O některých nedostatcích výuky školské geometrie

Pavel Leischner

Abstrakt

Metodika zavádění pojmu „úhel“ i terminologie u nás zaostává ve srovnání s některými sousedními zeměmi. Větu o obvodových úhlech v kružnici by bylo vhodné uvést jako důsledek věty o úhlu tětiv, která je u nás prakticky neznámá přes řadu nesporných výhod. K analýze tzv. statických a dynamických definic geometrických útvarů a příbuzných úloh je připojeno několik postřehů k výuce podobnosti a shodnosti trojúhelníků. Při řešení úloh bychom se měli zaměřit na provádění rozboru a zdůvodňování postupu.

1 Úvod

Současné postavení elementární geometrie ve výuce matematiky lze stručně a výstižně popsat slovy Lady Vaňatové: „Geometrie bývala princeznou mezi matematickými vědami, dnes je Popelkou.“

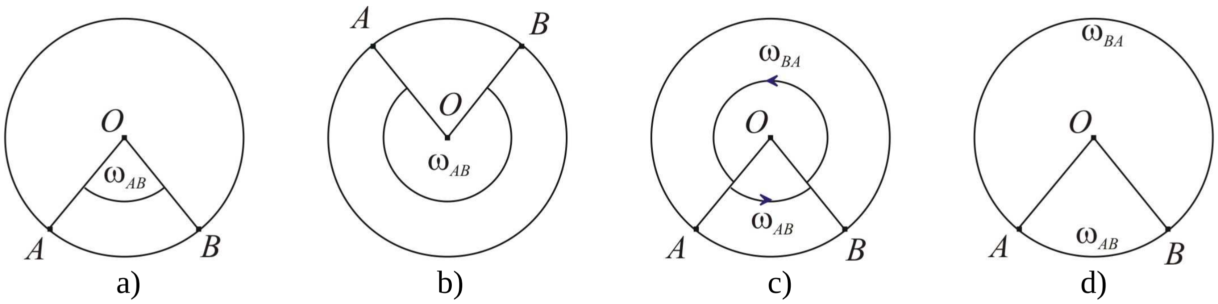
V příspěvku se nechci zabývat příčinami tohoto faktu. Jako učitel se setkávám s nedostatky v poznatcích studentů i ve zpracování učiva geometrie. Chtěl bych aspoň na některé z nich upozornit a naznačit možnosti nápravy.

2 Konkrétní nedostatky

2.1 Pojmotvorný proces a terminologie

V první polovině dvacátého století se u nás pojem úhlu vytvářel z představy otáčení polopřímky kolem svého počátku (viz např. [6], str. 9 nebo [1], str. 119). To umožňovalo současně zavést orientovaný i neorientovaný úhel. V některých evropských zemích, například v Bavorsku, se tento postup úspěšně užívá i v současnosti. Naše dnešní zavádění úhlu pomocí průniku nebo sjednocení polorovin je poněkud těžkopádné: Definice se rozpadá do čtyř situací z nichž každou je zapotřebí nakreslit a vysvětlit zvlášť. Navíc se v našich gymnaziálních učebnicích matematiky zavádí úhel celkem třikrát (viz [4], str. 11-17 a str. 142-145, dále pak [3], str. 25-33).

První z uvedených přístupů je na rozdíl od druhého stručnější, koresponduje s učivem fyziky (pohyb po kružnici, úhlová dráha a rychlost), je v souladu s aktuálním dynamickým pojetím geometrie a nekomplikuje přesné vyjadřování, pokud přejdeme od neorientovaných úhlů k orientovaným.



Obr. 1: Středové úhly

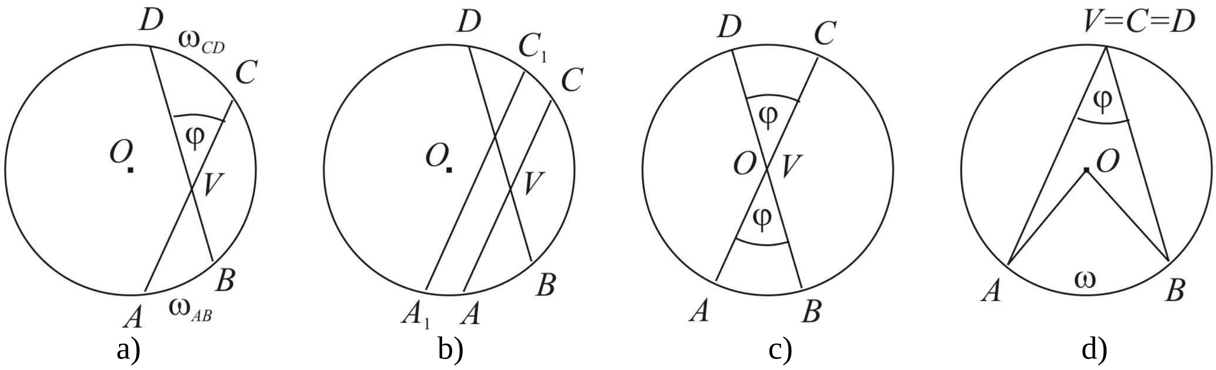
Poslední tvrzení objasníme pro středové úhly v kružnici: Jestliže užíváme neorientované úhly, pak při označení podle obr. 1 a) je ω_{AB} velikost středového úhlu, který přísluší menšímu z oblouků *AB*. Při řešení úlohy nebo důkazu věty však může být uvažovaný oblouk *AB* někdy menší, někdy větší, viz obr. 1 b), resp. mohou být oba oblouky stejně dlouhé. Korektní postup by se měl všemi možnými situacemi zabývat. Uvažujeme-li však orientované úhly, a s nimi též orientované oblouky, viz obr. 1 c), rozlišujeme ω_{AB} a ω_{BA} jako velikosti orientovaných úhlů *AOB* a *BOA*, řešení se zjednoduší.

Považoval bych též za vhodné pozměnit termín "*velikost středového úhlu, který přísluší oblouku*" na stručnější "*úhlová velikost oblouku*" a vyznačovat tyto velikosti do obrázků přímo k obloukům, jak vidíme na obr. 1 d). (Obrázky se zjednoduší a budou přehlednější.)

2.2 Výklad a pojetí učiva

Učivo planimetrie je z velké části podáváno podle Euklidových Základů starých přibližně 2300 let. Některé z těchto poznatků by se daly metodicky zpracovat lépe. Například větu o obvodových úhlech v kružnici (*Velikost středového úhlu v kružnici je rovna dvojnásobku obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku*) je možno podat jako důsledek obecnější věty o úhlech tětiv, která zjednodušuje řešení některých úloh a navíc má jednoduchou formu i odvození:

Věta o úhlu tětiv. *Velikost úhlu tětiv, které se v kružnici protínají, je aritmetickým průměrem úhlových velikostí příslušných oblouků tětivami ohraničených*.



Obr. 2: Věta o úhlu tětiv a o obvodových úhlech

Při označení podle obr. 2 a) lze větu vyjádřit vztahem

$$\omega_{AB} + \omega_{CD} = 2\varphi. \qquad (1)$$

Věta je důsledkem faktu, že pás rovnoběžných sečen vytíná na kružnici dvojici shodných oblouků. Na obr. 2 b) vznikla tětiva A_1C_1 posunutím sečny *AC*, lze tedy položit $\omega_{A_1A} = \omega_{CC_1} = \delta$ a snadno ověříme, že $\omega_{A_1B} + \omega_{C_1D} = (\omega_{AB} + \delta) + (\omega_{CD} - \delta) = \omega_{AB} + \omega_{CD}$. Součet úhlových velikostí oblouků *AB* a *CD* protínajících se tětiv *AC* a *BD* se tedy nezmění při posunutí jedné z nich. Analogickým posouváním lze postupně přemístit tětivy do polohy na obr. 2 c), z níž je vztah (1) zřejmý.

Věta o obvodových úhlech je speciálním případem věty o úhlu tětiv pro situace, kdy se průsečík tětiv nachází na kružnici. Pak pří označení obr. 2 d) platí $C = D = V$, $\omega_{CD} = 0$, $\omega_{AB} = \omega$ a dosazením do vztahu (1) dostaneme $\omega = 2\varphi$.

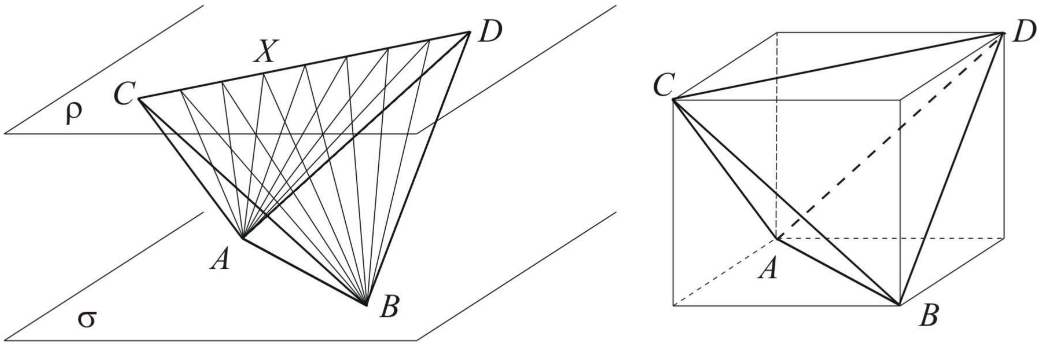
Pokud budeme pracovat s orientovanými úhly a oblouky, lze větu o úhlu tětiv zobecnit na větu o úhlu sečen tak, aby vztah (1) platil i pro situace, kdy se nachází průsečík sečen vně kružnice.

Poznamenejme ještě, že věty o úhlu tětiv a sečen včetně metodiky jejich užití při řešení úloh můžeme nalézt na webu v amerických přehledech elementární matematiky i v některých ruských středoškolských učebnicích, např. [5]. Všude je však (na rozdíl od výše naznačeného postupu) odvozována z věty o obvodových úhlech. V češtině můžete podrobný metodický materiál včetně dynamických pomůcek zhotovených v Cabri II+ zdarma stáhnout z portálu i2geo na adrese http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Coll_leischner/Uhlyvkruznici - viz též články časopise Matematika – fyzika – informatika: roč. **21** (2011/2012), č.2, str. 75 – 81, č.5, str. 257 – 263 a č.9, str. 513 – 520 (poslední z nich se zabývá využitím věty o úhlu tětiv při řešení úloh).

2.3 Rozvoj geometrického myšlení

Pro tři nekolineární body *A*, *B*, *C* lze trojúhelník *ABC* definovat jednak *staticky* jako průnik polorovin *ABC*, *BCA* a *CAB*, jednak *dynamicky* jako sjednocení všech úseček *CX*, kde bod *X* „probíhá úsečku“ *AB*. Geometrických útvary se v první polovině minulého století definovaly dynamicky, snad díky proslulé Hadamardově učebnici [2]. Dnes se zásadně užívají statické, na představu méně náročné definice.

Rozvíjení geometrické představivosti podporuje dynamický přístup, jehož vizualizaci umožňují nástroje dynamické geometrie. Čtyřstěn *ABCD* lze například dynamicky definovat takto: Nechť jsou dány dvě mimoběžné úsečky *AB*, *CD* a *X* je libovolný bod úsečky *CD*, obr. 3 a), pak čtyřstěn *ABCD* je sjednocení všech trojúhelníků *ABX*.



a) b)

Obr. 3: Dynamická definice čtyřstěnu

Poznamenejme, že jen málo lidí si umí představit čtyřstěn vepsaný do kvádru nebo rovnoběžnostěnu. Kdyby znali právě uvedenou definici, pravděpodobně by jim tato představa nečinila potíže, viz obr. 3 b).

Tím nechci odsuzovat definice statické. Při jejich ponechání by bylo vhodné zadat dynamické definice jako úlohy. Na druhé straně i úlohy, v nichž se má například zjistit, co může vzniknout průnikem dvou trojúhelníků žáky zaujmou, rozvíjí jejich geometrické myšlení a dobře se demonstrují pomocí zpětného projektoru nebo na počítači.

Málo upozorňujeme žáky na souvislosti mezi jednotlivými geometrickými poučkami. V učivu o shodnosti a podobnosti trojúhelníků bychom například měli upozornit na (v učebnicích neuváděný) důsledek vět *usu* o shodnosti a *uu* o podobnosti trojúhelníků: Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou podle věty *uu* podobné. K jejich shodnosti pak stačí, aby byl poměr podobnosti roven jedné, tedy aby se shodovaly ještě v libovolné v podobnosti si odpovídající délce (v poloměru opsané kružnice, v obvodu, ...).

V symbolickém zápisu to představuje jakousi větu „*uux*“ o shodnosti trojúhelníků:

$$\forall \triangle ABC \wedge \forall \triangle A'B'C': \quad (\alpha' = \alpha \wedge \beta' = \beta \wedge x' = x) \Rightarrow (\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC). \tag{2}$$

Osvojení tohoto faktu usnadní řešení celé řady geometrických problémů. Zkuste bez jeho použití například dokázat, že dva trojúhelníky jsou shodné, když se shodují ve dvou úhlech a obvodu.

Podobnost je důležitý geometrický pojem, geometricky pojatá přímá úměrnost, proto by si ve výuce zasloužila mnohem více pozornosti. K bližšímu seznámení s touto problematikou lze doporučit článnky v časopise Matematika – fyzika – informatika: roč. **7** (1998), č.9, str. 513-521, roč. **9** (1999/2000), č.1, str. 8-17 a č.8, str. 449-454.

Rozvoji geometrického myšlení žáků by prospělo zařazování většího počtu ne příliš těžkých problémů a důkazových úloh. Většinou se však zaměřujeme na řešení konstrukčních úloh. Zde by bylo vhodné požadovat důkladné provádění rozborů včetně vysvětlení úvah, které vedly k nalezení konstrukce. Typický žákovský postup řešení dnes spočívá v kreslení konstrukce po jednotlivých krocích bez rozboru a místo zdůvodnění postupu se studenti soustřeďují na podrobný zápis konstrukce, v němž se ztrácí hlavní myšlenky. Při takové strategii jsou schopni vyřešit jen snadnější úlohy, které se víceméně naučili dříve.

3 Závěr

Jako učitel na pedagogické fakultě se setkávám výrazným poklesem úrovně znalostí studentů. I na soustředěních úspěšných řešitelů MO jak z našeho kraje, tak i z celé republiky, pozoruji pokles celkové úrovně jejich matematických poznatků a dovednosti.

V krátkém příspěvku jsem zmínil jen některé připomínky k metodice výuky geometrie. Doufám, že to poslouží jako inspirace při vyučování nebo tvorbě učebnic. Podrobnější informace o metodice výuky geometrie a metodách řešení geometrických úloh lze nalézt ve zmíněných materiálech a na připravovaných materiálech o metodách řešení geometrických úloh, které budou v době konání konference přístupné na stránkách naší katedry matematiky.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu FRVŠ-494/2012.

Literatura

[1] ČECH, E., a kol. *Matematika pro I. třídu gymnasií a vyšších odborných škol*. 1. vyd, Praha, Státní nakladatelství učebnic, 1951.

[2] HADAMARD, J. *Leçons de géométrie élémentaire - I. Géométrie plane*. Paris, Librairie Armand Colin, 1906.

[3] ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia, Goniometrie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1994.

[4] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1993.

[5] PONARIN, Y. P. *Elementarnaya geometria, Tom 1*. Moskva: Izdatelstvo MCNMO, 2004.

[6] VOJTĚCH, J. *Geometrie pro IV. třídu středních škol*. 6. vyd. Praha: JČMF, 1934.