidíme příklady grafů, které jsou sítě.

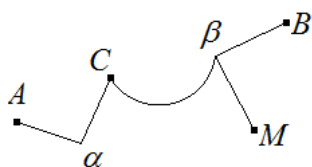


Obr. 144

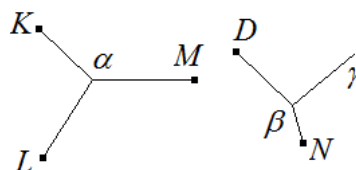


Obr. 145

Obrázky 146 a 147 představují grafy, které nejsou sítě. Graf na obr. 146 není síť, protože čára $C\beta$ není úsečka. Graf na obr. 147 není síť, protože není souvislý, to znamená, že se například z uzlu K nedostaneme do uzlu D po úsečkách. Navíc úsečka $\beta\gamma$ nenáleží lomené čáře spojující uzly.



Obr. 146



Obr. 147

Steinerova úloha spočívá v úkolu nalézt pro danou množinu uzlů A_1, A_2, \dots, A_u síť minimální délky. Pro $u = 2$ je sítí minimální délky úsečka s krajními body A_1 a A_2 . Pro $u = 3$ jsme celé řešení uvedli v úloze 56. Zkusíme nyní Steinerovu úlohu vyřešit pro $u = 4$. Nejprve za předpokladu, že se dané uzly nachází ve vrcholech obdélníka.

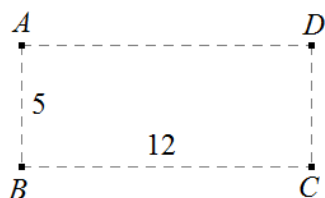
Úloha 57. Vyřešte Steinerovu úlohu, jsou-li dané uzly ve vrcholech obdélníka $ABCD$, $|AB| = 5$ cm a $|BC| = 12$ cm (obr. 148).

Řešení (s komentářem). Nezkoušeného řešitele obvykle napadne, že je řešením dvojice úhlopříček AC a BD s vidlicí α ve středu obdélníka (obr. 149). Taková síť není nejkratší. Její délka je

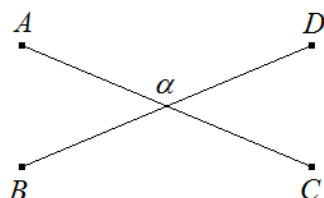
$$s_1 = 2\sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = 26 \text{ cm},$$

zatímco délka sítě s_2 na obr. 150 je jen 22 cm. Ani ta není nejkratší. Lomenou čáru BCD lze totiž nahradit soustavou úseček $B\alpha$, $C\alpha$ a $D\alpha$, kde α je Fermatův bod trojúhelníka BCD (obr. 151). Výpočtem se přesvědčíme, že

$$|B\alpha| + |C\alpha| + |D\alpha| < |BC| + |CD|.$$



Obr. 148



Obr. 149



Obr. 150

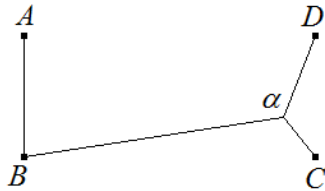
Při označení podle obr. 152 je

$$|B\alpha| + |C\alpha| + |D\alpha| = |BK| = \sqrt{(|BC| + |CQ|)^2 + |KQ|^2}, \quad (19)$$

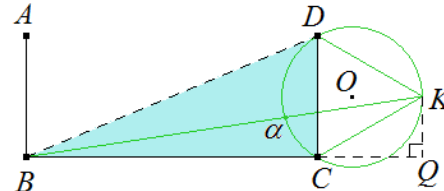
kde délka úsečky CQ rovna výšce rovnostranného trojúhelníka CDK , tedy $|CQ| = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm,

a $|KQ| = \frac{5}{2}$ cm. Po dosazení do (19) vypočteme

$$s_3 = |BK| + |AB| = 16,20 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 21,20 \text{ cm}.$$

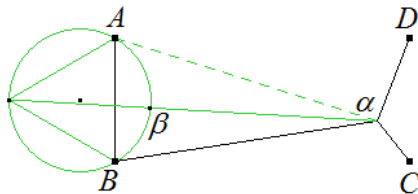


Obr. 151

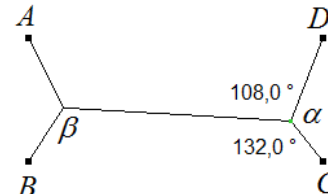


Obr. 152

Ani tato síť z obr. 151 není minimální, protože ji můžeme zkrátit, když lomenou čáru nahradíme úsečkami $A\beta$, $B\beta$ a $C\beta$, kde β je Fermatův bod trojúhelníka $AB\alpha$ (viz obr. 153 a 154).



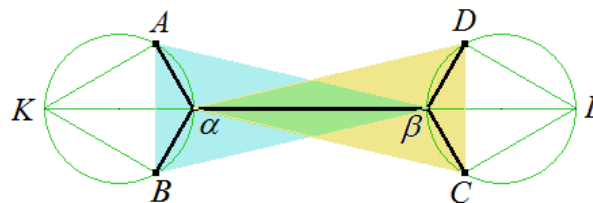
Obr. 153



Obr. 154

Po této úpravě není vidlice α Fermatovým bodem v trojúhelníku βCD , lze tedy provést další zkrácení, když ji nahradíme vidlicí γ , jež tímto Fermatovým bodem je. Tak bychom mohli stále pokračovat, avšak nejkratší síť touto cestou nikdy zcela přesně nesestrojíme.

Zkusíme tedy postupovat jinak: Dosavadní úvahy naznačují, že minimální síť má dvě vidlice,⁸ označíme je α a β v souladu s obr. 155, na němž je předpokládaná minimální síť vyznačena silně. Přitom α je Fermatovým bodem v trojúhelníku $AB\beta$, zatímco β je Fermatovým bodem v trojúhelníku $CD\alpha$.



Obr. 155

Pro délku této sítě platí:

$$\begin{aligned} s &= |A\alpha| + |B\alpha| + |\alpha\beta| + |C\beta| + |D\beta| = (|A\alpha| + |B\alpha| + |\alpha\beta|) + (|C\beta| + |D\beta| + |\alpha\beta|) - |\alpha\beta| = \\ &= |K\alpha| + |L\beta| - |\alpha\beta| = |KL| = (12 + 5\sqrt{3}) \text{ cm} = 20,66 \text{ cm}. \end{aligned}$$

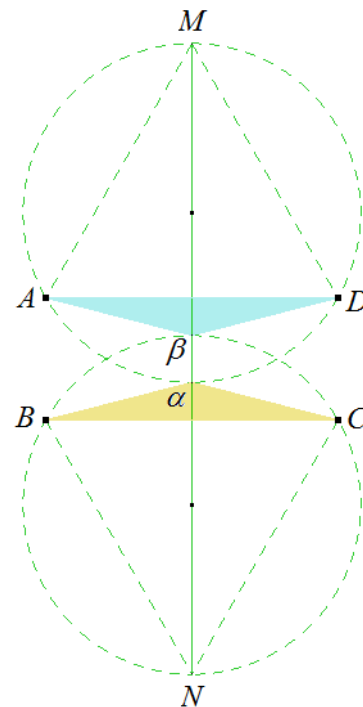
⁸ Tento fakt přesněji zdůvodňuje níže uvedená věta 17.

Sít' na obr. 155 má úsečku $\alpha\beta$ rovnoběžnou s přímkou BC . Může však existovat sít' stejného typu, která má úsečku $\alpha\beta$ rovnoběžnou s přímkou AB a délku s_2 . Sít' z obr. 155 je tedy minimální jen tehdy, když platí $s_1 < s_2$, resp. když sít' s úsečkou $\alpha\beta$ rovnoběžnou s přímkou AB neexistuje.⁹ Je-li $s_1 > s_2$, má nejmenší délku sít' II s úsečkou $\alpha\beta$ rovnoběžnou s přímkou AB .

Konstrukce sítě II je znázorněna na obr. 156. Vidíme, že sít' II neexistuje, protože se kružnice opsané rovnostranným trojúhelníkům ADM a BCN protínají. (Fermatův bod α trojúhelníka $AD\beta$ nemůže ležet vně tohoto trojúhelníka.)

Závěr. Nejkratší je sít' z obr. 155 délky $s = (12 + 5\sqrt{3})$ cm.

Pozorný čtenář si zajisté uvědomil, že naše řešení má jisté nedostatky. Vycházeli jsme příliš z názoru. Dostatečně jsme nezdůvodnili, že minimální sít' existuje a že je právě uvedeného typu. Zformulujeme nyní základní vlastnosti každé minimální sítě a na závěr sestavíme algoritmický postup řešení Steinerovy úlohy s u zadanými uzly.



Obr. 156

Věta 17. Každá minimální sít' má tyto vlastnosti:

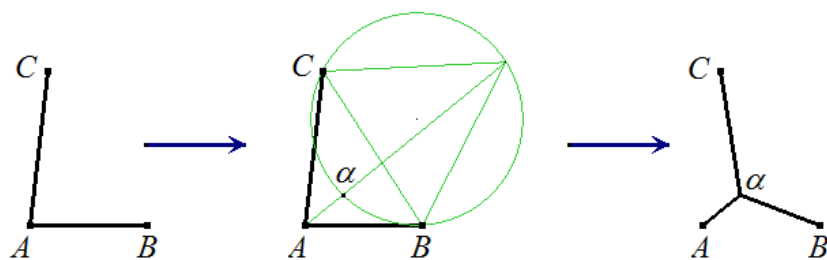
1. Z každého uzlu vychází jedna, dvě, nebo tři úsečky.
2. Jestliže z uzlu vychází dvě úsečky, je úhel mezi nimi větší nebo roven 120° .
3. Jestliže z uzlu vychází tři úsečky, je úhel mezi každými dvěma z nich roven 120° .
4. Z každé vidlice vychází právě tři úsečky a každé dvě z nich svírají úhel 120° .
5. Nejkratší sít' neobsahuje cykly (to znamená uzavřené lomené čáry tvořené úsečkami sítě).

Poznámka. Vidlice minimální sítě se též nazývají **Steinerovy body**. Stručnější název vidlice je převzat z článku [15].

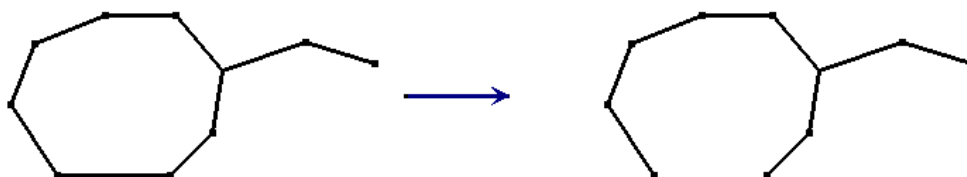
Důkaz věty 17 je jednoduchý. Kdyby některé dvě úsečky sítě vycházely z téhož bodu (uzlu nebo vidlice) a svíraly úhel menší než 120° , dala by se celková délka sítě zkrátit postupem podle obr. 157. Důsledkem tohoto faktu jsou tvrzení 1 až 4.

Pokud sít' obsahuje cyklus, lze zkrátit celkovou délku sítě odebráním úsečky (obr. 158). \square

⁹ Rovnost $s_1 = s_2$ neuvažujeme. Ta může nastat jen pro čtverec. Přesvědčte se o tom vyřešením úlohy CKU_81.



Obr. 157



Obr. 158

Souvislý graf, který neobsahuje cykly, se nazývá **strom**. Z pátého tvrzení věty 17 plyne, že **každá minimální síť je strom**. Z toho plyne, že počet n všech uzlů a vidlic minimální sítě je vždy o 1 větší než počet h všech jejích úseček:

$$n - 1 = h \quad (20)$$

(Nejjednodušší síť je úsečka, která spojuje dva uzly, tedy $n = 2$ a $h = 1$. S přidáním každé další úsečky musíme přidat buď uzel nebo vidlici, rozdíl $n - h$ tedy zůstává roven jedné.

Rovnost (20) využijeme k odvození vztahů pro počet vidlic. Budeme užívat toto označování:

u ... počet všech uzlů sítě,

u_1 ... počet všech uzlů, ze kterých vychází právě jedna úsečka,

u_2 ... počet všech uzlů, ze kterých vychází právě dvě úsečky,

u_3 ... počet všech uzlů, ze kterých vychází právě tři úsečky,

v ... počet všech vidlic sítě.

Vztah (20) lze psát ve tvaru $h = u + v - 1$. Navíc víme, že z každé vidlice vychází právě tři úsečky a z každého uzlu aspoň jedna úsečka. Platí tedy $h \geq \frac{3v+u}{2}$, neboli $u + v - 1 \geq \frac{3v+u}{2}$.

Odtud po úpravě dostaneme jednoduchý vztah pro odhad počtu vidlic minimální sítě:

$$v \leq u - 2. \quad (21)$$

Vztah (21) umožňuje horní odhad počtu vidlic. Pro řešení konkrétních typů sítí odvodíme vztah (22) pro přesné určení počtu vidlic. Vzhledem k tomu, že $u = u_1 + u_2 + u_3$ dostáváme

$$u_1 + u_2 + u_3 + v - 1 = h = \frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 3v}{2}$$

a odtud po úpravě

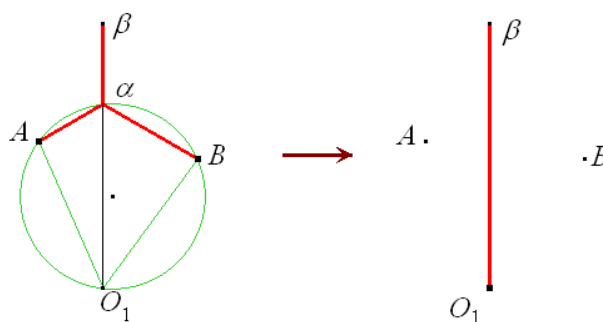
$$v = u_1 - u_3 - 2. \quad (22)$$

Poznatky využijeme ke stanovení algoritmického postupu řešení obecné Steinerovy úlohy. Vycházíme z předpokladu, že hledaná minimální síť existuje, což není korektní. Navíc se záměrně vyhneme nepříjemným situacím, které by mohly nastat. Nicméně tyto nedostatky nebrání nalezení minimální sítě pro některé nepříliš složité situace.

Postup obecného řešení Steinerovy úlohy

1. Nejprve zjistíme, které uzly jsou přímo spojeny úsečkami a pomocí (21) odhadneme počet vidlic.
2. Nakreslíme schémata sítí, které přicházejí v úvahu. Musí jich být konečný počet, protože vidlic je nejvýše $u - 2$ (u je počet uzlů).
3. Dále vyšetřujeme jednotlivé typy grafů postupným zjednodušováním. Dodržujeme tyto algoritmy:
 - a) Jsou-li některé dva uzly přímo spojeny, získáme odstraněním příslušné úsečky dvě sítě z menším počtem uzlů. Tím úlohu převedeme na vyřešení dvou jednodušších úloh.

- b) Po důsledném provedení kroku a) řešíme již jen takové sítě, z nichž z každého uzlu směřují úsečky pouze do vidlic. Protože je počet uzlů podle vztahu (21) větší než počet vidlic, vedou aspoň ze dvou uzlů úsečky do téže vidlice α (obr. 159). Označme tyto uzly A, B . Je zřejmé, že α je Fermatův bod v nějakém trojúhelníku $AB\beta$ (přitom je jedno, zda β je vidlice nebo uzel). Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABO_1 vně připsaný trojúhelníku $AB\beta$. Již víme, že vidlice α leží na úsečce βO_1 a zároveň $|A\alpha| + |B\alpha| + |\alpha\beta| = |\beta O_1|$. Můžeme tedy úsečky $A\alpha$, $B\alpha$ a $\alpha\beta$ nahradit jedinou úsečkou βO_1 . Po této operaci jsou uzly A, B nahrazeny jediným uzlem O_1 . Počet uzlů i počet vidlic je zmenšen o 1. Tento postup opakujeme tak dlouho, až počet uzlů a vidlic nelze dále snižovat. Obdržíme úsečku se dvěma koncovými body, jejíž délka je délkou minimální sítě. Zpětnou konstrukcí nalezneme polohu všech vidlic.



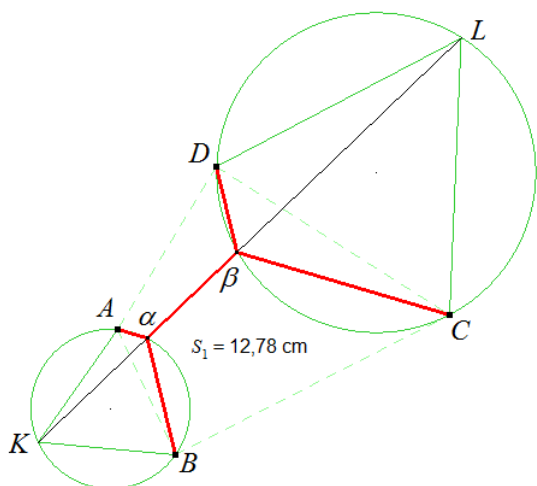
Obr. 159

Úloha 58. Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy obecného konvexního čtyřúhelníka $ABCD$, jehož vnitřní úhly mají velikost menší než 120° .

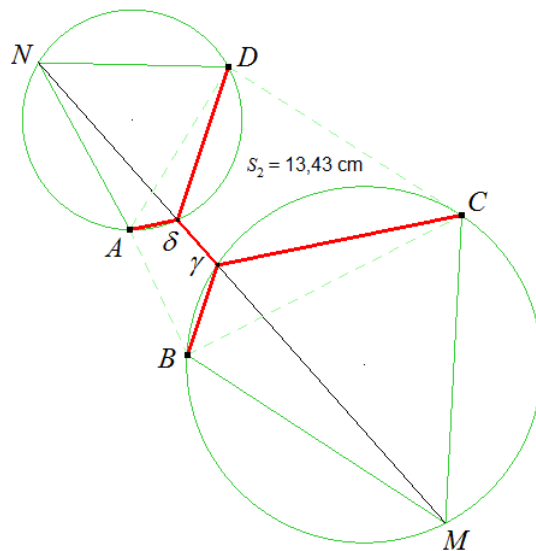
Řešení. Vzhledem k omezení velikosti vnitřních úhlů vychází v minimální síti z každého uzlu právě jedna úsečka. Je tedy $u_1 = 4$ a $u_2 = u_3 = 0$. Podle (22) je počet vidlic $v = 4 - 2 = 2$.

V úvahu připadají dvě sítě téhož typu, každá se dvěma vidlicemi. Na obr. 160 je síť I narysovaná v programu Cab ri II+. Konstrukce je zřejmá, délka sítě $s_1 = |KL| = 12,78 \text{ cm}$ je zaokrouhlená a byla změřena programem. Na obr. 161 vidíme síť II, $s_2 = 13,43 \text{ cm}$.

Závěr. Minimální délku $s_1 = 12,78 \text{ cm}$ má síť na obr. 157.

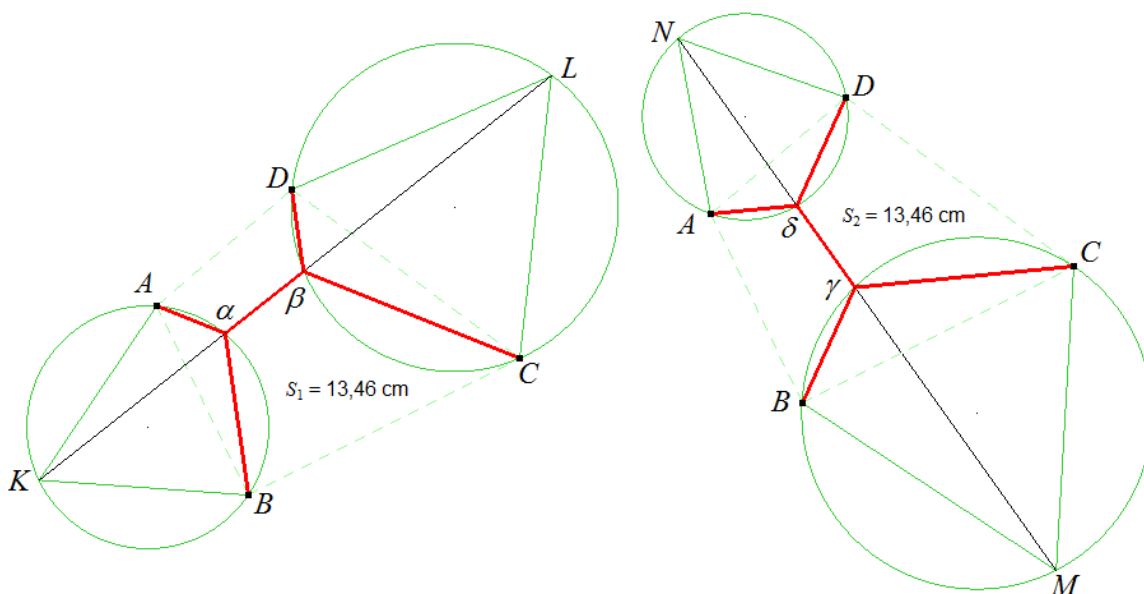


Obr. 160



Obr. 161

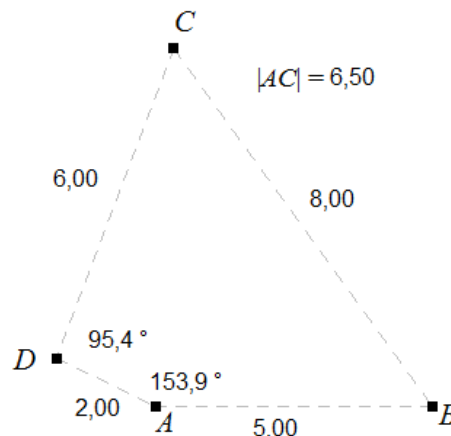
Poznámka. Při hledání minimální sítě pro uzly ve vrcholech čtyřúhelníka z úlohy 58 vyšetřujeme v obecné situaci dvě sítě téhož typu. Minimální je ta z nich, která má kratší délku. Někdy se může stát, že jedna ze sítí neexistuje, jak jsme viděli při řešení úlohy 57. Na obr. 162 je ukázka čtyřúhelníka, pro něž mají obě sítě stejnou délku, úloha má dvě řešení.



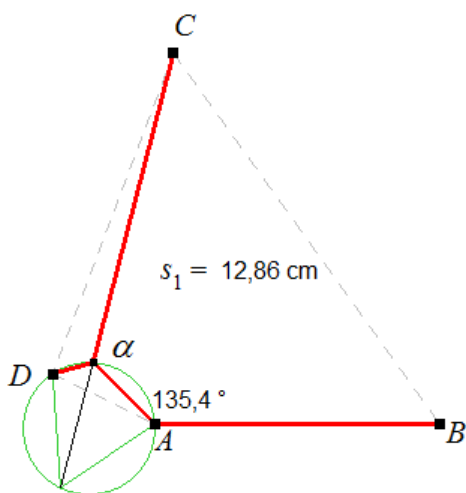
Obr. 162

Úloha 59. Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$ zadaného takto: $|AB| = 5,00\text{ cm}$, $|BC| = 8,00\text{ cm}$, $|CD| = 6,00\text{ cm}$, $|DA| = 2,00\text{ cm}$ a $|AC| = 6,50\text{ cm}$.

Řešení. Podle vztahu (21) má minimální síť nejméně dvě vidlice. Na obr. 163 je daný čtyřúhelník zobrazen. Úhel BAD je větší než 120° . Na rozdíl od předchozí úlohy je nutno do řešení zařadit i situace, kdy má síť 1 vidlici. Uvažujme tedy nejprve, že z uzlu A vedou dvě úsečky: Jedna do sousedního uzlu B a druhá do vidlice α , která je zřejmě Fermatovým bodem trojúhelníku ACD .

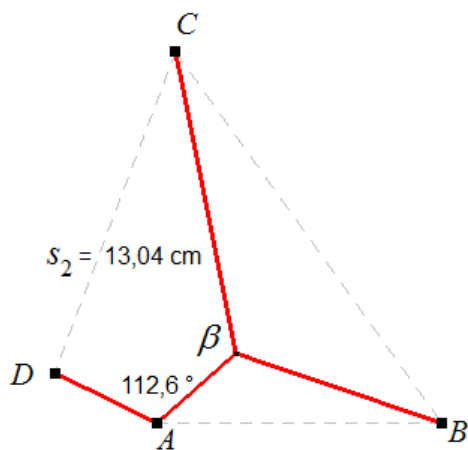


Obr. 163

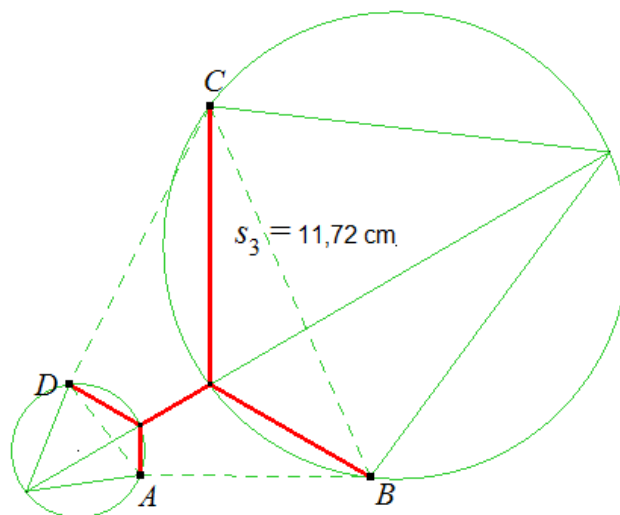


Obr. 164

Konstrukci i délku sítě představuje obr. 164. Na obr. 165 je sestrojena síť téhož typu, tentokrát úsečka z uzlu A směřuje do uzlu D . Vidíme, že síť je delší a navíc nesplňuje vlastnosti minimální sítě, neboť dvě úsečky svírají úhel menší než 120° .



Obr. 165



Obr. 166

Ze sítí se dvěma vidlicemi je realizovatelná jen ta, kterou znázorňuje obr. 166. Ta je řešením naší úlohy. Má délku $11,72\text{ cm}$.

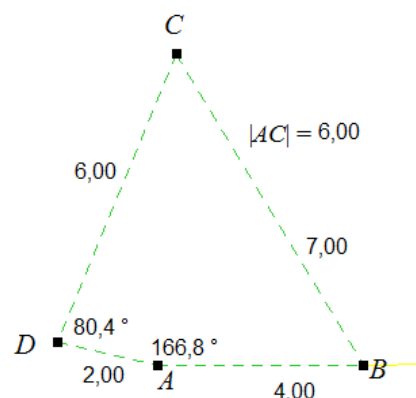
V další úloze jsou uzly ve vrcholech čtyřúhelníka, který se příliš neliší od předchozího. Výsledkem je však síť jiného typu.

Úloha 60. Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$: $|AB| = 4,00$ cm, $|BC| = 7,00$ cm, $|CD| = 6,00$ cm, $|DA| = 2,00$ cm a $|AC| = 6,00$ cm.

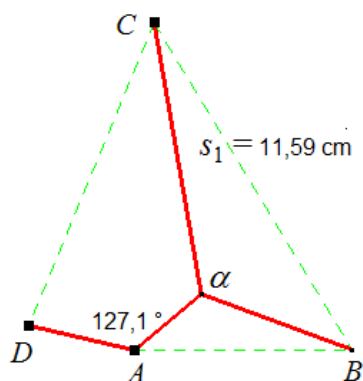
Řešení provádíme stejně jako v úloze 59.

Sítě s jednou vidlicí jsou sestrojeny na obr. 168 a 169. Síť se dvěma vidlicemi neexistují. Na obr. 170 vidíme konstrukci jedné z nich. Vidlice α ze nachází vně toho oblouku AD , který by měla protínat. Konstrukce naznačuje, že smysluplné řešení nastane, když bod O_2 spojíme přímo s uzlem A . Takto opravená konstrukce povede k síti na obr. 168.

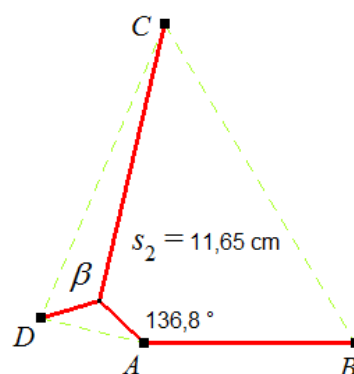
Závěr. Minimální síť je na obr. 169 a má délku 11,65 cm.



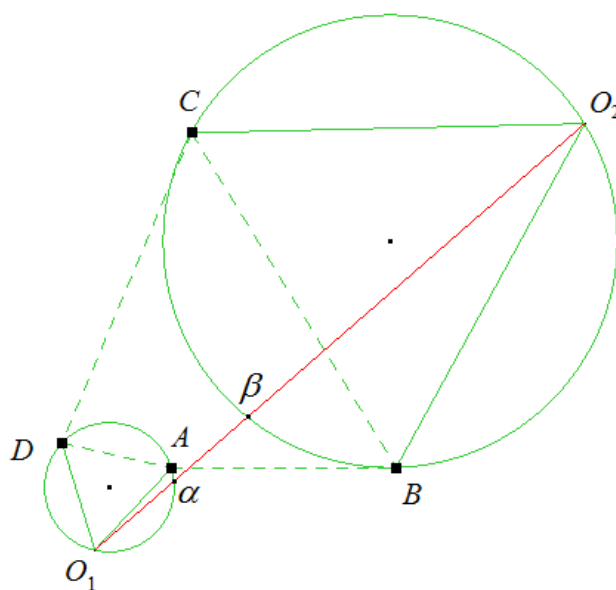
Obr. 167



Obr. 168



Obr. 169



Obr. 170

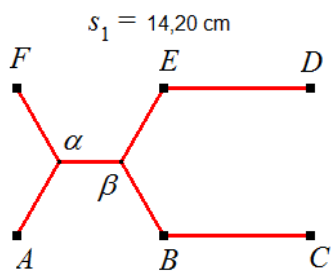
Úloha 61. Obdélník $ACDF$ má $|AC|=6\text{ cm}$ a $|CD|=3\text{ cm}$. Bod B je střed strany AC a bod E je střed strany DF . Vyřešte Steinerovu úlohu pro množinu uzlů $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Řešení. Ze (21) je počet možných vidlic $v \leq 6 - 2 = 4$. Přesvědčte se, že minimální síť s jednou vidlicí není možná.

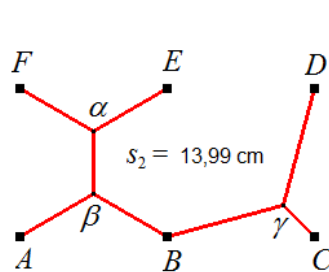
Pro $v = 2$ přichází v úvahu pouze síť na obr. 171 (s ní shodnou síť s vidlicemi uvnitř čtverce $BCDE$ nepovažujeme za jiné řešení). Podmínky minimální sítě splňuje, protože úhly βED a βBC mají velikost 120° . Její (zaokrouhlená) délka je $s_1 = 14,20\text{ cm}$.

Síť se třemi vidlicemi je také (až na symetrickou záměnu) jediná. Je znázorněna na obr. 172. Podmínky minimální sítě splňuje, $|\angle\beta B\gamma| = 135^\circ$, $s_2 = 13,99\text{ cm}$.

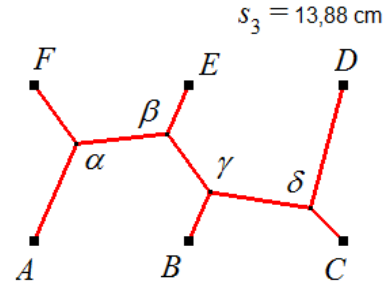
Teprve poslední možnost vede k minimální síti, kterou vidíme na obr. 173, má čtyři vidlice a její délka je $s_3 = 13,88\text{ cm}$. Postup konstrukce sítě je zřejmý z obr. 174 a můžeme si jej po krocích zobrazit v souboru $KU_61.\text{fig}$.



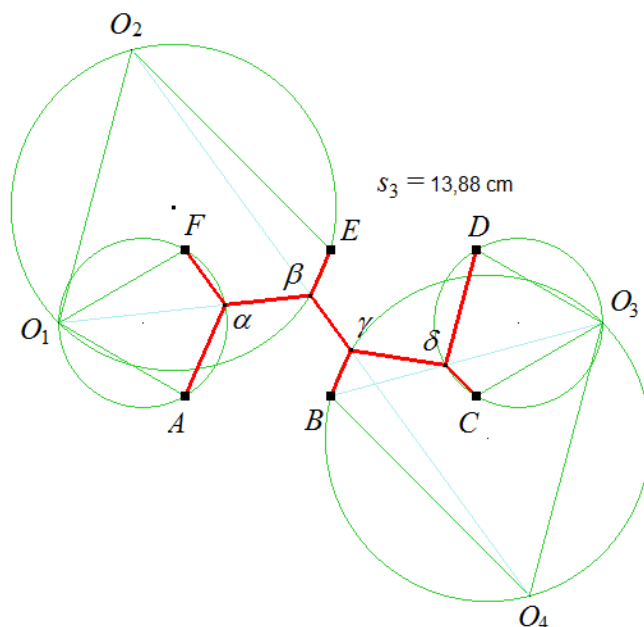
Obr. 171



Obr. 172



Obr. 173



Obr. 174



Konstrukce

- 1 Trojúhelník AFO_1 s opsanou kružnicí.
- 2 Trojúhelník EO_1O_2 s opsanou kružnicí.
- 3 Trojúhelník CDO_3 s opsanou kružnicí.
- 4 Trojúhelník BO_3O_4 s opsanou kružnicí.
- 5 Úsečka O_2O_4 , vidlice β, γ .
- 6 Úsečky $O_1\beta$ a $O_2\gamma$.
- 7 Síť

Vytvoření jednodušších minimálních sítí můžeme názorně demonstrovat pomocí mýdlových blan, když si vyrobíme vhodné Plateauovy mřížky. Potřebujeme k tomu bezbarvé plexisklo (stačí tloušťka 2 mm), měděný izolovaný drát tloušťky kolem 1 mm, štípací kleště, nůž, dřevěnou podložku, tužku, pravítko, kružítko, vrtačku s vrtáčkem o takovém průměru, aby se dal odizolovaný drát do dírky těsně zasunout, a vhodný nástroj na řezání plexiskla (postačila mi obyčejná ruční pilka s jemnými zoubky).

Zakoupené plexisklo má povrch polepený papírem, aby se nepoškrábalo. Rýsování tužkou na něj nečiní problémy. Proto papír před výrobou nesundáváme. Z plexiskla vyřízneme dvě shodné destičky, rozměru např. 4×5 cm, a narýsujeme si na jednu z nich soustavu uzlů, k níž hledáme minimální síť. Potom desky přiložíme k sobě, aby se kryly, a provrtáme dírky v místech uzlů. Okraje destiček můžeme zabrousit smirkovým papírem nebo pilníkem. Potom z destiček sundáme krycí papír a omyjeme je ve vlažné vodě.

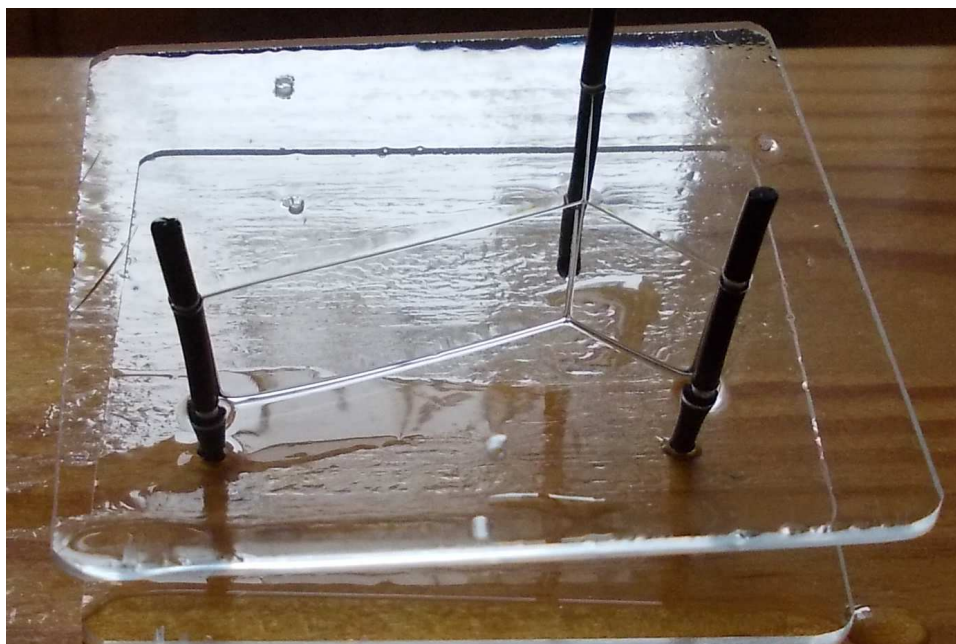


Obr. 175

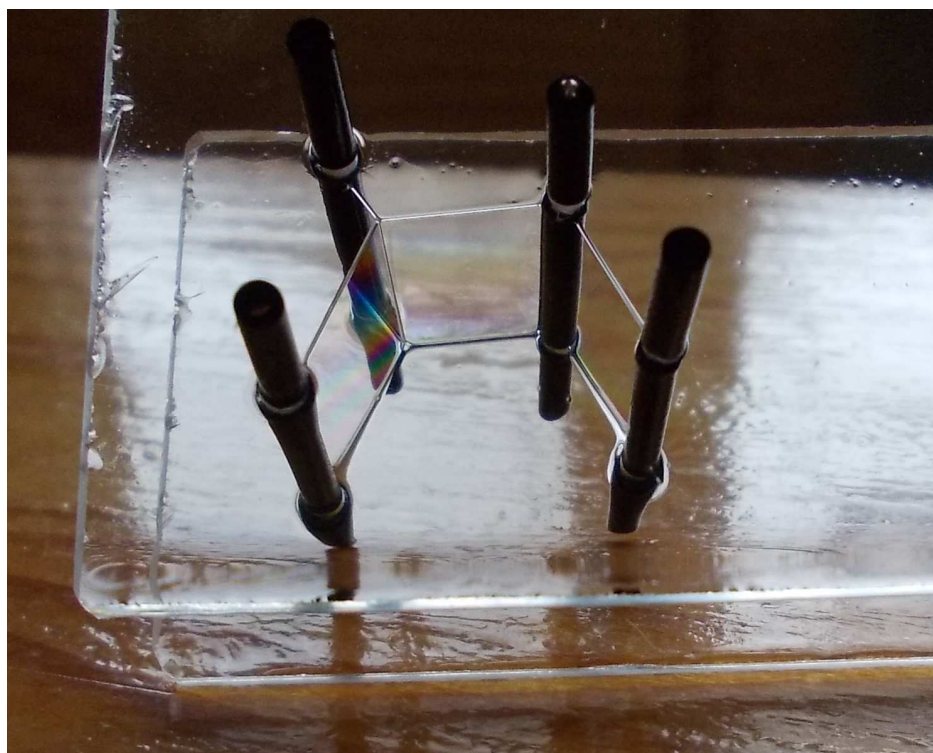
Z drátu si nastříháme stejně dlouhé kousky a z každé strany odřízneme izolaci stejné délky. Konkrétně jsem nastříhal kousky délky 35 mm a z každé strany odřízl 10 mm izolace. Prostřední část drátu měla navlečenou izolaci délky 15 mm, viz obr. 175. Izolaci odřezáváme tak, aby stažená část tvořila neporušenou trubičku. Minimální počet takových stejných kousků drátu je roven počtu uzlů. Potom drátky nastrkáme do dírek v destičkách a na vyčnívající neizolované konce navlékneme stažené kousky izolace, jak je vidět na obrázcích 176 a 177.

Hotovou pomůcku ponoříme do dostatečně velké nádoby s vodou, do níž jsme přidali trochu Tepu, resp. Jaru nebo jiného vhodného saponátu. Po vytažení se povrchová blána kapaliny stahuje tak, aby její povrch byl co nejmenší. Protože jsou destičky rovnoběžné, vytváří blána mezi deskami proužek konstantní šířky. Povrch proužku je minimální, právě když je minimální délka proužku. Ta je rovna délce sítě.

Na obr. 176 vytvořila blána saponátového roztoku model minimální sítě pro uzly ve vrcholech trojúhelníka (jinými slovy je to demonstrace Fermatova bodu). Obrázek 177 představuje minimální síť pro uzly ve vrcholech čtyřúhelníka, který má jeden vnitřní úhel větší než 120° .

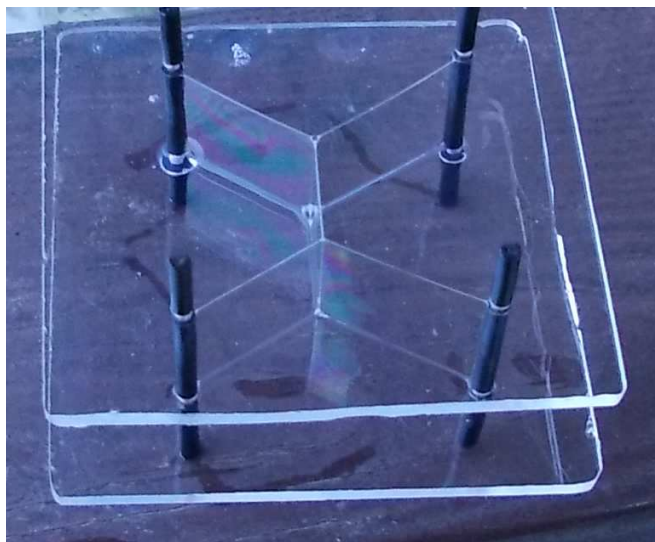


Obr. 176



Obr. 177a

Není to krásné, když příroda takto vyřeší extrémní úlohu za nás? Bohužel jsou naše modely vhodné jen k demonstraci vypočtených výsledků. Mají řadu nedostatků. Uvedeme tři základní:



Obr. 177b

1. Saponátová blána nepřilne vždy správně k drátěným příčkám. Pro model k úloze 57 můžeme například po vytažení mřížky z kapaliny vidět dvě blány napnué podél stran AB a CD .
2. Vyrobena mřížka je jen nepřesný model ideální geometrické konfigurace. Nepřesnosti mohou negativně ovlivnit výsledek.
3. Ani saponátová blána se nechová ideálně. Díky drobným nehomogenitám se nemusí stahovat ve všech svých místech stejně. To se výrazně projeví zejména v takových situacích, kdy se k minimu blíží sítě několika různých typů a délky těchto sítí se od minima příliš neliší. Když jsem si vyrobil mřížku k úloze 61, vytvářela blána při opakování pokusu postupně modely všech tří sítí z obr. 171 až 173.

Cvičení

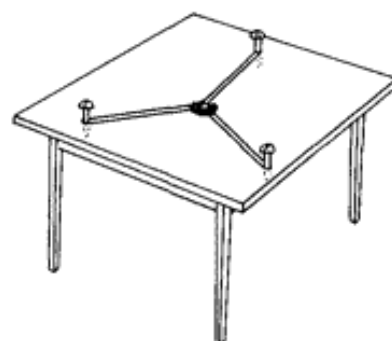
- CKU_81 Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy čtverce $ABCD$.
- CKU_82 Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$.
- CKU_83 Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy pravidelného n -úhelníka pro $n \geq 6$.
- CKU_84 Vyřešte Steinerovu úlohu pro vrcholy kosočtverec $ABCD$, v němž $|\angle ABC| = 140^\circ$.
- CKU_85 Ve Steinerově úloze pro vrcholy pravoúhelníka $ABCD$ je minimální ta z možných dvou sítí, která má úsečku $\alpha\beta$ rovnoběžnou s delší stranou. Obě sítě mají stejnou délku, právě když $|AB| = |BC|$. Obě tvrzení dokažte.
- CKU_86 Obdélník $ABCD$ má $|AB| = 6\text{ cm}$ a $|BC| = 2\text{ cm}$. Stranu AB rozdělují body E, F na tři shodné úsečky a stranu CD rozdělují body G, H rovněž na tři shodné úsečky. Vyřešte Steinerovu úlohu pro množinu uzlů $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
- CKU_87 Vyřešte Steinerovu úlohu pro uzly A, B, C, D , jsou-li A, B a C vrcholy rovnoramenného trojúhelníka se základnou AB a bod D leží uvnitř těžnice CS .
- CKU_88 Vyřešte Steinerovu úlohu pro uzly A, B, C, D, E, F, G , jestliže $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník a G jeho střed.

CKU_89 Lichoběžník se skládá ze tří rovnostranných trojúhelníků. Vyřešte Steinerovu úlohu pro uzly ve vrcholech těchto trojúhelníků.

CKU_90 Experimentálně ověřte úlohu pro vrcholy trojúhelníka a čtverce. Vytvořte si k tomu vhodné Plateauovy mřížky.

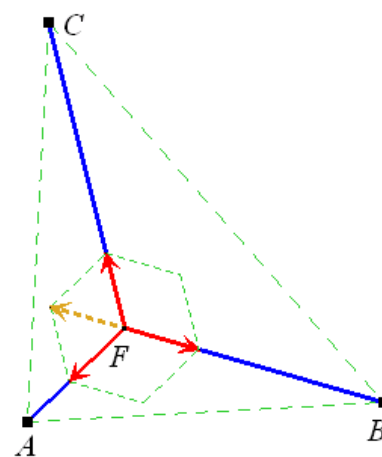
3.4 Myšlenkové experimenty

Na konci předchozího odstavce jsme experimentálně ověřovali teoretické výsledky. Viděli jsme, že při realizaci experimentů mohou nastat potíže. Co kdybychom zkusili provádět experimenty pouze v mysli? Vraťme se k Fermatově úloze nalézt bod, který má od vrcholů trojúhelníka minimální součet vzdáleností a představme si, že jsme trojúhelník narýsovali na stůl a do jeho vrcholů zatloukli hřebíčky. Dále napneme kolem nich tenkou gumičku (gumové vlákno všude stejného průřezu a všude stejných fyzikálních vlastností). Stáhneme ji do jednoho místa podle obr. 178 malinkým kroužkem tak, aby vlákno mohlo volně klouzat po povrchu kroužku. Gumička se ve všech svých místech stahuje stejnými silami a má nulové tření v místech styku s kroužkem i tam, kde se stýká s hřebíčky.



Obr. 178¹⁰

V průběhu stahování gumičky se bude kroužek pohybovat. Proces se zastaví v rovnovážné poloze. Gumička bude stažena na minimální délku a poloha kroužku se ustálí v bodě M . Výslednice tří stejně velikých sil, kterými gumička přitahuje kroužek ke hřebíčkům, je za rovnovážné polohy nulová. To znamená, že součet každých dvou sil (z uvažovaných tří) je stejně velký jako síla třetí, avšak směr má opačný. Tedy každé dva vektory těchto sil svírají úhel 120° , jak vidíme na obr. 179) kde modrá čára představuje napjaté gumové vlákno. Odtud plyne, že z bodu M jsou vidět strany trojúhelníka ABC pod úhly 120° . Bod M je tedy Fermatův bod a k této situaci dochází, když jsou úhly trojúhelníka menší než 120° . Pokud je některý z vnitřních úhlů trojúhelníka ABC větší než 120° , stáhne se gumička tak, aby kroužek byl ve vrcholu při tomto úhlu, neboť při označení podle obr. 180 je síla F_3 větší, než opačným směrem působící výslednice F_4 sil F_1 a F_2 . Výslednice všech tří sil způsobuje tlak na hřebíček v místě B . (Je-li $\beta = 120^\circ$, je tato výslednice v konečném působení B nulová.)

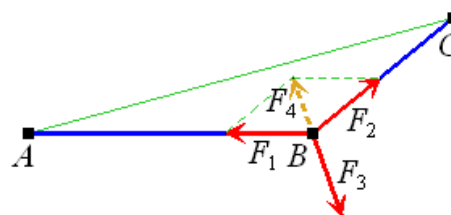


Obr. 179

¹⁰ Převzato z [11].

Gumička (nebo pružné vlákno) s nulovým třením může existovat pouze v našich představách. Provedení experimentu v praxi tedy nevede k očekávanému výsledku. V naší mysli však experiment probíhá za ideálních podmínek, jak jsme popsali. Jiný výsledek nepřipouštíme, protože by znamenal popření platných fyzikálních zákonů.

Ke stejným závěrům dojdeme i úvahami, jež vychází z principu minimální energie, viz [16] nebo [17].



Obr. 180

Myšlenkové experimenty představují účinnou metodu objevování nových poznatků v přírodních vědách. Ve starověku je využíval Archimédés, v novověku například Einstein, setkáme se s nimi v moderních učebnicích fyziky i jinde.

Na závěr se na několika příkladech seznámíme s Archimédovou "mechanickou metodou."

Archimédés vycházel z pojmu těžiště tělesa, což bylo působiště tíhové síly tělesa. V souvislosti s tím využíval tyto axiomy (tvrzení, jejichž pravdivost přijal na základě dlouholetých zkušeností).

I. Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.

II. (Zákon páky) Těžiště dvojice hmotných bodů A , B o hmotnostech m_1, m_2 je takový bod T úsečky AB , pro který platí $m_1 \cdot |AT| = m_2 \cdot |BT|$ (obr. 181).



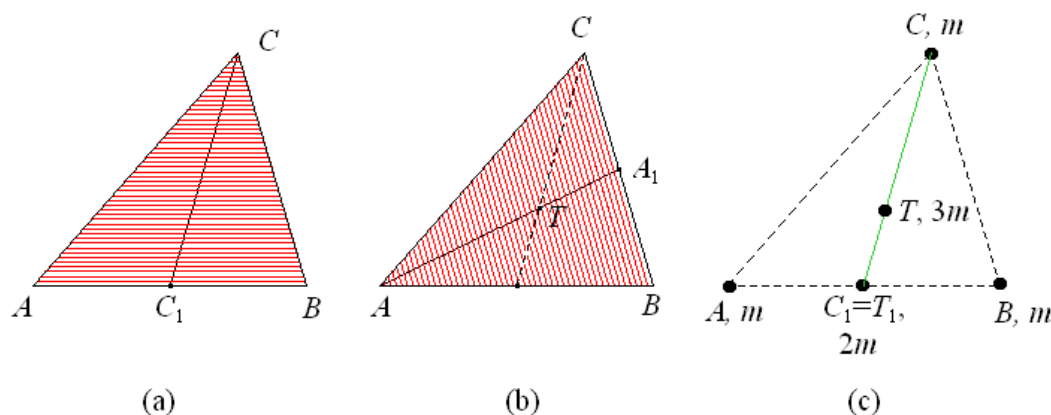
Obr. 181

III. (Princip redukce) Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tzv. podstoustavu) jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podstoustavy a majícím celou její hmotnost.

IV. Těžiště úsečky je v jejím středu.

Podstatu Archimédovy mechanické metody ukážeme na třech příkladech. Úsečky, body a jiné geometrické útvary nahradíme jejich modely, i když pro stručnost užíváme termíny úsečka, bod apod. Modely úseček mají nenulovou tloušťku a hmotnost, modely rovinných útvarů jsou planparalelní destičky s velmi malou (avšak nenulovou) tloušťkou a všude stejnou hustotou. Po rozřezání útvaru na úsečky můžeme úsečky přemístit a opět z nich složit původní útvar. Podobné operace provádíme s jejich rovinnými řezy, jež si představujeme jako velmi tenké homogenní destičky. Z hlediska matematiky je to nepřesný postup. Právě kvůli těmto problémům Archimédés pravděpodobně váhal se zveřejněním mechanické metody. Nakonec ji uvedl v dopise svému příteli Eratostenovi, všestrannému alexandrijskému učenci a knihovníkovi. Text dopisu byl nalezen až na začátku 20. století, když se zjistilo že jeden starý kodex je palimpsest (dokument vyrobený z popsaného pergamenu, v němž se původní text seškrábáním odstranil a nahradil textem jiným). Seškrábaný text byl zviditelněn a rozluštěn. Mimo jiné obsahoval Archimédovo poselství Eratostenovi.

1. Těžiště trojúhelníka. Představme si trojúhelník ABC jako množinu úseček rovnoběžných se stranou AB , obr. 182 (a). Každou úsečku lze nahradit hmotným bodem umístěným v jejím těžišti, které se nachází ve středu úsečky. Všechny takové hmotné body pokrývají úsečku C_1C , kde C_1 je střed strany AB . Těžiště T trojúhelníka je podle principu redukce totožné s těžištěm soustavy těchto hmotných bodů, leží na úsečce C_1C .



Obr. 182

Analogicky dokážeme, že těžiště leží na úsečce A_1A , kde A_1 je střed strany BC - obr. 182 (b) - resp. že těžiště leží na úsečce B_1B , kde B_1 je střed strany CA . Protože trojúhelník má právě jedno těžiště, protínají se úsečky A_1A, B_1B a C_1C v jediném bodě T .

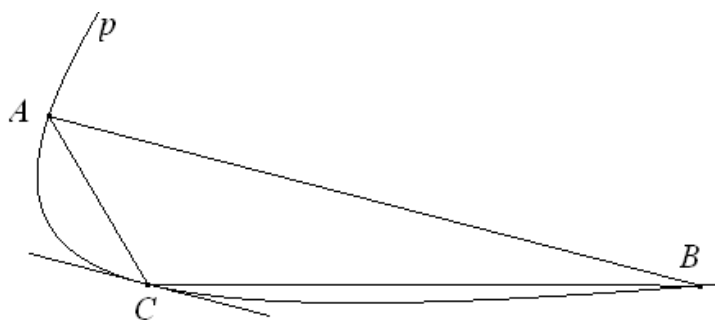
Dále ukážeme, že soustava tří hmotných bodů A, B , a C , které mají stejnou hmotnost m a nacházejí se ve vrcholech trojúhelníka, má těžiště ve stejném bodě jako původní trojúhelník - obr. 182 (c). Těžiště této soustavy můžeme nalézt tak, že hmotné body (A, m) a (B, m) nahradíme jejich těžištěm $(T_1, 2m)$, které však leží ve středu C_1 úsečky AB . Těžiště T soustavy všech tří bodů A, B, C leží na úsečce C_1C , neboť podle principu redukce je těžištěm bodů $(T_1, 2m)$ a (C, m) . Cyklickou záměnou bodů A, B, C v poslední úvaze zjistíme, že bod T leží také na úsečkách A_1A a B_1B , tedy v těžišti trojúhelníka ABC . Navíc pomocí pravidla páky pro body $(C_1, 2m)$ a (C, m) dostáváme $2m \cdot |C_1T| = m \cdot |CT|$, neboli $2|C_1T| = |CT|$.

Závěr: Nechť ABC je trojúhelník a A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy stran BC, CA, AB . Úsečky A_1A, B_1B a C_1C se nazývají těžnice trojúhelníka ABC . Protínají se v jediném bodě T , těžišti trojúhelníka, přičemž platí $|AT| : |TA_1| = |BT| : |TB_1| = |CT| : |TC_1| = 2 : 1$.

2. Kvadratura paraboly.

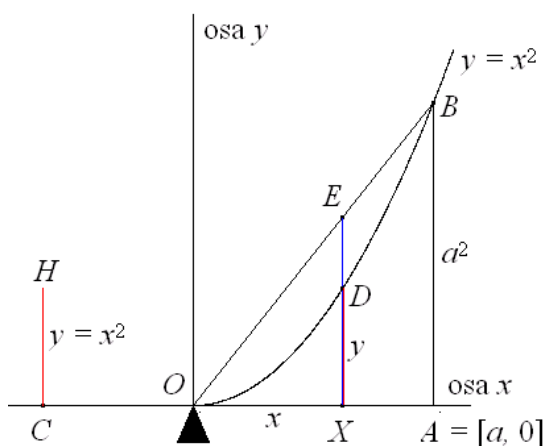
Archimédes mechanickou metodou zjistil a exhaustivní metodou dokázal větu:

Každá úseč sevřená parabolou p a její tětivou AB má obsah rovný $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníka ABC , kde C je bod dotyku paraboly s její tečnou rovnoběžnou s přímkou AB (obr. 183).

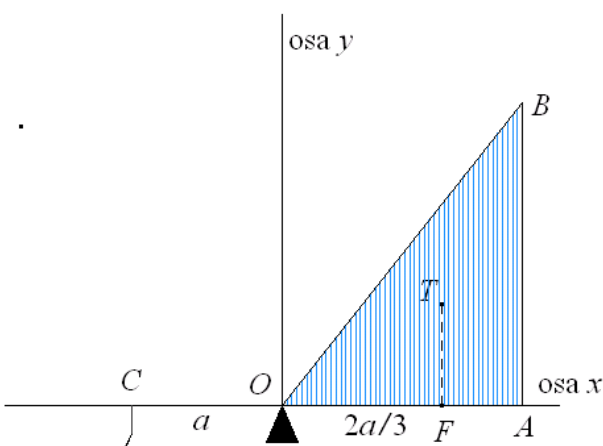


Obr. 183

Jeho odvození poslední věty je poměrně náročné. Ukážeme proto hlavní myšlenku na jednodušší úloze. Mechanickou metodou nalezneme obsah obrazce OAB pod grafem paraboly $y = x^2$ (obr. 184).



Obr. 184



Obr. 185

K obrazci OAB , který nazveme U přidejme trojúhelník ABO a označme jej V . Rovnoběžka s osou y v libovolném bodě $X = [x, 0]$ úsečky OA vytne na útvaru U úsečku DX délky $y = x^2$ a na trojúhelníku V úsečku EX , jejíž délku určíme z podobnosti trojúhelníků OXE a OAB :

$$\frac{|EX|}{|AB|} = \frac{|OX|}{|OA|}, \text{ neboli } \frac{|EX|}{a^2} = \frac{x}{a}. \text{ Odtud } |EX| = ax.$$

Dále považujeme osu x za páku podepřenou v bodě O , který je jejím těžištěm. Na této páce ponechme pouze (hmotné) úsečky EX a DX , přičemž úsečku DX posuneme do takové polohy

CH , aby byla s úsečkou EX (ponechanou na svém místě) vyvážena. Protože délky úseček jsou úměrné jejich hmotnostem, má zákon páky tvar $x^2 \cdot |OC| = ax \cdot x$ (obr. 184).

Odtud $|OC| = a$. Vidíme, že poloha bodu C nezávisí na volbě bodu X , a tak se rovnováha na páce neporuší, když všechny úsečky DX přemístíme do bodu C . Tam je složíme v útvar U , který v bodě C zavěsíme podle obr. 185. (Trojúhelník OAB zůstane na místě.) Hmotnosti desek - obrazců jsou úměrné jejich obsahům, $|OF| = \frac{2}{3}a$ a $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^3$. Vztahy dosadíme do podmínky rovnováhy $S_U \cdot |OC| = S_{ABC} \cdot |OF|$ pro situaci na obr. 185. Z ní určíme $S_U = \frac{1}{3}a^3$.

Správnost výsledku lze ověřit integrálním počtem: $S_U = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$.

Shrnutí. Necht' je dán útvar U , jehož obsah S neumíme nalézt standartním postupem. Podstatou hledání obsahu S Archimédovou mechanickou metodou je umístit útvar U na totéž rameno páky (reprezentované úsečkou podepřenou v bodě O) spolu s vhodně zvoleným tvarem V známého obsahu S_V tak, aby bylo možné po rozřezat oba útvary na úsečky (přesněji velmi tenké proužky ohraničené navzájem rovnoběžnými přímkami a hranicí útvaru) kolmé k ramenu páky, úsečky útvaru U přemístit na druhé rameno páky do místa C tak, aby se vyvažovaly s odpovídajícími úsečkami útvaru V a přitom měly všechny stejnou vzdálenost c od osy otáčení. Pak si lze útvar U představit zavěšený na páce v místě C a jeho obsah S určit z podmínky rovnováhy:

$$S \cdot |OC| = S_V \cdot |OF|,$$

kde F je kolmý průmět těžiště útvaru V na rameno páky.

Poznamenejme, že podstatnou a nejtěžší částí postupu je nalezení vhodného útvaru V a jeho polohy tak, aby se jeho úsečky po přemístění vyvažovaly s příslušnými úsečkami útvaru U .

Výpočet objemu koule

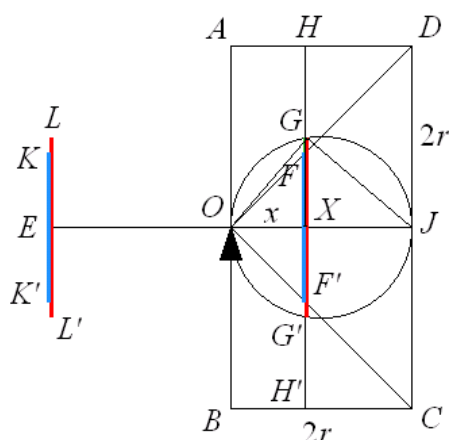
Archimédes určil jako první objem koule. Ukážeme, jak odvození pomocí mechanické metody popsal Eratostenovi.

Kouli o poloměru r s válcem a kuželem, které mají výšku r a poloměr podstavy $2r$, umístíme do sebe podle obr. 186 (obrázek představuje osový řez tělesy). Jejich společná osa OJ představuje páku, která je podepřená v bodě O . Tělesa rozřežeme na tenké plátky („kruhy“) rovinami kolmými na osu OJ .

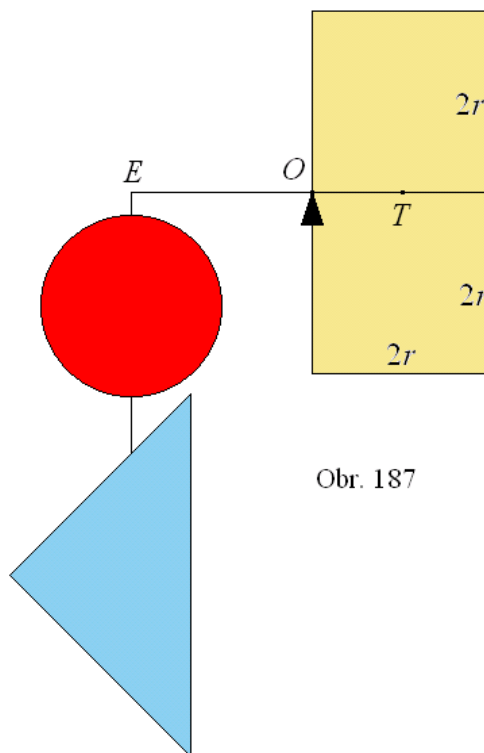
Na ose zvolíme bod X ve vzdálenosti x od O . Ta ze soustavy rovin, která jím prochází, vytíná na tělesech kruhy s poloměry $|FX| = x$ (neboť trojúhelník OXF je rovnoramenný, uvědomte si, že $AOJD$ je čtverec), $|GX| = \sqrt{x(2r-x)}$ (jak plyne z Euklidovy věty o výšce pro trojúhelník OJG) a $|HX| = 2r$. Ptáme se, do jaké vzdálenosti od bodu O je nutno posunout na opačné rameno páky dva menší z těchto kruhů, aby byly v rovnováze z kruhem největším.

Označme KK' a LL' polohy kruhů FF' a GG' po přemístění, bod E je jejich společný střed. Hmotnosti všech tří kruhů jsou úměrné jejich obsahům. Podmínka rovnováhy má tedy tvar

$$(\pi x^2 + \pi x(2r - x)) \cdot |OE| = (\pi(2r)^2) \cdot |OX|.$$



Obr. 186



Obr. 187

Po dosazení $|OX| = x$ a běžných úpravách určíme $|OE| = 2r$. Vzdálenost OE tedy nezávisí na poloze bodu X . Všechny plátky, na něž jsou koule i kužel rozřezány soustavou rovin, přemístíme a složíme z nich opět koule i kužel jako tělesa zavěšená na páku v bodě E , aniž by se porušila rovnováha (obr. 187). Hmotnosti těles jsou úměrné jejich objemům. Proto má podmínka rovnováhy na páce po přemístění těles tvar $(V + V_k) \cdot |OE| = V_v \cdot |OT|$, kde V je objem koule, $V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi(2r)^2 \cdot 2r$ objem kužele, $V_v = \pi(2r)^2 \cdot 2r$ objem válce a $|OT| = r$ vzdálenost jeho těžiště od bodu O . Určíme tedy

$$V = \frac{r}{2r} \cdot 8\pi r^3 - \frac{1}{3} 8\pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

nebo, jak by řekl Archimédes, objem koule je roven dvěma třetinám objemu kouli opsaného válce.

Cvičení

CKU_91 Promyslete, jak provléct gumičku na obr.178 kroužkem, aby zařízení (za předpokladu nulového tření) fungovalo výše popsáním způsobem.

CKU_92 Popsali jsme, jak Archimédes odvodil vlastnosti těžiště trojúhelníka. Analogickými úvahami odvodte vlastnosti těžiště čtyřstěnu: Jestliže T_A, T_B, T_C a T_D jsou po řadě

těžiště stěn BCD , CDA , DAB a ABC čtyřstěnu $ABCD$, pak se úsečky AT_A , BT_B , CT_C a DT_D , zvané těžnice čtyřstěnu, protínají v jediném bodě T a platí:

$$|AT|:|TT_A| = |BT|:|TT_B| = |CT|:|TT_C| = |DT|:|TT_D| = 3:1.$$

CKU_93 Užitím stejné metody ještě dokažte, že těžiště čtyřstěnu je společným středem všech tří středních příček čtyřstěnu. (Střední příčka čtyřstěnu je úsečka s krajními body ve středech jeho mimoběžných hran.)

Literatura

- [a] *Metody řešení geometrických úloh*, <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/mrg.html>
(webová stránka, z níž je možno stáhnout tento studijní text včetně zmiňovaných příloh).
- [1] Herman J., Chrápavá V., Jančovičová E., Šimša J.: *Matematika – Tercie, Geometrické konstrukce*, Prometheus, Praha, 1998.
- [2] Müllerová J., Čižmár J., Divíšek J., Macháček V.: *Matematika 7, II. díl*, Prometheus, Praha, 1990.
- [3] Polák J.: *Přehled středoškolské matematiky*, SPN, Praha, 1972.
- [4] Polák J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 1991.
- [5] Šarounová A., Bušek I., Růžičková J., Väterová V.: *Matematika 8, II. díl*, Prometheus, Praha 1999.
- [6] Šedivý J.: *Shodná zobrazení v konstrukčních úlohách*, edice Škola mladých matematiků, sv.3, Mladá fronta, Praha, 1962.
- [7] Šedivý J. a kol.: *Matematika pro I. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1984.
- [8] Vyšín J. a kol.: *Metodika řešení matematických úloh*, SPN, Praha, 1972.
- [9] Kuřina F.: *10 geometrických transformací*, Prometheus, Praha, 2002.
- [10] Leischner P.: *Geometrická zobrazení*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2010.
- [11] Galperin G. A., Zemljakov A. N.: *Matematické biljardy*, Nauka - Biblioteka KVANT, vypusk 77, Moskva, 1990.
http://www.math.ru/lib/ser/bmkvant?n=20&page=4&o=0&o_by=num
- [12] Tabachnikov S.: *Geometry and billiards*,
<http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf>
- [13] *Oeuvres de Fermat*, vol. 1, Paris 1891, Supplement: Paris 1922, p. 153
- [14] Honsberger R.: *Mathematical gems*, The Mathematical association of America, United States of America, 1973, p. 22-42.
- [15] Abakumov E. a kol.: *Kratčajiše seti*, Kvant, 1990, č. 3, str. 17-24,
<http://kvant.mccme.ru/1990/03/index.htm>
- [16] Šimša J.: *Potenciální energie a rovnováha sil v geometrii*, In. IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky, str. 145-163, JČMF, Praha, 2000.

- [17] Šimša J.: *Potenciální energie a rovnováha sil v geometrii*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 77 (2000), str. 12-29, JČMF, Praha.
- [18] Boček L., Zhouf J.: *Planimetrie*, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Praha, 2009.