GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ÚLOHÁCH

Pavel Leischner

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
2012

Obsah

Tato sbírka úloh měla původně vyjít v tištěné podobě k procvičování učiva z publikace [6]. Sbírka nebyla z časových i finančních důvodů dokončena a vydána. Přidal jsem ji do těchto stránek, protože obsahuje velké množství úloh ze středoškolské planimetrie. Lze ji doporučit ke studiu navazujícímu na text *Metody řešení planimetrických úloh* umístěný na těchto stánkách.

K procvičení úloh o shodných a podobných zobrazeních z elementární geometrie jsou vhodné kapitoly 3, 4 a 6 až 10. K rošíření a doplnění potřebných poznatků doporučuji publikaci [6], na niž sbírka navazuje. Jako doplňkové texty lze použít i [4], [3] a [5].

Pokud se chcete lépe seznámit i s analytickou geometrií, je vhodné začít textem v [6] na str. 17. Informace o publikaci [6]:

Leischner, P.: Geometrická zobrazení, vydala JU v Českých Budějovicích, České Budějovice 2010, ISBN 978-80-7394-243-4.

Lze ji zakoupit nebo objednat v prodejně skript, Branišovská 31b, České Budějovice, PSČ 370 05, email: prodejna.skript@jcu.cz.

Kapitola 1

Geometrie hmotných bodů, homotetie

Řešené úlohy

Úloha 1.1 *Je dán trojúhelník ABC a výraz $3mA - 2B + (4 - 2m)C$. Určete číslo m tak, aby tento výraz představoval*
a) bod,
b) vektor,
c) hmotný bod $(2m, D)$. Každou situaci doplňte obrázkem trojúhelníka ABC a do něj zakreslete výsledný objekt.

Řešení. a)Představuje-li výraz bod X, je to hmotný bod s hmotností 1. Součet hmotností na pravé straně rovnice $X = 3mA - 2B + (4 - 2m)C$ se rovná součtu hmotností na její levé straně, odtud $3m - 2 + 4 - 2m = 1$. Je tedy $m = -1$ a $X = -3A - 2B + 6C$. Tento vztah představuje zkrácený zápis rovnice

$$\overrightarrow{OX} = -3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC},$$

v níž poloha bodu X určená umístěním bodů A, B, C je nezávislá na volbě počátku O. Abychom snadněji nakreslili obrázek, zvolíme $O = C$. Pak

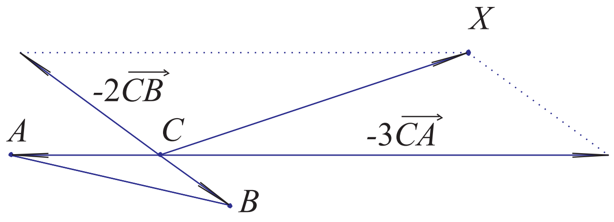
$$\overrightarrow{CX} = -3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CC}$$

a odtud

$$\overrightarrow{CX} = -3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB},$$

neboť $\overrightarrow{CC} = \vec{o}$. Pomocí této rovnice snadno znázorníme bod X (obr. 1.1).

b) Je-li výraz vektor $\vec{u} = 3mA - 2B + (4 - 2m)C$, pak $3m - 2 + 4 - 2m = 0$. Odtud $m = -2$. Po dosazení za m do první rovnice je $\vec{u} = -6A - 2B + 8C$, což



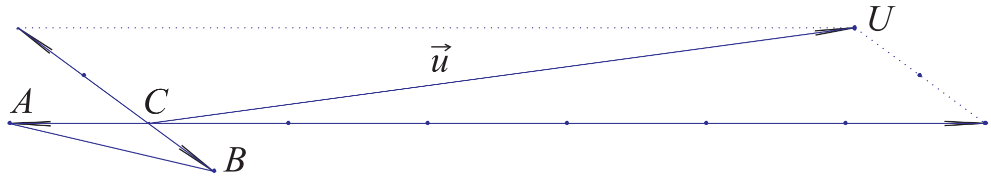
Obr. 1.1: Znázornění bodu $X = -3A - 2B + 6C$.

přepíšeme do vektorové rovnice s volbou $O = C$ (člen s nulovým vektorem již nepíšeme):

$$\vec{u} = -6\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}.$$

Znázornění vektoru $\vec{u}$ vidíme na (obr. 1.2).

c) V souladu se zadáním položíme $2mD = 3mA - 2B + (4 - 2m)C$ a z



Obr. 1.2: $\vec{u} = -6A - 2B + 8C$.

rovnosti celkových hmotností na levé a pravé straně určíme $m = 2$. Platí tedy $4D = 6A - 2B + 0 \cdot C$, neboli

$$D = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}B.$$

Přepsáním do vektorového tvaru a volbou $O = A$ zjistíme

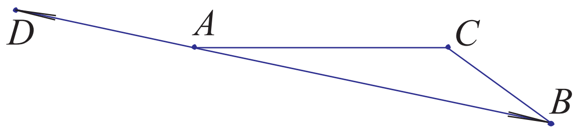
$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

a zakreslíme do obrázku (obr. 1.3).

Úloha 1.2 *V symbolické rovnici* $X = rA + sB$ *určete* r *a* s *tak, aby* $|AX| = 3|BX|$.

Řešení. Při volbě $O = X$ má vektorový zápis dané rovnice tvar

$$\overrightarrow{XX} = r\overrightarrow{XA} + s\overrightarrow{XB}, \quad \text{neboli} \quad \vec{o} = r\overrightarrow{XA} + s\overrightarrow{XB}.$$



Obr. 1.3: $4D = 6A - 2B$

Rovnici ekvivalentně upravíme na tvar

$$\overrightarrow{AX} = -\frac{s}{r}\overrightarrow{BX},$$

z nějž plyne

$$|AX| = \left|\frac{-s}{r}\right| \cdot |BX|.$$

Ze zadání víme, že $|AX| = 3|BX|$ a $r + s = 1$, a tak stačí vyřešit soustavu

$$\left|\frac{s}{r}\right| = 3 \quad \text{a} \quad r + s = 1.$$

Jsou možné dvě situace:
(a) r a s mají stejná znaménka, pak $r = t$ a $s = 3t$, $t = -1/4$

$$\text{a} \quad X = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B.$$

(b) r a s mají opačná znaménka, pak $r = -t$ a $s = 3t$, $t = 1/2$

$$\text{a} \quad X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B.$$

Poznámka. Abychom snadno znázornili polohu bodu X vzhledem k bodům A a B, můžeme v obou posledních rovnicích zvolit $O = B$ a symbolické rovnice přepsat do tvaru

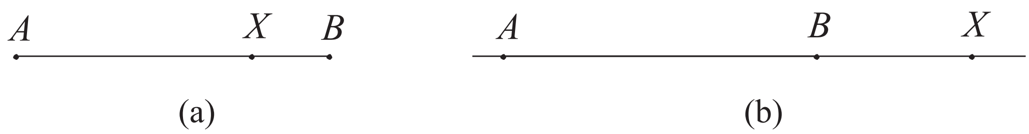
$$\overrightarrow{BX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \quad \text{pro situaci (a)},$$

resp.

$$\overrightarrow{BX} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad \text{pro situaci (b) (obr. 1.4)}.$$

Úlohy

1. Určete těžiště T soustavy $\{(2, A), (-3, B), (5, C)\}$, kde $A = [-2, 5/2], B = [0, -1], C = [8, -4]$. Nakreslete obrázek, v němž zvolíte A, B, C jako vrcholy trojúhelníka a vyznačíte konstrukci bodu T.



Obr. 1.4: Řešení příkladu 1.2.

2. Určete těžiště T soustavy $\{(-1, A), (2, B), (-4, C)\}$, kde $A = [2, 3], B = [0, -5], C = [-2, 2]$. Nakreslete obrázek a vyznačte v něm konstrukci bodu T.

3. V lineární kombinaci bodů $(3 - m)A + (1 + m)B - mC$ určete m tak, aby výraz představoval
   a) bod,
   b) vektor,
   c) hmotný bod $(7, D)$,
   d) hmotný bod $(4, E)$,
   e) hmotný bod $(4 - m, T)$

4. V symbolické rovnici $X = rA + sB$ určete r a s tak, aby platilo
   a) $2|AX| = 3|BX|$,
   b) $|AX| = 2|AB|$,
   c) $3|BX| = |AB|$.

5. Určete, co představuje množina $\{tA + (1 - t)B\}$ kde A,B jsou dané body a reálný parametr t splňuje podmínku
   a) $t \in \mathbb{R}$,
   b) $t \in \langle 0, 1\rangle$,
   c) $t \in \langle 1, \infty)\rangle$,
   d) $t \in (-\infty, 0\rangle$.

6. Určete, které zobrazení v prostoru $\mathbb{A}_2$ je dáno rovnicemi

$$x' = x + 3,\ y' = y - 5$$

   a napište symbolické vyjádření tohoto zobrazení.

7. Určete, analytické vyjádření posunutí o vektor $\vec{u} = (7, -3, 1)$ v prostoru $\mathbb{A}_3$. K danému posunutí určete též rovnice inverzního zobrazení.

8. Určete symbolické vyjádření stejnolehlosti $\mathcal{H}_{S,h}$ se středem S a koeficientem $h \neq 0$.

9. V $\mathbb{A}_3$ je dáno zobrazení $\mathcal{Z} : x' = 3x - 8,\ y' = 3y,\ z' = 3z + 12$. Ukažte, že $\mathcal{Z}$ je stejnolehlost a určete její střed a koeficient. Dokažte, že $\mathcal{Z}^{-1}$ je stejnolehlost se stejným středem a koeficientem $1/h$. Určete analytické vyjádření zobrazení $\mathcal{Z}^{-1}$.

10. Stejnolehlost v $\mathbb{A}_2$ s koeficientem $h = -2$ zobrazuje bod $B = [-3, 1]$ na bod $B' = [9, 4]$. Určete její analytické vyjádření.

11. a) Dokažte, že zobrazení dané rovnicí $X' = 2X + 3A - 2B$ není stejnolehlost.
    b) Dokažte, že zobrazení dané rovnicí $X' = 7A - 2B - 4X$ je stejnolehlost. Určete její střed a koeficient. Rozepište pak do souřadnic pro $A = [-5, 3]$ a $B = [10, 3]$.

12. V symbolické rovnici $X' = (r + 2)X + (s - 3)A + 2rB$ jsou A, B dané body prostoru $\mathbb{E}_2$. Najděte čísla r, s tak, aby rovnice byla
    a) analytickým vyjádřením posunutí (určete též $\vec{u}$ pomocí A, B),
    b) stejnolehlostí s koeficientem $h = 3$ (určete též S pomocí A, B),
    c) stejnolehlostí se středem S ve středu úsečky AB (určete také h a symbolickou rovnici stejnolehlosti),
    d) stejnolehlostí se středem S, pro nějž platí $|AS| = 2|BS|$ (určete též h, střed S pomocí A, B, a symbolickou rovnici stejnolehlosti).

13. Stejnolehlost v $\mathbb{A}_2$ zobrazuje bod $B = [2, -1]$ na bod $B' = [-6, 11]$. Určete její koeficient, střed a analytické vyjádření, leží-li střed stejnolehlosti na ose y.

14. Stejnolehlost v $\mathbb{A}_2$ zobrazuje bod $B = [20, -4]$ na bod $B' = [12, 0]$ a má střed na přímce $x - 3y - 2 = 0$. Určete její analytické vyjádření.

15. Rozhodněte, zda je zobrazení $X' = hX + (1 - h)B + \vec{u}$ stejnolehlost. ($h \neq 0$ je reálná konstanta, B je daný bod a $\vec{u}$ a vektor.) Pokud ano, určete její střed a koeficient.

16. Středová souměrnost $\mathcal{S}_S$ se středem S je stejnolehlost, s koeficientem $h = -1$. Pomocí symbolického vyjádření středové souměrnosti dokažte, že $\mathcal{S}_S$ zobrazuje každou orientovanou úsečku na úsečku s ní shodnou a nesouhlasně rovnoběžnou.

17. Pomocí symbolického vyjádření dokažte, že posunutí zobrazuje každou orientovanou úsečku na úsečku s ní shodnou a souhlasně rovnoběžnou.

18. Určete analytické vyjádření středové souměrnosti, ve které je kružnice $k : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ samodružná.

19. Určete rovnice středové souměrnosti, ve které je samodružná
a) úsečka $x = 1 - 3t, \quad y = 2 + 4t, \quad t \in \langle -1, 3\rangle$,
b) přímka $2x + 3y - 6 = 0$.

20. Středová souměrnost $\mathcal{S}_S$ v prostoru $\mathbb{E}_2$ má střed S na přímce
$$p : 2x - y + 4 = 0$$
a zobrazuje bod $A = [2, 4]$ na bod osy x. Určete její střed a analytické vyjádření.

21. Určete analytické vyjádření středové souměrnosti, jejíž střed leží na ose y a v níž je přímka $p : x - 3y + 12$ samodružná.

22. Určete rovnici osy o rovinného pásu, který je ohraničen přímkami
a) $p : x - 2y + 3 = 0$, $q : 5x - 2y + 7 = 0$,
b) $p : 3x + 2y - 24 = 0$, $q : 3x + 2y + 6 = 0$.

23. Existuje středová souměrnost, která zobrazuje přímku p na přímku q a má střed na ose x? Pokud ano, najděte její analytické vyjádření.
a) $p : x - 2y + 3 = 0$, $q : x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.
b) $p : x - 2y + 1 = 0$, $q : x = 1 + 4t$, $y = 3 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.
c) $p : x - 2y + 3 = 0$, $q : x = 5 + 2t$, $y = 4 + t$, $t \in \mathbb{R}$.
d) $p : y + 5 = 0$, $q : x = 1 + 3t$, $y = 5$, $t \in \mathbb{R}$
e) $p : y = 2t, x = 2$, $q : x = -2$, $y = 2 - 4r$, $t, r \in \mathbb{R}$

24. Posunutí a stejnolehlost (včetně středové souměrnosti a identity) jsou jediná zobrazení v $\mathbb{E}_2$, která zachovávají směr. Říkáme jim *homotetie* a tvoří grupu (tzv. *grupu homotetií*). Určete rovnice všech homotetií, které zobrazují úsečku AB na úsečku CD.
a) $A = [-1, 2]$, $B = [1, 6]$, $C = [0, -3]$, $D = [4, 5]$,
b) $A = [0, 0]$, $B = [2, -1]$, $C = [1, -2]$, $D = [-1, 6]$,
c) $A = [0, 0]$, $B = [2, -3]$, $C = [1, 2]$, $D = [-1, 5]$,
d) $A = [2, 4]$, $B = [3, 2]$, $C = [0, -1]$, $D = [1, -3]$,

25. Určete rovnice všech homotetií, jež zobrazují kružnici m na kružnici n.
a) m: $x^2 + (y + 3)^2 = 4$, n: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$,
b) m: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, n: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$,
c) m: $x^2 + y^2 = 9$, n: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Kapitola 2

Afinní zobrazení

Každé afinní zobrazení prostoru $\mathbb{A}_n$ do prostoru $\mathbb{A}'_m$ je vzhledem k daným lineárním soustavám souřadnic v $\mathbb{A}_n$ a $\mathbb{A}'_m$ jednoznačně vyjádřeno soustavou rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n.
\end{aligned}$$

Každé zobrazení prostoru $\mathbb{A}_n$ do prostoru $\mathbb{A}'_m$, které je vzhledem k daným lineárním soustavám souřadnic v $\mathbb{A}_n$ a $\mathbb{A}'_m$ vyjádřeno těmito rovnicemi, je afinní.

Definice 2.1 *Obrazem útvaru U (tj. zvolené množiny bodů v daném prostoru) ve zobrazení $\mathcal{Z}$ nazýváme útvar $U' = \{\mathcal{Z}(X), X \in U\}$.*

Řešené úlohy

Úloha 2.1 *V prostoru $\mathbb{A}_2$ je dáno afinní zobrazení*

$$f: \; x' = 2x - 2y + 3, \quad y' = 3x - 2y - 1.$$

Určete obraz a vzor bodu $M = [2, 1]$.

Řešení. Souřadnice obrazu M' bodu M zjistíme dosazením hodnot $x = 2$ a $y = 1$ do rovnic daného zobrazení. Výpočtem zjistíme $M' = [5, 3]$. Chceme-li určit souřadnice vzoru bodu M, tzn. bodu $\overline{M}$, pro nějž platí $f(\overline{M}) = M$, položíme

$$2 = 2x - 2y + 3, \quad 1 = 3x - 2y - 1$$

a vyřešením této soustavy zjistíme $\overline{M} = [3, \frac{7}{2}]$. Jestliže potřebujeme najít vzory pro větší počet daných bodů, je výhodné nejprve obecně vyjádřit z rovnic zobrazení f proměnné x, y pomocí x' a y'. Tím vlastně dostaneme rovnice inverzního zobrazení

$$f^{-1}: \; x = -x' + y' + 4, \quad y = \frac{-3}{2}x' + y' + \frac{11}{2} \quad \left(\text{a po dosazení} \quad \overline{M} = \left[3, \; \frac{7}{2}\right]\right).$$

Úloha 2.2 *V prostoru $\mathbb{A}_2$ je dáno afinní zobrazení*

$$f: \; x' = 3x + 2y - 2, \quad y' = 2x + 2y - 1.$$

Určete obraz a vzor přímky $p: \; 3x + 2y - 6 = 0$.

Řešení. Vyjádřením x a y z daných rovnic určíme nejprve inverzní zobrazení

$$f^{-1}: \; x = x' - y' + 1, \quad y = -x' + \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}.$$

Rovnici obrazu p' přímky p obdržíme substitucí z posledních rovnic do rovnice přímky:

$$p': \; 3(x' - y' + 1) + 2\left(-x' + \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}\right) - 6 = 0.$$

Po úpravě (při níž vypustíme nyní již zbytečné označení proměnných x a y čárkami) zjistíme $p': \; x - 4 = 0$. Vzorem přímky p je přímka $\overline{p}$, pro niž platí $f(\overline{p}) = p$. Její rovnici nalezneme, když v původní rovnici přímky nahradíme proměnné x a y proměnnými x' a y', za něž dosadíme z analytického vyjádření zobrazení f. Z vyjádření $p: \; 3x' + 2y' - 6 = 0$ tedy dostaneme

$$\overline{p}: \; 3(3x + 2y - 2) + 2(2x + 2y - 1) - 6 = 0$$

a odtud $\overline{p}: \; 13x + 10y - 14 = 0$.

Úloha 2.3 *Určete analytické vyjádření afinního zobrazení f v prostoru $\mathbb{E}_2$, které bodům $A = [0, 0]$, $B = [0, 6]$ a $C = [-1, 4]$ přiřazuje po řadě obrazy $A' = [0, 0]$, $B' = [0, 3]$ a $C' = [-2, 2]$. Dále dokažte, že v tomto zobrazení je samodružná každá hyperbola o rovnici $xy = k$ $(k \in \mathbb{R})$ a určete vzor a obraz kružnice $m: \; x^2 + y^2 = 4$.*

Řešení. Položíme

$$x' = ax + by + p, \quad y' = cx + dy + q$$

a po dosazení souřadnic daných bodů a jejich obrazů obdržíme pro koeficienty a, b, c, d, p a q soustavu

$$\begin{array}{lll} 0 = p, & 0 = 6b + p, & -2 = -a + 4b + p, \\ 0 = q, & 3 = 6d + q, & 2 = -c + 4d + q. \end{array}$$

Po jejím vyřešení vyjádříme f ve tvaru

$$f : x' = 2x, \quad y' = \frac{y}{2}.$$

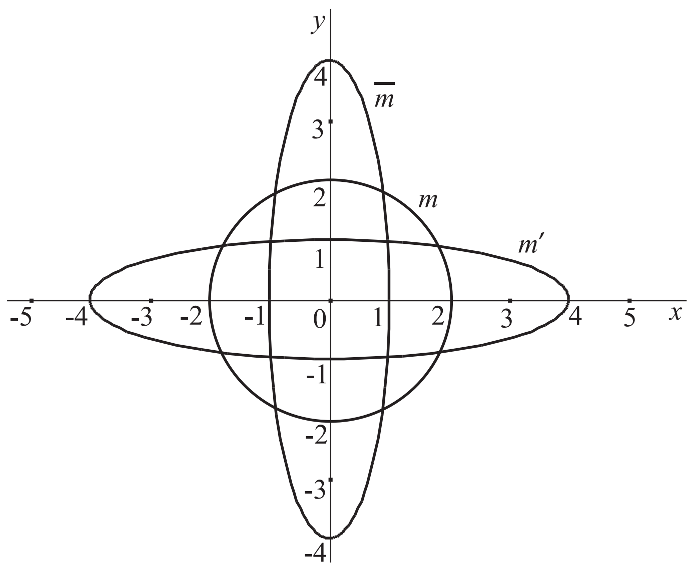
Z tohoto vyjádření plyne, že $x'y' = xy$. To znamená, že každý bod hyperboly $xy = k$ se zobrazí na bod téže hyperboly. Dané zobrazení tedy přemisťuje body po hyperbolách a proto se nazývá **hyperbolická rotace**. Inverzní zobrazení k naší hyperbolické rotaci je dáno rovnicemi

$$f^{-1} : x = \frac{x'}{2}, \quad y = 2y'.$$

Podobně jako v předchozích příkladech zjistíme, že kružnice $m: \ x^2 + y^2 = 4$ má vzor

$$\overline{m}: \ 4x^2 + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{a obraz} \quad m': \ \frac{x^2}{16} + 4y^2 = 1.$$

Hyperbolická rotace tedy nezobrazuje kružnici na kružnici (obr.2.1).



Obr. 2.1: Vzor a obraz kružnice v hyperbolické rotaci.

Úlohy

1. V $\mathbb{A}_2$ je dáno zobrazení $f: \; x' = 3x + 2y - 1, \quad y' = 4x + 3y - 2$. Určete f^{-1} a pak obrazy a vzory těchto bodů: $D = [0,0]$, $E = [1,0]$, $F = [0,1]$, $G = [1,1]$, $M = [1,2]$, $N = [2,1]$, $Q = [2,2]$.

2. V $\mathbb{A}_2$ je dáno zobrazení $f: \; x' = 2x - y + 3, \quad y' = 5x - 2y - 1$. Určete f^{-1} a pak obrazy a vzory těchto přímek: $p: \; y = 0$, $q: \; x = 0$, $r: \; y = x$, $s: \; 2x - y - 2 = 0$, $m: \; x - 3y + 4 = 0$, $n: \; 2x - 3y = 0$.

3. Napište analytické vyjádření stejnolehlosti $\mathcal{H}$ se středem $S = [1, -3]$ a koeficientem $h = -2$. Dále určete $\mathcal{H}^{-1}$ a obraz a vzor přímky
   a) $p: \; 5x + y - 1 = 0$,
   b) $q: \; 7x + 3y + 2 = 0$.

4. V prostoru $\mathbb{E}_2$ určete analytické vyjádření stejnolehlosti $\mathcal{H}$ se středem $S = [-5, 2]$ a koeficientem $h = 3$. Dále určete $\mathcal{H}^{-1}$ a obraz a vzor kružnice m.
   a) $m: \; (x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$,
   b) $m: \; (x+5)^2 + (y-2)^2 = 81,$.
   Úkoly a), b) řešte dvěma způsoby: Jednak použitím transformací $\mathcal{H}^{-1}$ a $\mathcal{H}$ na rovnici kružnice $m(M, r)$, jednak sestavením rovnic kružnic pomocí M', r' a $\overline{M}$, $\overline{r}$, které nejprve vypočítáte.

5. V prostoru $\mathbb{E}_2$ je dána hyperbolická rotace $f: \; x' = \frac{x}{5}$, $y' = 5y$. Určete f^{-1} a potom vzor a obraz pro tyto útvary:
   $p: \; y = x$,
   $q: \; 2x - y + 6 = 0$,
   $m: \; (x-2)^2 + (y-5)^2 = 100$.

6. Zobrazení f v prostoru $\mathbb{E}_2$ je dáno rovnicemi $x' = 2y - 6$, $y' = -3x$. Určete vzor a obraz kružnice $m: \; x^2 + y^2 - 2x = 0$.

7. Napište rovnice afinního zobrazení, které bodům A, B, C, D přiřazuje po řadě body A', B', C', D'.
   a) $A = [1,2,3]$, $A' = [5,4]$, $B = [1,1,1]$, $B' = [2,1]$, $C = [1,0,1]$, $C' = [1,0]$, $D = [0,1,3]$, $D' = [3,2]$.
   b) $A = [1,2,3]$, $A' = [0,9,-1]$, $B = [3,2,1]$, $B' = [2,11,1]$, $C = [1,-1,1]$, $C' = [3,4,-2]$, $D = [2,1,0]$, $D' = [2,7,1]$.

8. Napište rovnice afinního zobrazení, které bodu $A = [2,1]$ přiřadí bod $A' = [2]$, jestliže k němu asociované zobrazení zobrazí vektory $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (-2,0)$ po řadě na $\vec{u}' = (-2)$, $\vec{v}' = (8)$.

9. Napište rovnice afinního zobrazení, které bodům $A = [3, 3]$, $B = [2, 1]$ přiřadí body $A' = [7, 0]$, $B' = [4, 1]$ jestliže k němu asociované zobrazení zobrazí vektor $\vec{u} = (2, 1)$ na $\vec{u}' = (3, 1)$.

10. V $\mathbb{A}_2$ je dán rovnoběžník $ABCD$. Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení prostoru $\mathbb{A}_2$ na sebe takové, že bodům A, B, C po řadě přiřazuje body A, C, D. Pokud ano, napište jeho analytické vyjádření ve vhodně zvolené soustavě souřadnic. Kam se zobrazí střed rovnoběžníka?

11. V $\mathbb{A}_2$ je dán trojúhelník ABC. Kolik existuje afinních zobrazení, které zobrazí
a) A na B, B na C a C na A, b) A na A, B na C a C na B?
V obou případech vyjádřete zobrazení analyticky ve vhodně zvolené soustavě lineárních souřadnic a pak určete obraz těžiště trojúhelníka.

12. Najděte všechny body $X = [x, y, z]$, jež se v afinním zobrazení prostoru $\mathbb{A}_3$ do prostoru $\mathbb{A}_2$ daném rovnicemi $x' = 2x - z + 1$, $y' = x + y$ zobrazí do bodu $M = [4, 3]$.

Další příklady afinních zobrazení

Promítání rovnoběžné s přímkou p (resp. vektorem $\vec{u}$) v prostoru $\mathbb{A}_n$ do nadroviny ρ: Obraz X' libovolného bodu X je průsečík nadroviny ρ s přímkou vedenou bodem X rovnoběžně s p (resp.s $\vec{u}$).

Promítání rovnoběžné s nadrovinou σ do přímky p v prostoru $\mathbb{A}_n$: Obraz X' libovolného bodu X je průsečík přímky p s nadrovinou vedenou bodem X rovnoběžně s ρ.

Souměrnost podle nadroviny σ v prostoru $\mathbb{E}_n$: přiřazuje libovolnému bodu $X \notin \sigma$ obraz X' pro nějž střed úsečky $X'X$ leží v nadrovině σ a současně je vektor $X' - X$ komý na σ. Body nadroviny σ jsou samodružné.

Řešené úlohy

Úloha 2.4 *Dokažte,že vektor* $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ *je rovnoběžný s nadrovinou* $\sigma : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c = 0$, *právě když platí* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Řešení. Vektor $\vec{u}$ je rovnoběžný s nadrovinou σ, právě když existují body $Z, Y \in \sigma$, takové, že $\vec{u} = Y - Z$. Nechť $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ a $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$. Oba body leží v nadrovině σ, proto platí $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + c = 0$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i + c = 0$. Odečtením obou vztahů dostaneme $\sum_{i=1}^{n} a_i (y_i - z_i) = 0$, neboli $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$.

Úloha 2.5 *Napište rovnice rovnoběžného promítání do přímky* $p: x = 1 + 2t, y = 3t, z = 2 + t, t \in \mathbb{R}$. *Promítání je rovnoběžné s rovinou* $\sigma: 3x - 2y + z + 5 = 0$.

Řešení. Obraz $X' = [x', y', z']$ libovolného bodu $X = [x, y, z]$ leží na přímce p, platí tedy

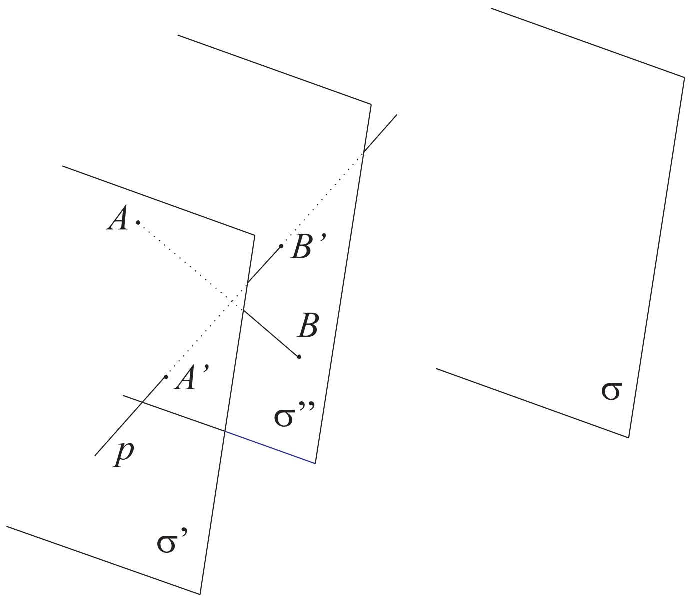
$$x' = 1 + 2t, \quad y' = 3t, \quad z' = 2 + t \tag{2.1}$$

Vektor $X' - X = (1 + 2t - x, 3t - y, 2 + t - z)$ je rovnoběžný s rovinou σ, to podle tvrzení z úlohy 2.4 znamená, že

$$3(1 + 2t - x) - 2(3t - y) + 2 + t - z = 0.$$

Odtud vyjádříme $t = 3x - 2y + z - 5$, dosadíme do vztahů (2.1)a dostaneme rovnice hledaného promítání:

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 4y + 2z - 9 \\ y' &= 9x - 6y + 3z - 15 \\ z' &= 3x - 2y + z - 3. \end{aligned} \tag{2.2}$$



Obr. 2.2: Rovnoběžné promítání úsečky AB do přímky p.

Úloha 2.6 *Určete obraz úsečky* AB *v promítání z úlohy 2.5, jestliže*
a) $A = [0, -2, 5]$, $B = [2, 3, 1]$.
b) $A = [2, 3, 5]$, $B = [-3, -4, 6]$.

Řešení. a) Pomocí vztahů (2.2) určíme $A' = [9, 12, 6]$, $B' = [-7, -12, -2]$. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$, jak názorně ilustruje obr. 2.2. Dosazením do (2.1) se přesvědčíme, že body A' a B' skutečně leží na přímce p. Bodu A' odpovídá ve vyjádření (2.1) hodnota parametru $t_1 = 4$, pro bod B' je $t_2 = -4$, a tak parametrické vyjádření úsečky $A'B'$ má tvar

$$x' = 1 + 2t, \quad y' = 3t, \quad z' = 2 + t, \quad t \in \langle -4, 4 \rangle.$$

b) $A = [2, 3, 5]$, $B = [-3, -4, 6]$. b) Analogicky jako v případě a) zjistíme $A' = B' = [1, 0, 2]$. Průmětem úsečky AB je bod, protože tato úsečka je rovnoběžná s rovinou σ.

Úloha 2.7 *V prostoru $\mathbb{E}_3$ určete rovnice té rovinné souměrnosti, která zobrazuje bod $M = [0, 3, -1]$ na bod $M' = [2, 7, -3]$.*

Řešení. Rovina souměrnosti, označme ji σ, je kolmá na úsečku $M'M$ a prochází jejím středem S. Z údajů v zadání určíme:

$$S = \frac{1}{2}(M + M') = [1, 5, -2], \quad M' - M = (2, 4, -2).$$

Jako normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$ roviny σ zvolíme $(M' - M)/2$, takže rovnice roviny σ je tvaru $x + 2y - z + c = 0$, kde konstanu c zjistíme z podmínky $S \in \sigma$. Vyjde

$$\sigma : x + 2x - z - 13 = 0.$$

Ze souměrnosti podle roviny σ plyne, že pro libovolný bod $X \notin \sigma$ a jeho obraz X' platí $X' - X = t\vec{n} = (t, 2t, -t)$. Proto souřadnice bodu X' vyhovují vztahům

$$x' = x + t, \quad y' = y + 2t, \quad z' = z - t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Z podmínky, že střed N úsečky XX' leží v rovině σ vyjádříme parametr t jako funkci souřadnic bodu X a nalezený výraz dosadíme do (2.3). Výsledné rovnice budou představovat hledané zobrazení. Určíme tedy

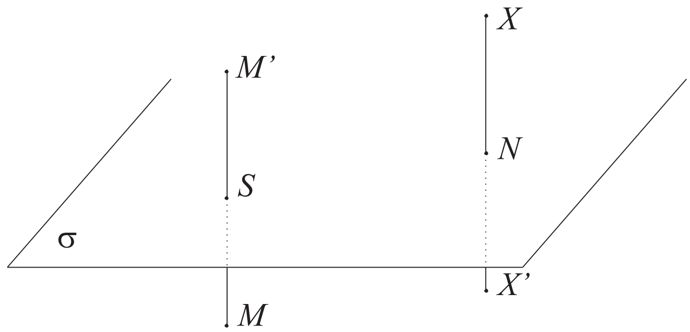
$$N = \frac{1}{2}(X + X') = \left[x + \frac{t}{2}, y + t, z - \frac{t}{2}\right],$$

dosazením souřadnic bodu N do rovnice roviny σ nalezneme

$$t = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 13$$

a po substituci za t do (2.3) dostáváme rovnice hledané rovinné souměrnosti:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{13}{3} \\ y' &= -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{26}{3} \\ z' &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{13}{3}. \end{aligned}$$



Obr. 2.3: Souměrnost podle roviny σ.

Úlohy

1. Určete analytické vyjádření kolmého promítání prostoru $\mathbb{E}_3$ do roviny $\sigma:\ 2x - z - 10 = 0$.

2. Určete analytické vyjádření kolmého promítání prostoru $\mathbb{E}_3$ do roviny $\sigma:\ x = 6 - 2r + s,\ y = r,\ z = -s$.

3. Určete analytické vyjádření kolmého promítání prostoru $\mathbb{E}_3$ do přímky $p: x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 4 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

4. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{A}_3$ do přímky
$$q : x = 2t,\ y = -2t,\ z = 3 + t, t \in \mathbb{R}.$$
Promítání rovnoběžné s rovinou $3x + 4y + 5 = 0$.

5. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{A}_3$ do přímky
$$p : x = 1 + 3t,\ y = t\ z = 5 - t,\ t \in R.$$
Promítání je rovnoběžné s rovinou, která je rovnoběžná s vektory $\vec{u} = (2, 1, 0),\ \vec{v} = (0, 0, 5)$.

6. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{A}_3$ do roviny
$$\sigma : x - y + 2z + 3 = 0.$$
Promítání je rovnoběžné s vektorem $\vec{s} = (-3, 0, 1)$.

7. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{A}_3$ do roviny
$$\rho : x = 2r - 3s,\ y = 1 + r,\ z = 2 - s,\ r, s \in \mathbb{R}.$$
Promítání je rovnoběžné s přímkou
$$p : x = 1 - m,\ y = 2 + m\ z = 2m; m \in \mathbb{R}.$$

8. Určete analytické vyjádření rovnoběžného promítání prostoru $\mathbb{A}_2$ do osy x. Promítání je rovnoběžné s přímkou $p:\ x + 5y + 1 = 0$.

9. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{E}_2$ do přímky
$$p:\ x + 5y + 1 = 0.$$
Promítání je rovnoběžné s osou y.

10. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{E}_3$ do roviny yz, je-li rovnoběžné s vektorem $\vec{u} = (-1, 3, 4)$.

11. Určete analytické vyjádření promítání prostoru $\mathbb{E}_3$ do roviny
$$5x - 2z + 4 = 0,$$
promítání je rovnoběžné s osou z.

12. Určete analytické vyjádření promítání v $\mathbb{E}_3$ do přímky $x = 2 - 3t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$, promítání je rovnoběžné s rovinou xy.

13. V prostoru $\mathbb{E}_2$ je zvolena ortonormální soustava souřadnic. Napište analytické vyjádření souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu. Co vám výsledek připomíná?

14. V prostoru $\mathbb{E}_2$ je zvolena ortonormální soustava souřadnic. Napište analytické vyjádření souměrnosti podle osy druhého a čtvrtého kvadrantu.

15. Osová souměrnost v prostoru $\mathbb{E}_2$ zobrazuje bod $A = [3, 5]$ na bod $A' = [7, 1]$. Určete její analytické vyjádření.

16. Souměrnost podle roviny v prostoru $\mathbb{E}_3$ zobrazuje bod $A = [2, 3, 0]$ na bod $A' = [6, 5, -2]$. Určete její analytické vyjádření.

17. Určete rovnice symetrie v $\mathbb{E}_2$ podle přímky $p:\ x - 3y + 5 = 0$.

18. Určete rovnice symetrie v $\mathbb{E}_3$ podle roviny $\varrho:\ x - 2y - z - 6 = 0$.

19. Přímka AB je rovnoběžná s rovinou $\sigma : g(X) = 0$ v prostoru $\mathbb{A}_n$, právě když $g(A) = g(B)$. Dokažte.

Kapitola 3

Shodnosti v $\mathbb{E}_2$, středová souměrnost

Studium shodných zobrazení v rovině tvoří důležitou část učiva geometrie na SŠ i ZŠ. Proto je obsah následujících kapitol z velké části zpracován na úrovni střední a základní školy. Některé věty z publikace [6] jsou dokazovány znovu, jen pomocí středoškolské matematiky.

Základní vlastnosti shodných zobrazení

Definice 3.1 *Zobrazení $\mathcal{Z}$ v prostoru $\mathbb{E}_2$ se nazývá shodné zobrazení (stručněji shodnost), právě když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X' a Y' $\big(X' = \mathcal{Z}(X)$ a $Y' = \mathcal{Z}(Y)\big)$ platí:*

$$|X'Y'| = |XY|. \tag{3.1}$$

Definice 3.2 *Dva rovinné útvary se nazývají shodné útvary, právě když existuje shodné zobrazení, které zobrazuje jeden z útvarů na druhý.*

S využitím vztahu (3.1) a trojúhelníkové nerovnosti dokažte následující věty:

Věta 3.1 *Ke každé shodnosti $\mathcal{Z}$ existuje inverzní zobrazení $\mathcal{Z}^{-1}$, které je také shodné.*

Věta 3.2 *Složení dvou shodností je shodnost.*

Věta 3.3 *Každá shodnost zobrazuje přímku na přímku.*

Věta 3.4 *Shodná zobrazení zachovávají relaci "ležet mezi" pro body a přímky.*

Věta 3.5 *Každá shodnost zobrazuje dvojici rovnoběžek na dvojici rovnoběžek.*

Věta 3.6 *Obrazem polopřímky ve shodném zobrazení je polopřímka.*

Věta 3.7 *Obrazem úsečky ve shodném zobrazení je úsečka stejné délky.*

Věta 3.8 *Obrazem kružnice ve shodném zobrazení je kružnice téhož poloměru.*

Věta 3.9 *Každá shodnost zobrazuje úhel na úhel stejné velikosti.*

Středová souměrnost

Definice 3.3 *Středová souměrnost (resp. středová symetrie) $\mathcal{S}_S$ je zobrazení určené bodem S, zvaným střed souměrnosti, a následujícím pravidlem: Bod X' je obrazem bodu X, právě když je bod S středem úsečky XX'.*

Poznámka. Zapisujeme $X' = \mathcal{S}_S(X)$. Pro $X = S$ platí $S' = S$. Říkáme, že bod S je samodružný. (Úsečka $SS' = SS$ je nulová.) Snadno nahlédneme, že střed S je jediný samodružný bod středové symetrie.

Věta 3.10 *Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}_S : X \to X'$ má tvar*

$$X' = 2S - X \tag{3.2}$$

Věta 3.11 *Zobrazení $\mathcal{Z}$ je středová souměrnost, právě když každou orientovanou úsečku $Y - X$ zobrazuje na shodnou a nesouhlasně rovnoběžnou úsečku $Y' - X'$.*

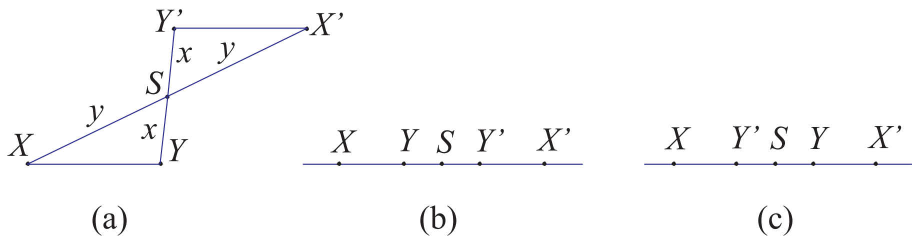
Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\mathcal{Z} = \mathcal{S}_S$. Podle (3.2) pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X',Y' platí $X' = 2S - X$ a $Y' = 2S - Y$. Odečtením obou vztahů dostaneme $X' - Y' = Y - X$, což jsme chtěli dokázat.

Nechť nyní naopak pro každé dva body X, Y a jejich obrazy v daném zobrazení X',Y' platí $X' - Y' = Y - X$. Označme S střed úsečky $Y'Y$. Z poslední rovnosti plyne

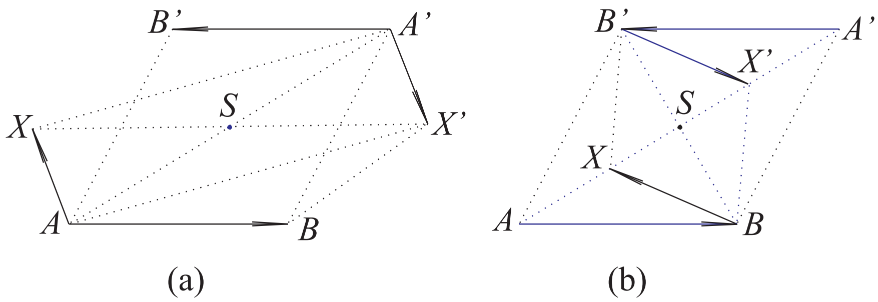
$$\frac{1}{2}(X' + X) = \frac{1}{2}(Y' + Y) = S.$$

Pro libovolný bod X tedy platí $\mathcal{Z}(X) = X' = 2S - X$. Zobrazení $\mathcal{Z}$ je středová souměrnost. $\square$

Jiný důkaz (syntetickou metodou). Je-li $\mathcal{Z}$ středová souměrnost se středem S, pak pro body X a Y nekolineární s S jsou i jejich obrazy X', Y' nekolineární s S a situaci lze znázornit obrázkem 3.1(a). Trojúhelníky XSY a $X'SY'$ jsou shodné podle věty *sus*, a tak $|X'Y'| = |XY|$. Navíc jsou orientované úsečky $Y' - X'$ a $Y - X$ nesouhlasně rovnoběžné, jak plyne z obrázku a věty o střídavých úhlech. Vyšetření situací znázorněných na obr. 3.1 (b) a (c), při nichž jsou body X, Y a S kolineární, přenecháme čtenáři.



Obr. 3.1: Středová souměrnost.



Obr. 3.2: Středová souměrnost.

V druhé části důkazu uvažujme zobrazení $\mathcal{Z}$, které každým dvěma bodům X, Y přiřadí obrazy X', Y' tak, že jsou orientované úsečky $X' - Y'$ a $Y - X$ shodné a nesouhlasně rovnoběžné. Odtud plyne, že zobrazení má nejvýše jeden samodružný bod. Zvolme dva nesamodružné body A, B tak, aby přímka $A'A$ neobsahovala bod B. Pak je čtyřúhelník $ABA'B'$ rovnoběžník (viz příklad 3), jehož střed označíme S. Vidíme, že $\mathcal{Z}(A) = A' = \mathcal{S}_S(A)$ a $\mathcal{Z}(B) = B' = \mathcal{S}_S(B)$. Zbývá dokázat, že pro každý další bod X rovněž platí $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{S}_S(X)$. Položme $X' = \mathcal{Z}(X)$. Pokud X neleží na přímce $A'A$, je čtyřúhelník $XAX'A'$ rovnoběžník, který, jak vidíme na obr. 3.2(a), má s rovnoběžníkem $ABA'B'$ společnou úhlopříčku $A'A$ a tedy i střed S. Proto platí $X' = \mathcal{S}_S(X)$. Jestliže bod X leží na přímce $A'A$, stačí v předchozí úvaze nahradit bod A bodem B - obr. 3.2(b). $\square$

Poznámka. Jak později uvidíme, je právě dokázaná věta užitečná při řešení některých úloh. Doporučujeme si ji dobře zapamatovat.

Důlaz dalších čtyř vět přenecháváne čtenáři.

Věta 3.12 *(Důsledek věty 3.11) Středová souměrnost je shodné zobrazení.*

Definice 3.4 *Říkáme, že geometrický útvar je středově souměrný podle středu S, právě když je útvar samodružný v souměrnosti $\mathcal{S}_S$. Bod S se též nazývá střed útvaru.*

Věta 3.13 *Středová souměrnost $\mathcal{S}_S$ je involutorní zobrazení (involuce). To znamená, že platí každý ze vztahů*

$$\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S, \qquad \mathcal{S}_S \cdot \mathcal{S}_S = \mathcal{I} \qquad x' = \mathcal{S}_S(X) \Longrightarrow \mathcal{S}_S(X') = X, \tag{3.3}$$

kde $\mathcal{I}$ značí identitu - zobrazení, v němž je každý bod samodružný.

Věta 3.14 *Přímka, která prochází středem středové souměrnosti, je samodružná.*

Věta 3.15 *Obraz přímky ve středové souměrnosti je rovnoběžný se svým vzorem.*

Řešené úlohy

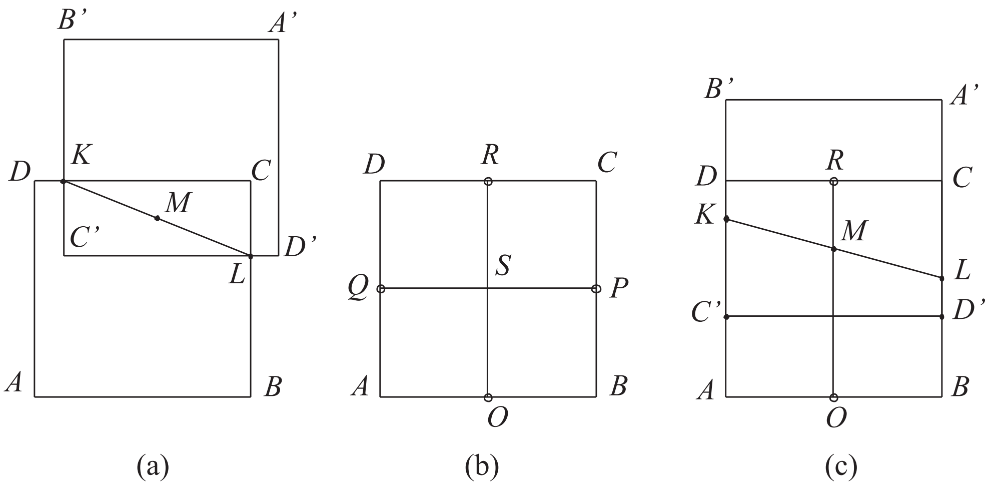
Úloha 3.1 *Je dán čtverec $ABCD$ a bod M uvnitř čtverce. Sestrojte úsečku KL se středem M tak, aby body K, L ležely na hranici čtverce.*

Řešení - rozbor. Předpokládejme, že úloha je sestrojena, viz obr. 3.3(a). Souměrnost se středem M označme $\mathcal{S}_M$. Body K a L leží na hranici h čtverce. Obraz $K' = \mathcal{S}_M(K)$ bodu K tedy náleží do obrazu h' hranice čtverce $ABCD$ v uvažované symetrii. Navíc je bod M středem úsečky KL, a tak $K' = L$. Bod L tedy leží současně v množině h i v množině h': $M \in h \cap h'$.

Konstrukce. V souměrnosti se středem M sestrojíme obraz $A'B'C'D'$ daného čtverce. Lomené čáry $ABCDA$ a $A'B'C'D'A'$ jsou množiny h a h' zmiňované v rozboru. Libovolný bod množiny $h \cap h'$ označíme jako L. Bod K sestrojíme jako $K = \mathcal{S}_M(L)$.

Zkouška správnosti. Z rozboru a konstrukce je zřejmé, že každá úsečka KL takto sestrojená splňuje podmínky úlohy.

Diskuse. Bod M je dán uvnitř čtverce, proto je průnik množin h a h' neprázdný a úloha má vždy řešení. Pro další úvahy označíme písmeny O, P,



Obr. 3.3: Řešení úlohy 3.1.

R, Q středy stran AB, BC, CD, DA podle obr. 3.3(b).

a)Leží-li bod M uvnitř některé z úseček OR, PQ, má úloha nekonečně mnoho řešení. Do průniku množin h a h' totiž v tomto případě patří aspoň jedna dvojice úseček souměrných podle M. Na obr. 3.3(c) vidíme jednu z možných situací pro M uvnitř úsečky OR. Bod L lze volit kdekoliv na úsečce CD' (nebo $C'D$).

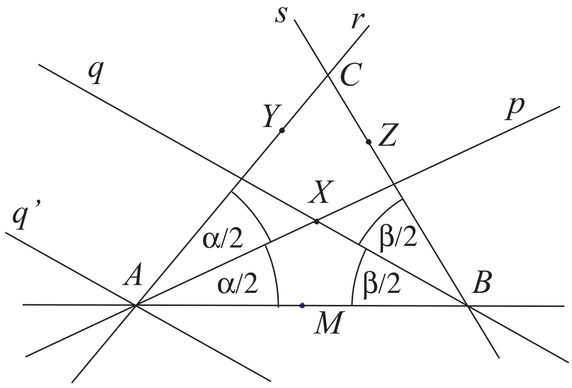
b)Jestliže bod M neleží na některé z úseček OR a PQ, je průnikem množin h a h' dvojice bodů souměrných podle M. Úloha má (až na záměnu v označení bodů K a L) jediné řešení. Jednu z možných situací vidíme na obr. 3.3(a).

Úloha 3.2 *Jsou dány různoběžky p, q a bod M, který neleží na žádné z nich. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod M byl středem strany AB a přímky p, q byly osy vnitřních úhlů BAC, ABC.*

Řešení - rozbor. Uvažume situaci na obr. 3.4. Podle zadání leží bod A na přímce p a zároveň $A = \mathcal{S}_M(B) \in q' = \mathcal{S}_M(q)$. Platí tedy $A \in p \cap q'$. Umíme tedy sestrojit bod A a další konstrukce je snadná.

Konstrukce. Sestrojíme přímku q', označíme A průsečík přímek p, q' a X průsečík přímek p, q. Dále sestrojíme vrchol $B = \mathcal{S}_M(A)$ a úhly XAY a XBZ tak, aby přímka p ležela mezi body B, Y, přímka q ležela mezi body A, Z a aby platilo $|\angle XAY| = |\angle XAB|$ a $|\angle XBZ| = |\angle XBA|$. Průsečík polopřímek AY a BZ je vrchol C. Trojúhelník ABC dorýsujeme spojením jeho vrcholů.

Zkouška správnosti. Z konstrukce je plyne, že bod M je středem strany AB

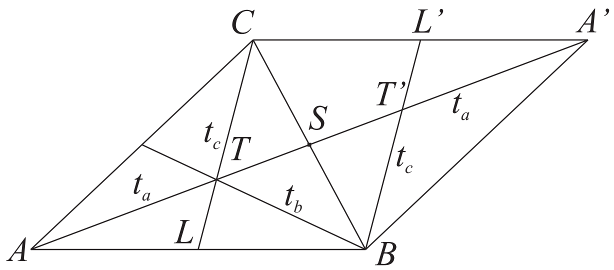


Obr. 3.4: Řešení úlohy 3.2.

trojúhelníka a přímky p, q osami vnitřních úhlů BAC a ABC. Konstrukce tedy splňuje podmínky úlohy.

Diskuse. Pokud jsou splněny podmínky zadání, lze sestrojit vždy právě jednu úsečku AB. Polopřímky AY a BZ nemohou ležet na téže přímce, také se nemusí protínat. Proto má úloha jedno nebo žádné řešení podle počtu společných bodů polopřímek AY a BZ.

Úloha 3.3 *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou -li dány délky t_a, t_b a t_c jeho těžnic.*



Obr. 3.5: Řešení úlohy 3.3.

Řešení - rozbor. Ve shodě s obr. 3.5 označme S střed strany BC, L střed strany AB, T těžiště trojúhelníka ABC, $A' = \mathcal{S}_S(A)$ a $T' = \mathcal{S}_S(T)$. Zřejmě platí $B = \mathcal{S}_S(C)$ a odtud

$$|BT'| = |CT| = \frac{2}{3}t_c.$$

Dále již snadno ověříme, že

$$|BT| = \frac{2}{3}t_b \quad \text{a} \quad |TT'| = \frac{2}{3}t_a.$$

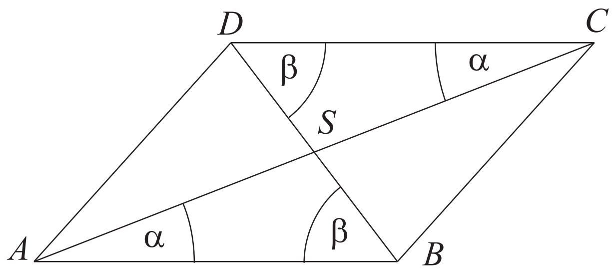
Konstrukce. Sestrojíme trojúhelník TBT' (z posledních vztahů známe délky jeho stran), střed S úsečky TT' a bod $C = \mathcal{S}_S(B)$. Bod L nalezneme jako průsečík polopřímky CT s kružnicí $k(C, t_c$. Nakonec sestrojíme vrchol $A = \mathcal{S}_S(B)$.

Správnost konstrukce je zřejmá.

Diskuse. Úloha má jediné řešení a to jen tehdy když délky úseček BT, BT' a TT' splňují trojúhelníkovou nerovnost. Tento vztah je ekvivalentní s nerovnostmi

$$|t_c - t_b| < t_a < t_c + t_b.$$

Úloha 3.4 *Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úsečky AB a CD shodné a rovnoběžné. Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník.*



Obr. 3.6: Řešení úlohy 3.4.

Řešení. Čtyřúhelník $ABCD$ má rovnoběžné strany AB a CD. Proto stačí dokázat, že jsou rovnoběžné i strany BC a AD. V souladu s obrázkem 3.6 označíme S průsečík úseček AC a BD. Úhly BAS a DCS jsou střídavé úhly vyťaté příčkou AC rovnoběžek AB a CD, proto jsou shodné. Analogicky zjistíme shodnost úhlů ABS a CDS. Vidíme tedy, že trojúhelníky ABS a CDS jsou shodné podle věty *usu*. Odtud dále plyne, že S je společným středem úseček AC a BD, a tak platí $C = \mathcal{S}_S(A)$ a $B = \mathcal{S}_S(D)$. Je tedy $BC \| AD$, což jsme chtěli dokázat.

Úlohy

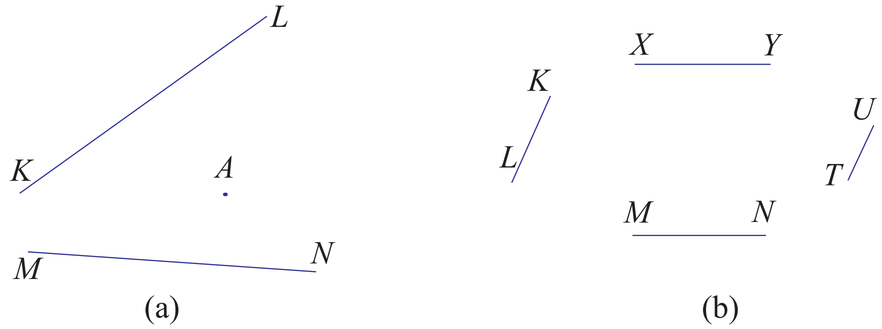
1. Uvnitř daného konvexního úhlu ABC je dán bod D. Sestrojte úsečku s koncovými body X, Y na ramenech úhlu tak, aby bod D byl středem úsečky XY.

2. Daným bodem M veďte přímku tak, aby po řadě proťala danou kružnici k a danou přímku p v bodech X, Y stejně vzdálených od bodu M.

3. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dán jeho střed O a body E, F přímek AB a CD. Kdy má úloha nekonečně mnoho řešení?

4. Průsečíkem daných dvou kružnic veďte přímku tak, aby proťala obě kružnice ve stejně dlouhých tětivách (a neprocházela druhým průsečíkem).

5. Jsou dány dvě soustředné kružnice $m(O, r_1)$, $n(O, r_2)$ a bod $S \in m$, přitom $r_1 < r_2$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy A, B leží na kružnici m a vrcholy C, D na n.



Obr. 3.7: Zadání úloh 6 a 7.

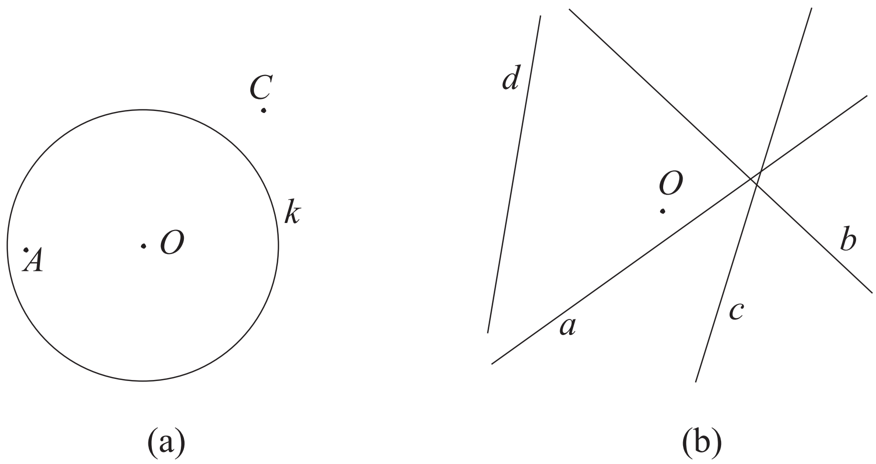
6. Na obr. 3.7(a) jsou dány úsečky KL, MN a bod A. V polorovině KMN sestrojte část přímky AV, kde V je průsečík přímek KL a MN. (Je zakázáno provádět jakékoli konstrukce v polorovině opačné k polorovině KMN.)

7. Někdo vymazal část narýsovaného rovnoběžníka tak, že z něj zbyly jen úsečky KL, MN, TU a XY, jak vidíme na obrázku 3.7(b). Sestrojte střed rovnoběžníka, bez rekonstrukce jeho vrcholů.

8. Je dán úhel a uvnitř něj body A, C. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, aby jeho vrcholy B, D ležely na ramenech úhlu.

9. V zadání na obr. 3.8(a) sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy B, D ležely na kružnici k, jejíž střed je O.

10. V zadání na obr. 3.8(b) sestrojte rovnoběžník $ABDC$ se středem O tak, aby jeho vrcholy A, B, C, D ležely po řadě na přímkách a, b, c, d.



Obr. 3.8: Zadání úloh 10 a 11.

11. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, b, t_c.

12. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_a, t_b.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_b, t_c.

14. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, v_b, t_a.

15. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a, v_b, t_c.

16. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a, v_b, t_a.

17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a, t_b, t_c.

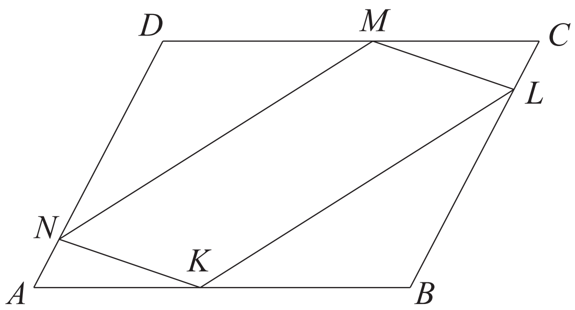
18. Je dána kružnice k s průměrem AB a rovnoběžnými tětivami AC a BD. Dokažte, že úsečka CD prochází středem kružnice.

19. Dokažte větu o střední příčce trojúhelníka: Jsou-li K a L středy stran AC a BC, pak je tzv. střední příčka KL rovnoběžná se stranou AB a platí $|KL| = |AB|/2$. (Návod: Do obrázku trojúhelníka s úsečkou KL přikreslete obraz trojúhelníka KLC v souměrnosti se středem L.)

20. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány středy K, L, M stran BC, CA, AB.

21. Nechť T je těžiště trojúhelníka ABC, p je rovnoběžka se stranou BC vedená středem úsečky AT, q je rovnoběžka se stranou CA vedená středem úsečky BT a s je rovnoběžka se stranou AB vedená středem úsečky CT. Dokažte, že přímky p, q a s ohraničují trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

22. Libovolnému trojúhelníku je vepsána kružnice s k ní jsou sestrojeny tečny rovnoběžné se stranami trojúhelníka. Ty spolu se stranami trojúhelníka ohraničují šestiúhelník. Dokažte, že protilehlé strany tohoto šestiúhelníka jsou shodné.



Obr. 3.9: K úloze 23.

23. Rovnoběžníku $ABCD$ je vepsán rovnoběžník $KLMN$ podle obr. 3.9 Dokažte, že oba rovnověžníky mají společný střed.

24. Průsečíkem daných dvou kružnic veďte přímku p tak, aby byl rozdíl délek tětiv vyťatých přímkou na kružnicích roven danému číslu a.

25. Dva hráči pokládají na stůl tvaru pravoúhelníku střídavě po jedné desetikorunové minci. Prohrává ten hráč, který nemůže svou minci umístit tak, aby se nedotýkala některé již položené mince. Popište vítěznou strategii prvního hráče.

Kapitola 4

Osová souměrnost

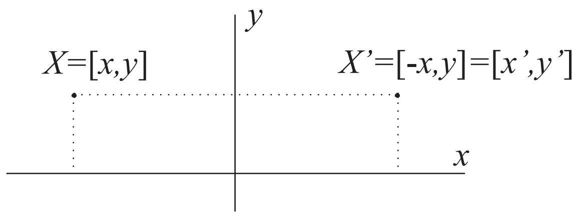
Definice 4.1 *Osová souměrnost (resp. osová symetrie) $\mathcal{S}_o$ je zobrazení určené přímkou o, nazývanou osa souměrnosti, a následujícími pravidly: Bod X je samodružný, právě když leží na ose souměrnosti. Jestliže $X \notin o$, je jeho obrazem ten bod X', pro nějž má úsečka XX' střed na ose o a je na ni kolmá. Zapisujeme $X' = \mathcal{S}_o(X)$.*

Věta 4.1 *Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{S}_o : X \to X'$ má v kartézské soustavě souřadnic v prostoru $\mathbb{E}_2$ tvar*

$$x' = -x \quad a \quad y' = y, \tag{4.1}$$

právě když je osa o totožná s oxou y.

Důkaz. Je zřejmý z obr. 4.1.



Obr. 4.1: Souměrnost podle osy y.

Věta 4.2 *Osová souměrnost je involuce.*

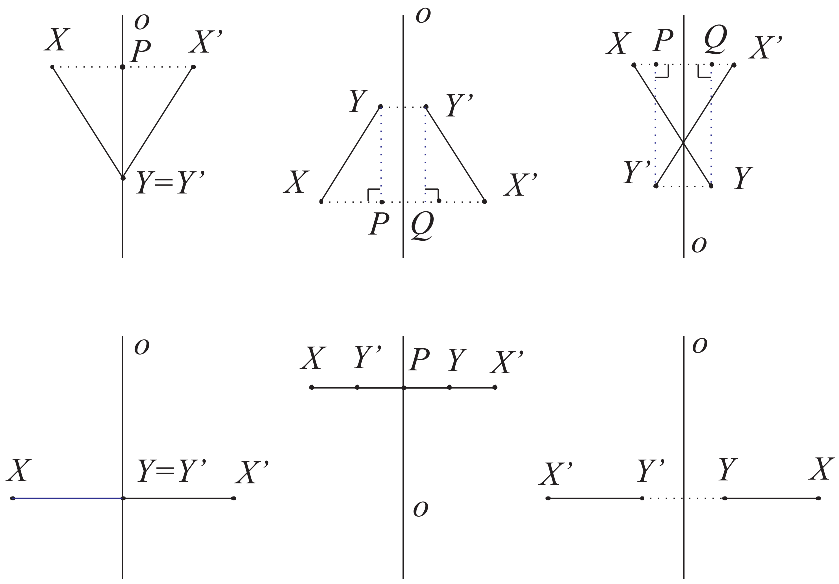
Poznámka. Věta je důsledkem poslední definice.

Věta 4.3 *Osová souměrnost v prostoru $\mathbb{E}_2$ je shodné zobrazení.*

Důkaz (analytický). Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit osu y kartézské soustavy souřadnic totožnou s osou y. Podle předchozí věty se libovolné body $X = [x_1,\ y_1]$ a $Y = [x_2,\ y_2]$ zobrazí na body $X' = [-x_1,\ y_1]$ a $Y' = [-x_2,\ y_2]$, a tak platí

$$|X'Y'| = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |XY|$$

□ Důkaz syntetickou metodou. Pokud se dva body X a Y nacházejí na ose souměrnosti, jsou samodružné, proto platí (3.1). Jestliže aspoň jeden z nich na ose o neleží, musíme dokázat (3.1) pro každou ze situací na obr. 4.2. To lze provést pomocí dosud poznaných vlastností osové souměrnosti a vět o shodnosti trojúhelníků. Důkaz provedeme jen pro situaci na obr. 4.2 vpravo nahoře, ostatní necháváme čtenáři jako cvičení. Z definice osové souměrnosti



Obr. 4.2: Obraz úsečky XY v osové souměrnosti.

plyne, že bod i jeho obraz mají od osy souměrnosti stejnou vzdálenost. Navíc jsou úsečky XX' a YY' na obrázku rovnoběžné, neboť jsou obě kolmé na osu o. Body P, Q jsou paty kolmic z bodů Y, Y' na přímku XX' a mají od osy stejnou vzdálenost jako bod Y . když po řadě označíme písmeny m, n vzdálenosti bodů X, Y od osy o, platí

$$|X'P| = m + n = |XQ|, \quad |Y'P| = |YQ| \quad \text{a} \quad |\angle X'PY'| = |\angle XQY|.$$

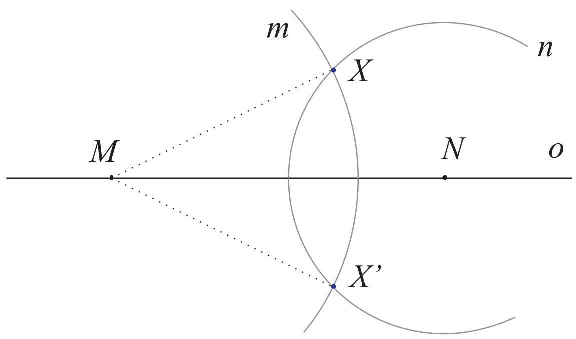
Jsou tedy trojúhelníky $X'PY'$ a XQY shodné a odtud plyne platnost vztahu (3.1).

Věta 4.4 *V osové souměrnosti $\mathcal{S}_o$ je přímka o samodružná. Obraz přímky $p \neq o$ je buď přímka rovnoběžná s přímkou p nebo se s ní protíná na ose o.*

Důkaz. Nechť má přímka p s osou o společný bod M. Pak je tento bod samodružný a prochází jím proto i obraz p' přímky p. Je-li to jediný bod množiny $p \cap o$, protínají se p a p' v tomto bodě osy. Má-li p s o společný ještě bod $N \neq M$, platí $p = o = p'$. Pokud p nemá s osou společný bod, musí být i $p' \cap o = \emptyset$. (Jinak by totiž průsečíkem přímek o a p' procházela i přímka p.) V tomto případě jsou přímky p a p' rovnoběžné, neboť jsou obě rovnoběžné s osou o. □

Věta 4.5 *Přímky p a $p' = \mathrm{S}_o(p)$ svírají s osou o stejně velké úhly.*

Důkaz. Pokud je přímka p rovnoběžná s osou, svírají přímky p a p' s osou nulový úhel a věta platí. Není-li přímka p rovnoběžná s osou o, protíná se podle věty 4.4 se svým obrazem p' v bodě osy, který označíme Y. Nechť bod $X \neq Y$ leží na přímce p a $X' = \mathrm{S}_o(p)$, střed úsečky XX' označíme S (viz situaci v levé horní části obrázku 4.2). Z definice osové souměrnosti plyne, že jsou úsečky PX a PX' shodné a kolmé na úsečku PY, která je společnou stranou trojúhelníků YPX a YPX'. Jsou tedy tyto trojúhelníky shodné podle věty sus. Odtud plyne shodnost úhlů XYP a $X'YP$, kterou jsme chtěli dokázat. □



Obr. 4.3: Konstrukce souměrného bodu kružítkem.

Řešené úlohy

Úloha 4.1 *Na listu papíru je narýsována přímka o a bod X, který na ní neleží. Sestrojte obraz bodu X v souměrnosti s osou o, jestliže můžete použít pouze kružítko.*

Řešení. Symbolem X' označme obraz bodu X. Libovolný bod M osy o je samodružný a daná souměrnost je shodné zobrazení. Proto $|MX'| = |MX|$, jinými slovy X' leží na kružnici $m(M, |MX|$ (obr. 4.3). Analogicky pro bod $N \neq M$ osy o platí $X' \in n\,(N, |NX|)$. Odtud $X' \in m \cap n$.

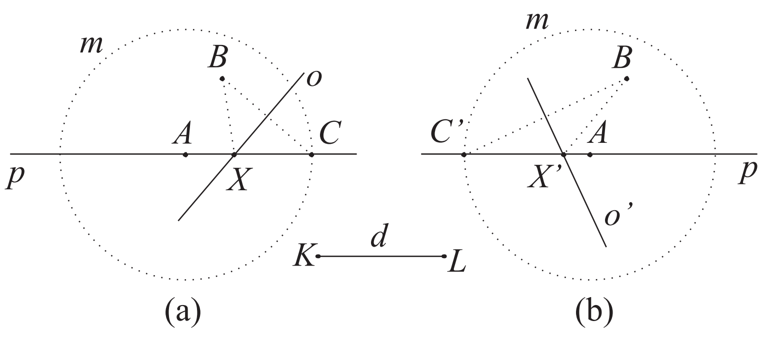
Konstrukce je zřejmá: Na přímce o zvolíme dva různé body M, N, sestrojíme kružnice $m\,(M, |MX|)$, $n\,(N, |NX|)$, jejichž průsečíkem (různým od bodu X) je X'. Podmínka $M \neq N$ zaručuje existenci jediného průsečíku $X' \neq X$ kružnic m, n a z vlastností společné tětivy dvou kružnic plyne souměrnost bodů X' a X podle osy o.

Úloha 4.2 *Je dán bod B, úsečka KL délky d, přímka p a na ní bod A. Za podmínky $|AB| < d$ setrojte na přímce p všechny body X, pro něž $|AX| + |BX| = d$.*

Řešení - rozbor. Zvolme na přímce p takový bod C, aby platilo $|AC| = d$, obr. 4.4 (a). Zadání úlohy vyhovuje průsečík X úsečky AC s osou o úsečky BC. Z osové souměrnosti podle o totiž plyne $|BX| = |XC|$ a odtud $|AX| + |BX| = |AX| + |XC| = |AC| = d$.

Konstrukce. Bod C nalezneme jako průsečík přímky p s kružnicí $m = (A, d)$, bod X je průsečík osy o s úsečkou AC. *Správnost* je zřejmá z rozboru.

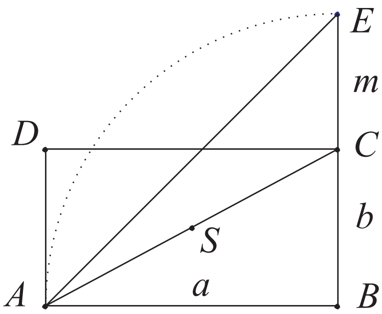
Diskuse řešitelnosti. Kružnice m protne přímku p vždy ve dvou bodech: C a C'. Podmínka $|AB| < d$ zaručuje, že přímka o protne úsečku AC v právě jednom bodě X. Stejně tak osa o' úsečky BC' protne úsečku AC' v právě jednom bodě X', obr. 4.4 (b). Úloha má tedy vždy dvě řešení.



Obr. 4.4: Konstrukce z úlohy 4.2.

Úloha 4.3 *Sestrojte obdélník $ABCD$ je-li dáno $m = a - b, u$, kde u je délka úhlopříčky. (Předpokládáme, že $m > 0$, tzn. $a > b$.)*

Řešení - rozbor. Předpokládejme, že obdélník je sestrojen, a na polopřímce BC zvolme bod E tak, aby $|BE| = a$ (obr. 4.5). Pak $|EC| = |BE| - |BC| = = a - b = m$ a $|\angle CEA| = |\angle BEA| = 45°$, jak plyne z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABE. Navíc $|AC| = u$, tak je možné sestrojit trojúhelník ACE a s využitím symetrie podle osy o úsečky AE doplnit na hledaný obdélník.



Obr. 4.5: Konstrukce z úlohy 4.3.

Konstrukce. Sestrojíme úhel CEY velikosti 45°, tak, aby $|CE| = m$. Bod A nalezneme jako průnik polopřímky EY s kružnicí $m = (C, u)$, bod B je průsečík osy o úsečky AE a polopřímky opačné k polopřímce CE. Vrchol $D = \mathcal{S}_S$, kde S je střed úsečky AC. Tím je obdélník $ABCD$ sestrojen. Správnost konstrukce je zřejmá.

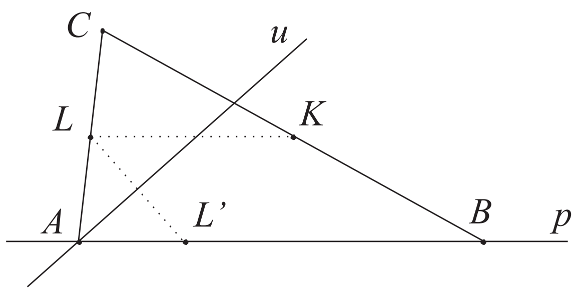
Diskuse řešitelnosti. Aby měla úloha řešení, musí existovat trojúhelník ACE s tupým úhlem při vrcholu C (po konstrukci bodu B totiž musí být C mezi B a E). To bude splněno jen za podmínky $u > m$. Úloha tedy má pro $u > m$ právě jedno řešení a pro $u \leq m$ nemá řešení.

Úloha 4.4 *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány středy K, L jeho stran BC, AC a přímka u, na níž leží osa úhlu BAC.*

Řešení - rozbor. Souměrnost $\mathcal{S}_u$ zobrazuje přímku AC na přímku AB, proto i bod $L' = \mathcal{S}_u(L)$ leží na AB (obr. 4.6). Navíc je přímka $p = AB$ rovnoběžná se střední příčkou KL.

Konstrukce. Bodem $L' = \mathcal{S}_u(L)$ povedeme rovnoběžku p s přímkou KL. Její průsečík s přímkou u je vrchol A. Dále sestrojíme vrcholy $C = \mathcal{S}_L(A)$, $B = \mathcal{S}_K(C)$ a tím i trojúhelník ABC.

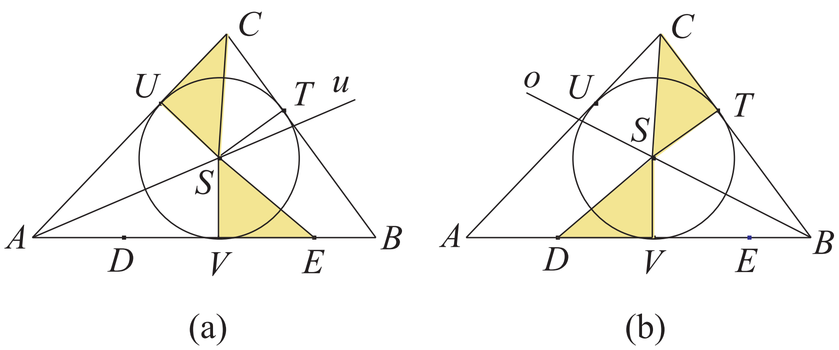
Diskuse řešitelnosti. Úloha má právě jedno řešení, pokud přímka p protíná



Obr. 4.6: Řešení úlohy 4.4.

polopřímku KL v jejím vnitřním bodě a není na ni kolmá. V ostatních případech nemá řešení. (Nakreslete náčrtky a zdůvodněte.)

Úloha 4.5 *Nechť D, E jsou body souměrně sdružené s vrcholem C podle os u a o úhlů BAC a ABC v trojúhelníku ABC. Dokažte, že bod dotyku strany AB s kružnicí trojúhelníku vepsanou leží ve středu úsečky DE.*



Obr. 4.7: Důkaz věty z úlohy 4.5.

Řešení. Přímky u a o procházejí středem S kružnice trojúhelníku vepsané, která se dotýká stran BC, CA a AB v bodech T, U a V (obr. 4.7). Trojúhelníky CSU a CST jsou shodné podle věty sus, neboť $|SU| = |ST|$, $|\angle CUS| = |\angle CTS| = 90°$ a přepona CS je společná. Odtud $|CU| = |CT|$. Trojúhelníky CSU a ESV jsou souměrné podle přímky u, neboť $V = \mathcal{S}_u(A)$, obr. 4.7 (a). Analogicky je trojúhelník DSV obrazem trojúhelníka CST v symetrii $\mathcal{S}_o$, obr. 4.7 (b). Platí tedy

$$|DV| = |CT| = |CU| = |VE|$$

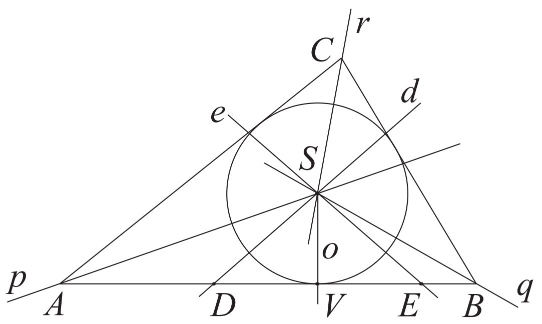
a bod V je středem úsečky DE.

Věta 4.6 *(Věta o tečnách, důsledek řešení příkladu 4.5) Jsou-li T, U body dotyku tečen sestrojených ke kružnici z vnějšího bodu M, pak*

$$|MU| = |MT|.$$

Úloha 4.6 *Někdo z narýsovaného trojúhelníku ABC s vepsanou kružnicí k a osami p, q, r vnitřních úhlů CAB, ABC a BCA umazal trojúhelník i s vrcholy tak, že zbyla jen kružnice k a přímky p, q, r. Proveďte rekonstrukci trojúhelníku.*

Řešení - rozbor. Předpokládejme, že úloha je sestrojena (obr. 4.8) a označme D, E průsečíky přímky AB s přímkami $d = \mathcal{S}_q(r)$ a $e = \mathcal{S}_p(r)$. Podle věty z příkladu 4.5 je v trojúhelníku DES pata V jeho výšky SV středem strany DE. Trojúhelník DES je tedy rovnoramenný a proto je osa jeho vnitřního úhlu DSE totožná s přímkou SV.] *Konstrukce.* Sestrojíme přímky d, e a



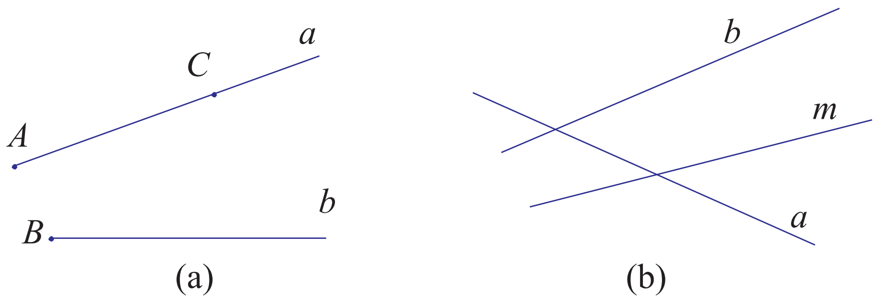
Obr. 4.8: Řešení úlohy 4.6.

osu o té dvojice jejich vrcholových úhlů, která neobsahuje přímku p. Pak v bodě $V : o \cap k$ sestrojíme tečnu, která protne přímky p, q v bodech A a B. Konstrukci trojúhelníka dokončíme sestrojením vrcholu C jako průsečíku přímky r s tečnou ke kružnici k z bodu A nebo z bodu B.
Správnost konstrukce je zřejmá. Diskusi řešitelnosti neuvádíme, neboť zadání úlohy vycházelo z existence hledaného trojúhelníka.

Úlohy

1. V zadání podle obr. 4.9(a) sestrojte úsečku, jejíž délka je rovna vzdálenosti bodu C od průsečíku přímek a, b. Konstrukci je povoleno provádět jen v polorovině ABC.

2. V rovině jsou dány různoběžky a, b a přímka m podle obr. 4.9(b). Sestrojte přímku p kolmou na m tak, aby byly její průsečíky s přímkami a, b stejně vzdáleny od m.



Obr. 4.9: Zadání úloh 1 a 2.

3. Daným bodem M veďte přímku, která svírá s danými přímkami a, b stejné úhly.

4. V rovině zbyly z trojúhelníku ABC jen osy úhlů ABC, BCA a vrchol A. Zrekonstruujte trojúhelník ABC.

5. V rovině je dána přímka p a kružnice m, n. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho úhlopříčka AC byla částí přímky p a vrcholy B, D ležely na kružnicích m, n.

6. Jsou dány body A,B,C ležící v tomto pořadí na přímce p a kolmice q k přímce p v bodě C. Sestrojte na přímce q takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

7. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který má vrchol C na ose úhlu BAD, jsou-li dány délky jeho stran.

8. Sestrojte čtverec, je-li dán: a) součet, b) rozdíl délky úhlopříčky a strany.

9. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ je-li dáno:
   a) $a + b, u$
   b) $a + u, b$

c) $u - a, b$
d) $a - b, u$ (u je délka úhlopříčky, $a \geq b$.)

10. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b, \alpha, v_b$.

11. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b + c, \alpha, v_c$.

12. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b, c, \gamma$.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $b - a, \alpha, c$.

14. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a - b, \beta, \gamma$.

15. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $b - a, \beta, v_a$.

16. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b + c, \alpha, \beta$.

17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a, \alpha - \beta, b$.

18. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b, c, \beta - \alpha$.

19. Jsou dány body A, B uvnitř poloroviny s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby byl součet $s = |AX| + |XB|$ minimální.

20. Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod C. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na polopřímkách VX, VY a obvod trojúhelníku byl minimální.

21. Jsou dány body A, B uvnitř poloroviny s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby
a) přímky AX a BX měly stejnou odchylku od přímky p,
b) jedna z nich měla od přímky p dvakrát větší odchylku než druhá.

22. Kulečník má tvar pravoúhelníku. Sestrojte trajektorii kulečníkové koule z místa A do místa B odrazem přes a) dva, b) tři, c) čtyři mantinely. Zvažte možnosti různých mantinelů v pořadí odrazů.

23. Rovinná zrcadla svírají úhel a) $90°$, b) $60°$. Kolik obrazů bodu A umístěného před nimi vznikne? Sestrojte je.

24. Jsou dány rovnoběžky p, o a přímka q s nimi různoběžná. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC s vrcholem A na přímce p, vrcholem B na přímce q, jejichž těžnice CC' je částí přímky o.

25. Je dána kružnice k s průměrem KL a středem S. V ní leží kružnice m, n s průměry KS, LS. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k, m, n.

26. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu X základny AB od přímek AC a BC je konstantní.

Kapitola 5

Afinní transformace, samodružné objekty

Potřebné poznatky k řešení úloh z této kapitoly naleznete (včetně řešených úloh) v publikaci [6].

1. Která ze známých shodných zobrazení v $\mathbb{E}_2$ mají přímku samodružných bodů a dva samodružné směry?

2. Která ze známých shodných zobrazení v $\mathbb{E}_2$ mají právě jeden samodružný bod a žádný samodružný směr?

3. Která ze známých afinních zobrazení mají aspoň jeden samodružný směr s vlastním číslem $\lambda = 0$?

4. Určete všechny afinity prostoru $\mathbb{A}_n$, které mají všechny směry samodružné. (Řešte analýzou dané podmínky pomocí geometrie hmotných bodů.)

5. Určete samodružné body a směry afinních transformací v prostoru $\mathbb{A}_2$:
   a) $f_1: \quad x' = 2x - y + 1,\ y' = x + 2y + 3,$
   b) $f_2: \quad x' = 3x - y + 6,\ y' = 3y + 4,$
   c) $f_3: \quad x' = -3x + 8,\ y' = -3y - 4,$
   d) $f_4: \quad x' = x + 5,\ y' = y,$
   e) $f_5: \quad x' = 2x,\ y' = y + 3.$

6. Určete samodružné body a směry těchto zobrazení v prostoru $\mathbb{A}_3$:
   a) $f_1: \quad x' = 2x + 1,\ y' = x + 2y - 5,\ z' = 2x + y + 2z + 2,$
   b) $f_2: \quad x' = x,\ y' = x + 2z + 2,\ z' = 2x - y + 2z + 1,$
   c) $f_3: \quad x' = x + 1,\ y' = 2x + 2y + 2z,\ z' = 2z + 1,$
   d) $f_4: \quad x' = 2x + 2y + 2z,\ y' = 2x + y - 4,\ z' = x + z - 2,$

e) $f_5: \quad x' = -x - 2y,\ y' = -3x - 2y,\ z' = 2x + 2y + z,$
f) $f_6: \quad x' = 3x - 2y + 6z - 2,\ y' = x + 3z - 1,\ z' = -x + y - 2z + 1,$
g) $f_7: \quad x' = -2x - 2y + 2z + 1,\ y' = 2x + 3y - 3z,\ z' = y - z + 4.$

7. Zjistěte, zda je dané zobrazení základní afinita, resp. elace:
   a) $f_1: \quad x' = -x + 2y + 1,\ y' = -4x + 5y + 2,$
   b) $f_2: \quad x' = 2x + y - z - 1,\ y' = 3x + 4y - 3z - 3,\ z' = 2x + 2y - z - 2,$
   c) $f_3: \quad x' = x,\ y' = y,\ z' = -x + 2y - 1,$
   d) $f_4: \quad x' = 5x - 4y - 4z + 4,\ y' = 2x - y - 2z + 2,\ z' = 3x - 3y - 2z + 3,$
   e) $f_5: \quad x' = 3x - y + 2,\ y' = 5x - 2y + 4,\ z' = z.$

8. Afinita f v $\mathbb{A}_2$ je dána třemi lineárně nezávislými body M_0, M_1, M_2 a jejich obrazy $M'_0 = f(M_0)$, $M'_1 = f(M_1)$, $M'_2 = f(M_2)$. Rozložte ji na co nejmenší počet základních afinit, jestliže v dané afinní soustavě souřadnic je
   a) $M_0 = [1,\ -1],\ M_1 = [0,\ 1],\ M_2 = [-1,\ 0],$
   $M'_0 = [0,\ 0],\ M'_1 = [1,\ 2],\ M'_2 = [0,\ 1],$
   b) $M_0 = [2,\ 1],\ M_1 = [0,\ 0],\ M_2 = [1,\ 0],$
   $M'_0 = [2,\ 1],\ M'_1 = [4,\ 2],\ M'_2 = [3,\ 2],$
   c) $M_0 = [1,\ 0],\ M_1 = [0,\ 1],\ M_2 = [1,\ -1],$
   $M'_0 = [3,\ 1],\ M'_1 = [2,\ 5],\ M'_2 = [2,\ -2],$
   d) $M_0 = [0,\ 1],\ M_1 = [1,\ -2],\ M_2 = [-1,\ 0],$
   $M'_0 = [0,\ 1],\ M'_1 = [5,\ 2],\ M'_2 = [-3,\ 0].$

9. Rozložte afinitu f na osové afinity, je-li dána v afinní soustavě souřadnic v $\mathbb{A}_2$ rovnicemi $x' = 2x - y + 1, \quad y' = 3x - 2.$

Kapitola 6

Posunutí

Definice 6.1 *Posunutí (translace) $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ je zobrazení v E_2 určené vektorem $\vec{u}$, které každému bodu $X \in E_2$ přiřazuje bod $X' = X + \vec{u}$.* [1]

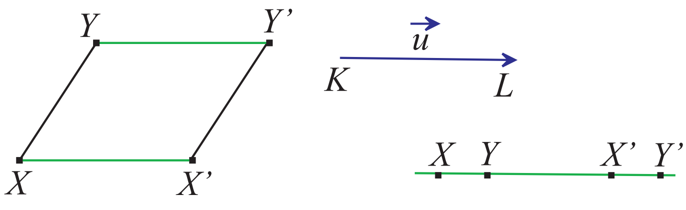
Řešené úlohy

Úloha 6.1 *Dokažte, že posunutí je shodné zobrazení, v němž jsou všechny směry samodružné.*

První řešení (analytické). Jsou-li X, Y libovolné body daného afinního prostoru, pak pro jejich obrazy X' a Y' platí: $X' = X + \vec{u}$ a $Y' = Y + \vec{u}$. Odečtením obou rovnic dostaneme:

$$X' - Y' = X - Y.$$

Orientované úsečky $X'Y'$ a XY tedy patří do téhož vektoru. Odtud $\overrightarrow{X'Y'} \| \overrightarrow{XY}$ (libovolný směr je samodružný) a $|X'Y'| = |XY|$ (zobrazení je shodné).



Obr. 6.1: Posunutí

Druhé řešení(syntetické). Chceme dokázat, že pro libovolné dva body X, Y dané roviny platí: $|X'Y'| = |XY|$ a $X'Y' \| XY$. To je zřejmé, jsou-li body

[1]Stejným vztahem definujeme translaci i v $n-$rozměrném afinním prostoru.

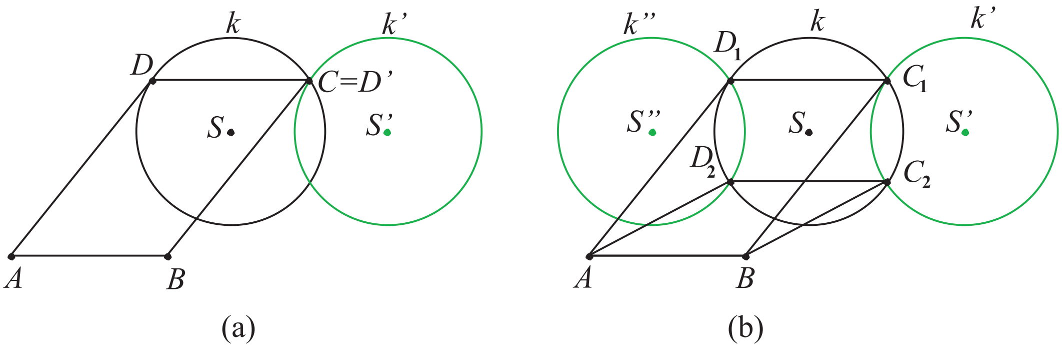
totožné. Jsou-li různé a úsečka XY není rovnoběžná s $\vec{u}$, jsou body X, Y, X' a Y' vrcholy rovnoběžníka $XYY'X'$, jak vidíme v levé části obr. 6.1. Požadované vlastnosti tedy platí. Jestliže je orientovaná úsečka XY rovnoběžná vektorem $\vec{u}$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je s ním souhlasně rovnoběžná. Mohou nastat tři situace:
1) Bod Y leží mezi body X' a Y',
2) $Y = X'$
32) Bod Y leží mezi X a X'. V prvním případě podle obr. 6.1 napravo platí

$$|\vec{u}| + |X'Y'| = |XX'| + |X'Y'| = |XY'| = |XY| + |YY'| = |XY| + |\vec{u}|,$$

a odtud $|X'Y'| = |XY|$. Pro zbývající situace je důkaz analogický. (Nakeslete si obrázky a důkazy proveďte).

Úloha 6.2 *Je dána úsečka AB a kružnice k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby body B, D ležely na kružnici k.*

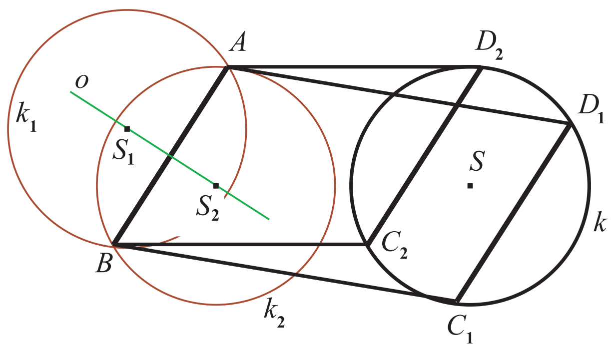
Řešení. Předpokládejme,že je rovnoběžník sestrojen, obr. 6.2(a). Posunutí $\mathcal{T}_{B-A}$ zobrazí bod D do bodu D' a kružnici k na kružnici k'. Ze vztahů $D' \in k'$, $C \in k$ a $D' = C$ zjistíme $C \in k \cap k'$. Odtud plyne konstrukce: Sestrojíme kružnici k' a v jejím průsečíku s kružnicí k bod C. Vrchol D je pak druhý průsečík kružnice k s přímkou, která je rovnoběžná s AB a prochází bodem C (jinak řečeno: $D = \mathcal{T}_{A-B}(C)$). Tím je rovnoběžník sestrojen.



Obr. 6.2: Rozbor a řešení úlohy 6.2.

Zkouška správnosti a diskuse. Z konstrukce a rozboru plyne, že sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník požadovaných vlastností. Posunutí $\mathcal{T}_{A-B}$: $k \to k''$ nepřináší nové řešení (obr. 6.2b). Úloha má dvě řešení, jestliže body A a B neleží na k a $0 < |AB| < d$, kde d je průměr kružnice k. Leží-li body

A a B na kružnici k (a $0 < |AB| < d$) , má úloha jediné řešení (pravoúhelník kružnici vepsaný) Podmínce $|AB| = d$ vyhovuje jediné řešení, neleží-li body A, B na kružnici. Rovnoběžník nelze sestrojit, pokud je úsečka AB průměrem kružnice nebo pokud platí $|AB| > d$.



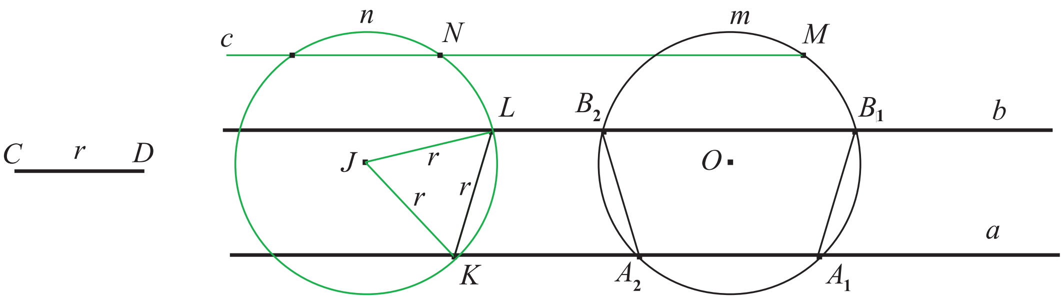
Obr. 6.3: Jiný postup řešení úlohy 6.2.

Poznámka. Jiná možnost řešení je založena na této myšlence: Uvažujme kružnici k_1 (resp. k_2) s tětivou AB a navíc shodnou s kružnicí k. Je-li S_1 (resp. S_2) její střed, pak posunutí $\mathcal{T}_{S-S_1}$ (resp. $S - S_2$) přemístí k_1 (k_2) na k a AB na DC. Zbytek domyslete sami. Na obr.6.3 vidíme obě možná řešení.

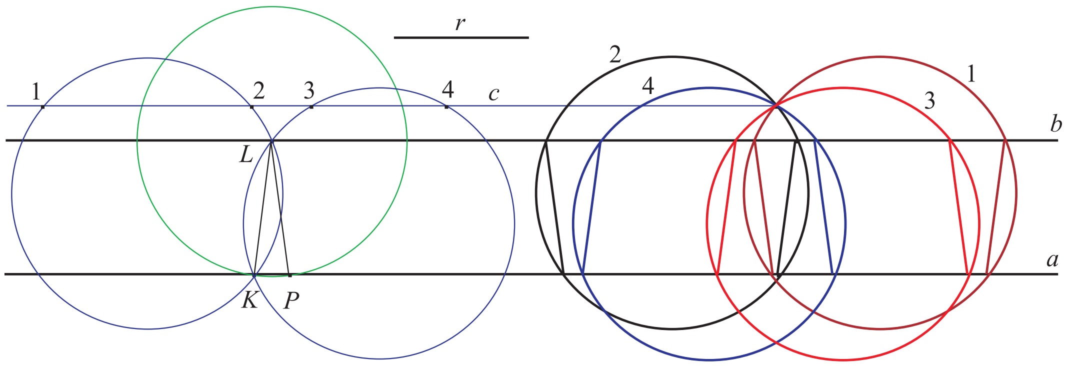
Úloha 6.3 *Sestrojte všechny kružnice o daném poloměru r tak, aby každá z nich procházela daným bodem M a na daných rovnoběžkách a, b vytínala úsečku délky r.*

Řešení. Zkusme nejprve sestrojit libovolnou kružnici n, která vytíná na daných rovnoběžkách tětivu délky r. (Od podmínky, že musí procházet bodem M, jsme zatím upustili.) To lze provést snadno: Sestrojíme libovolnou úsečku KL tak, aby $K \in a$, $L \in b$ a $|KL| = r$. Úsečku doplníme na rovnostranný trojúhelník JKL a pak již stačí narýsovat kružnici $n(J, r)$ (levá část obrázku 6.4).

Aspoň jednu kružnici m, která splňuje všechny podmínky původní úlohy, nyní nalezneme vhodným posunutím kružnice n. Posunutí je zřejmě rovnoběžné s přímkami a, b, zbývá najít jeho velikost. Pokud si představíme posouvání jako pohyb, bude se vzor bodu M pohybovat po rovnoběžce c s přímkami a, b, která prochází daným bodem M. Libovolný bod N průniku přímky c s kružnicí n určuje vzor bodu M a tedy i hledané posunutí. $\mathcal{T}_{M-N}$. Tím je proveden rozbor. Provedení konstrukce a ověření její správnosti ponecháváme čtenáři.



Obr. 6.4: Rozbor úlohy 6.3.



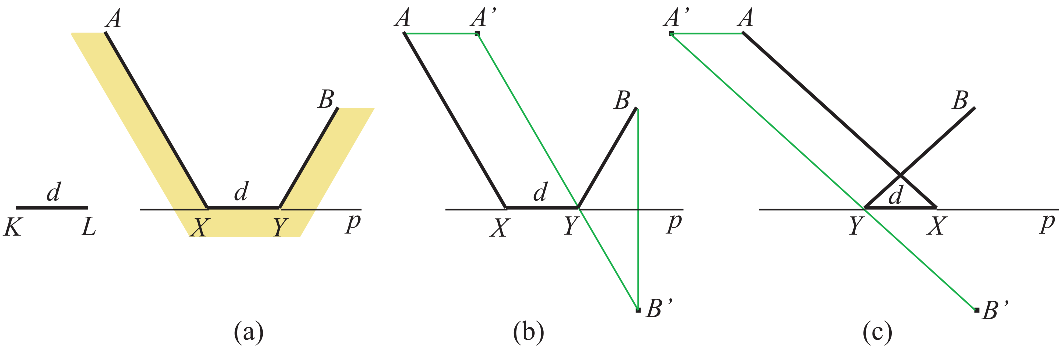
Obr. 6.5: Maximální počet řešení úlohy 6.3.

K diskusi uveďme, že počet řešení závisí jednak na vzájemném vztahu délky r a vzdálenosti v přímek a, b a jednak na poloze bodu M. Předpokládejme nejprve $r > v$. Ke zvolenému bodu $L \in b$ obr.6.5 lze sestrojit kromě úsečky KL ještě úsečku PL délky r tak, aby $K, P \in a$. Úsečka KL je tětivou dvou kružnic o poloměru r, z nichž každá má nejvýš dva body N společné s přímkou c. Pro úsečku KL tedy existují až čtyři různé kružnice m, které jsou řešením úlohy. Analogická úvaha pro úsečku PL nepřináší vzhledem k symetrii podle kolmice na přímku a v bodě L (resp. v bodě M, uvažujeme-li obrazy kružnic n) žádná nová řešení. Úloha má tedy pro $r > v$ 0 až 4 řešení podle počtu průniků přímky c s pomocnými kružnicemi n. Obr.6.5 ukazuje příklad čtyř řešení pro situaci, kdy je M vně pásu přímek a, b. Výsledné kružnice a příslušné vzory bodu M jsou kvůli názornosti jen očíslovány.

Zkuste nakreslit situace, kdy má úloha pro $r > v$ 0, 1, 2 nebo 3 řešení. Dále ověřte, že pro $r = v$ má úloha právě dvě řešení, leží-li M mezi přímkami a, b, jediné řešení, když se nachází na jedné z nich a žádné řešení, jestliže leží vně pásu přímek a, b. Pokud je $r < v$, nemá úloha řešení.

Poznámka. Povšimněte si, že vynecháním vhodné podmínky jsme převedli původní úkol na úlohu, jejíž řešení je jednodušší. Vyřešení této obecnější úlohy bylo klíčem k řešení úlohy původní. Je to užitečný postup a je dobré jej ovládat.

Úloha 6.4 *Na příčném profilu terénu jsou dány body A, B a přímka p, na níž leží dno výkopu pro železniční trať. Narýsujte profil výkopu, jestliže šířka dna má mít danou délku d a stěny výkopu mají mít týž spád.*



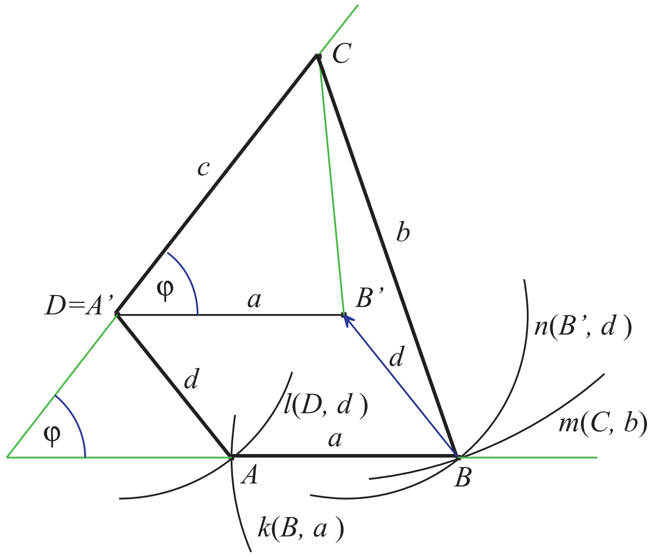
Obr. 6.6: Profil výkopu pro železniční trať

Řešení. Máme sestrojit lomenou čáru $AXYB$, aby $X, Y \in p$, $|XY| = d$ a $|\angle AXY| = |\angle XYB|$ (obr.6.6). Označme $A' = \mathcal{T}_{L-K}(A)$. Na přímce p potřebujeme sestrojit bod Y tak, aby měly úsečky $A'X$ a BY stejnou odchylku od přímky p. To snadno provedeme užitím symetrie podle p (viz obr. 6.6b). Z praktického hlediska má úloha smysl jen když je délka d menší než kolmý průmět úsečky AB do přímky p.

Na závěr poznamenejme, že řešení matematicky formulované úlohy jsou dvě. To druhé, jež nalezneme pomocí posunutí $\mathcal{T}_{L-K}$ (obr. 6.6c), nemá praktický význam.

Úloha 6.5 *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky a, b, c, d jeho stran a velikost φ toho úhlu přímek AB, CD, jehož ramena procházejí body C, D.*

Rozbor. Předpokládejme, že je čtyřúhelník sestrojen (obr. 6.7). Posunutí $\mathcal{T}_{D-A}$ zobrazí bod A do bodu $A' = D$ a bod B do bodu B'. Čtyřúhelník $ABB'D$ je rovnoběžník a tak je trojúhelník $DB'C$ jednoznačně určen délkami stran $|DB'| = a$, $|DC| = c$ a velikostí úhlu jimi sevřeného: $|\angle CDB'| = \varphi$. Pak je však určen i trojúhelník $B'BC$ třemi stranami ($B'C$, $B'B$ a BC, poslední dvě mají délky b a d) i rovnoběžník $ABB'D$. Lze tedy sestrojit všechny



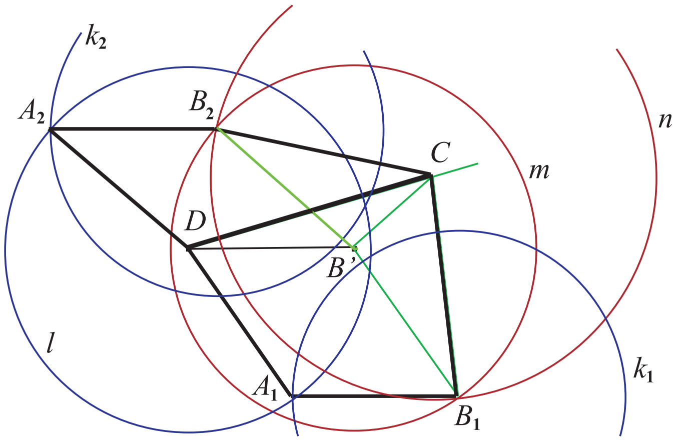
Obr. 6.7: Obrázek k rozboru úlohy 6.5

vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$.

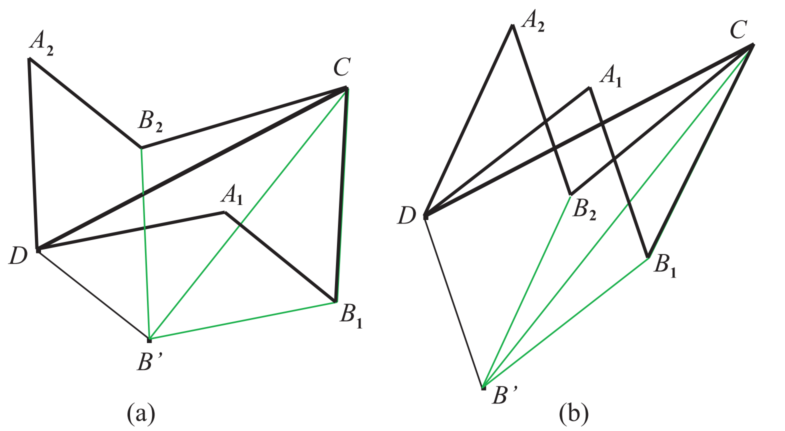
Konstrukce.

1. Trojúhelník $DB'C$ z daných dvou stran a velikosti jimi sevřeného úhlu.
2. $B \in m(C, b) \cap n(B', D)$
3. Doplnění trojúhelníku $DB'B$ na rovnoběžník $ABB'D$: $A \in k(B, a) \cap l(D, d)$
4. Čtyřúhelník $ABCD$

Ověření správnosti konstrukce a diskuse počtu řešení. Z bodu 1 konstrukce plyne $|DC| = c$, z bodu 2 pak $|CB| = b$. Bod 3 zaručuje: $|AB| = a$ a $|AD| = d$. Z bodů 1 a 3 nakonec plyne, že velikost úhlu přímek AB a CD je φ. Musíme si však uvědomit, že uvedená konstrukce zaručuje jen sestrojení lomené čáry $ABCDA$, která nemusí být konvexním čtyřúhelníkem. Pokud je čára z konkrétně zadaných hodnot sestrojitelná, může představovat nekonvexní čtyřúhelník - obr. 6.9(a), zkřížený nekonvexní čtyřúhelník - obr. 6.9(b), některé strany mohou ležet na téže přímce apod. Počet uzavřených lomených čar závisí pouze na počtu společných bodů nesoustředných kružnic m, n. (Rovnoběžník $ABB'D$ je jednoznačně určen, může se však degenerovat na úsečku.) Úloha tedy může mít 0, 1 nebo 2 řešení. Obr. 6.8 ukazuje situaci,



Obr. 6.8: Provedení konstrukce čtyřúhelníka $ABCD$

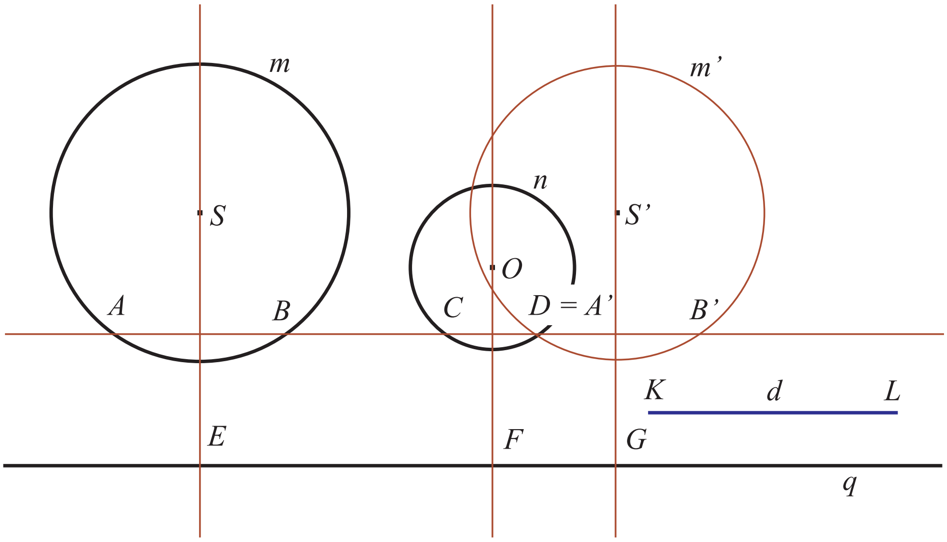


Obr. 6.9: Ukázka situací, kdy vznikají nekonvexní čtyřúhelníky $ABCD$

kdy vzniknou dva konvexní čtyřúhelníky.

Úloha 6.6 *Jsou dány kružnice m, n a přímka q. Sestrojte přímku p rovnoběžnou s q tak, aby součet (rozdíl) délek tětiv, které vytne p na kružnicích, měl danou délku d.*

*Řešení.*Uvažujme, že je přímka požadovaných vlastností sestrojena, jak znázorňuje obr. 6.10. Daná kružnice m se v posunutí $\mathcal{T}_{D-A}$ zobrazí na kružnici m'. Kolmé průměty středů S, O a S' kružnic m, n a m' do přímky q nechť



Obr. 6.10: Rozbor úlohy 6.6

jsou po řadě E, F a G. Při označení krajních bodů tětiv podle obrázku platí

$$d = |CD| + |AB| = |CD| + |DB'| = |CB'| = 2|FG|$$

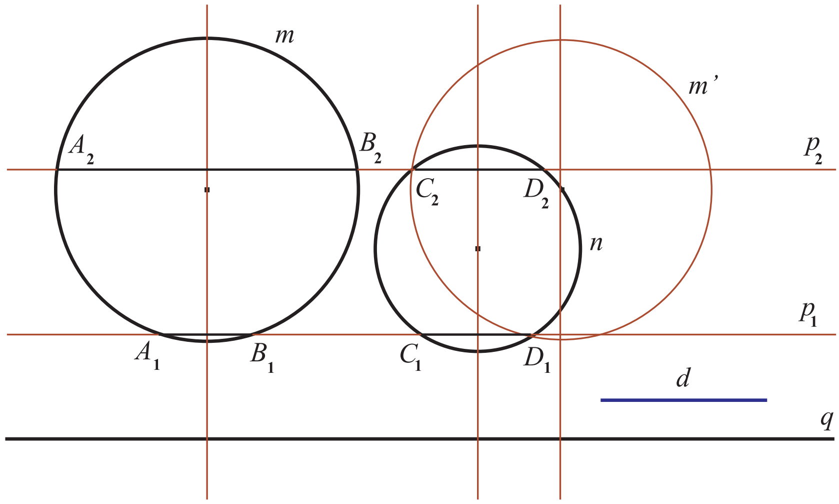
a

$$|EG| = |SS'| = |AA'| = |AD|.$$

Odtud plyne konstrukce: Nejprve sestrojíme paty E, F kolmic z bodů S, O na přímku q. Potom bod G jako průsečík přímky q s kružnicí $k(F, d/2$ a nalezneme obraz m' kružnice m v posunutí $\mathcal{T}_{G-E}$. Hledaná přímka p je rovnoběžka s přímkou q vedená průsečíkem kružnic n a m'.

Správnost postupu je zřejmá až na okolnost, že kružnice k má s přímkou q vždy dva průsečíky, ten druhý označme H, a nemusí být jasné, který z nich při konstrukci použít. Snadno ověříme, že obrazem kružnice m v posunutí $\mathcal{T}_{H-E}$ je kružnice m'' symetrická s kružnicí m' podle přímky OF. Obě posunutí $\mathcal{T}_{H-E}$ a $\mathcal{T}_{G-E}$ tedy určují tytéž přímky p.

Diskuse: Podle počtu společných bodů kružnic m' a n existují buď dvě přímky p, nebo jen jedna, nebo žádná. Číslo d může být rovno součtu délek obou tětiv, nebo absolutní hodnotě jejich rozdílu. Která z těchto dvou možností nastane, to závisí na vzájemné poloze a velikosti daných kružnic, na směru přímky q a velikosti čísla d. Například při zadání podle obr. 6.11 jsou řešením přímky p_1 a p_2, přičemž pro délky tětiv na první z nich platí $|A_1B_1| + |C_1D_1| = d$, kdežto na druhé je $d = |A_2B_2| - |C_2D_2|$. Změníme-li



Obr. 6.11: Ilustrace k diskusi úlohy 6.6

vhodně polohu a velikost kružnic, může být číslo d rovno součtu (resp. absolutní hodnotě rozdílu) délek tětiv na každé z obou vyhovujících přímek. Doporučujeme čtenáři, podrobnější průzkum pomocí dynamické geometrie - například v Cabri.

Úlohy

1. Jsou dány rovnoběžné přímky a, b a mezi nimi bod C. Bodem C veďte:
   a) Úsečku AB dané délky d tak, aby body A, B ležely po řadě na přímkách a, b,
   b) kružnici k tak, aby a, b byly její tečny.

2. Jsou dány kružnice $m(S_1, r_1)$ a $n(S_2, r_2)$. Sestrojte všechny úsečky MN rovnoběžné s S_1S_2 tak, aby platilo: $M \in m$, $N \in n$ a $2|MN| = |S_1S_2|$.

3. Je dána přímka p, kružnice k a úsečka AB. Sestrojte úsečku PK shodnou a rovnoběžnou s úsečkou AB tak, aby $P \in p$ a $K \in k$.

4. Na daných přímkách a, b sestrojte body A, B tak, aby byla úsečka AB rovnoběžná s danou přímkou c a měla danou délku d.

5. Je dán bod M a dvě dvojice rovnoběžných přímek: a, b a c, d. Bodem M veďte přímku p tak, aby na ní dvojice rovnoběžek a, b vytínala úsečku stejné délky jako dvojice rovnoběžek c, d.

6. Uvnitř obdélníku $ABCD$ je dán bod E. Dokažte, že existuje konvexní čtyřúhelník, který má kolmé úhlopříčky velikostí $|AB|$, $|BC|$ a strany délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ a $|DE|$.

7. Kružnice $m(S, r)$ a $n(O, r)$ mají vnější dotyk v bodě T. Na kružnici m je zvolen libovolně bod $M \neq T$, druhý průsečík kružnice n s kolmicí na TM v bodě T označíme N. Dokažte, že $|MN| = 2r$.

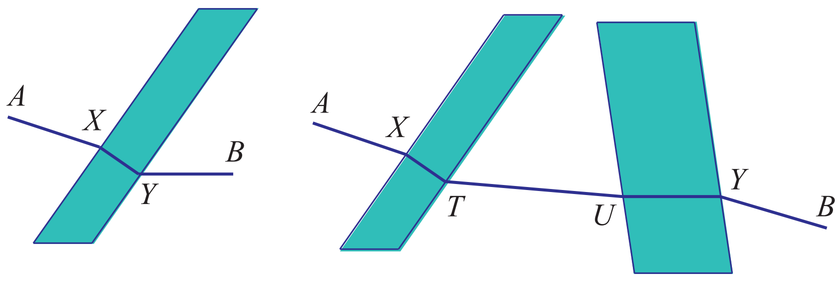
8. Kružnice $m(S, r)$ a $n(O, r)$ se protínají v bodech A, B. Střed S leží vně n a O leží vně m. Průsečík úsečky OS s kružnicí n označíme N a průsečík polopřímky NS s kružnicí m označíme M. Dokažte, že platí $|MN|^2 + |AB|^2 = 4r^2$.

9. Jsou dány kružnice m, n a přímka q. Sestrojte přímku p rovnoběžnou s q tak, aby

   a) vzdálenost jejího průsečíku s kružnicí m od jejího průsečíku s n měla danou délku d,
   b) tětivy, které vytne p na obou kružnicích, měly stejnou délku.

10. Průsečíkem A daných kružnic $m(S, r_1)$, $n(O, r_2)$ veďte přímku p tak, aby úsečka, která vznikne sjednocením obou tětiv vyťatých přímkou na kružnicích měla danou délku d.

11. Sestrojte nejkratší cestu z místa A do místa B a) s mostem XY přes řeku podle obr. 6.12a, b) s mosty XY a TU přes dvě řeky podle obr. 6.12b.



(a) (b)

Obr. 6.12: Obrázek k úloze 13

12. Jsou dány body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte body X, Y na přímce p tak, aby jejich vzdálenost měla danou délku d a aby byl součet $s = |AX| + |XY| + |YB|$ minimální.

13. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, je-li dáno:
   a) a, b, c, d,
   b) a, c, e, f,
   c) α, e, f, s, kde s je délka jeho střední příčky.(Značení prvků čtyřúhelníku $ABCD$ viz obr. XXXX.)

14. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li délky $a = |AB|$, $b = |BC|$ a velikost ω toho úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí body A,B.

15. Je dán kruh ohraničený kružnicí k s poloměrem r a jeho vnitřní bod A, různý od středu S kruhu. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se stranou AB délky r tak, aby vrcholy B, C, D ležely na kružnici k.

16. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky $a = |AB|$, $b = |BC|$, $d = |AD|$ jeho stran a velikosti $\gamma = |\angle BCD|$, $\delta = |\angle CDA|$.

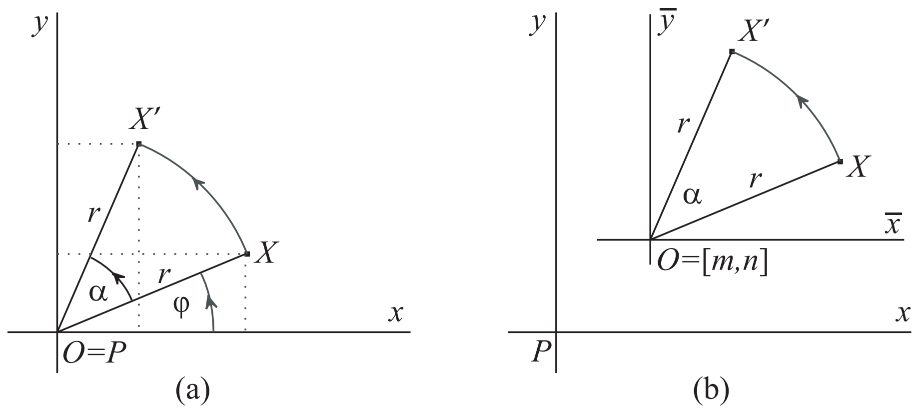
Kapitola 7

Otočení

Nechť je v prostoru $\mathbb{E}_2$ dán bod O a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ o velikosti α. Otočení (rotace) $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ je zobrazení, které zobrazí bod O na sebe a každému bodu $X \neq O$ přiřazuje bod X' na kružnici $k(O, |OX|)$ tak, aby platilo $\widehat{XOX'} = \alpha$. Bod O se nazývá střed otočení (resp. střed otáčení) a číslo α velikost úhlu otočení. Rotaci o úhel $\alpha = \widehat{AVB}$ lze značit i symbolem $\mathcal{R}_{O,\widehat{AVB}}$. Je-li $\alpha > 0$, otáčíme v kladném smyslu, tedy proti směru pohybu hodinových ručiček. Je-li $\alpha < 0$, otáčíme ve smyslu záporném (po směru pohybu hodinových ručiček). Otočení o nulový úhel je identita, otočení o π je středová souměrnost.

Řešené úlohy

Úloha 7.1 *Odvoďte analytické vyjádření rotace v E_2.*



Obr. 7.1: Analytické vyjádření rotace

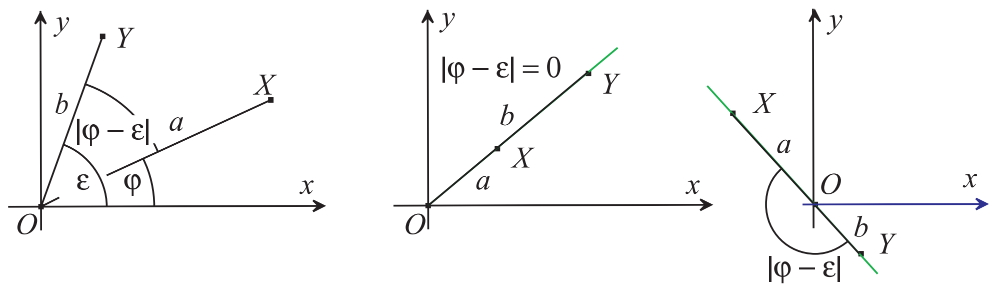
Řešení. Analytické vyjádření rotace má jednoduchý tvar, když zvolíme kartézkou soustavu souřadnic s počátkem ve středu O otáčení. Při označení podle obr.7.1(a) jsou souřadnice bodu $X = [x, y] = [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$. Jak plyne z obrázku, určují souřadnice jeho obrazu $X' = [x', y']$ vztahy

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\varphi+\alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' &= r\sin(\varphi+\alpha) = r\cos\varphi\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Tyto vztahy můžeme též vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned} \tag{7.2}$$

neboť $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$.



Obr. 7.2: Možné polohy bodů X, Y

Není-li střed otáčení v počátku, můžeme položit $O = [m, n]$ a v souladu s obr. 7.1(b) zvolit novou kartézskou soustavu souřadnic $\langle O, \overline{x}, \overline{y}\rangle$ posunutou vzhledem k původní soustavě o vektor $\overrightarrow{PO}$. V nové soustavě platí

$$\overline{x}' = \overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\sin\alpha, \quad \overline{y}' = \overline{x}\sin\alpha + \overline{y}\cos\alpha$$

a odtud po transformaci

$$\overline{x} = x - m, \quad \overline{y} = y - n, \quad \overline{x'} = x' - m, \quad \overline{y'} = y' - n$$

obdržíme

$$\begin{aligned} x' &= m + (x-m)\cos\alpha - (y-n)\sin\alpha \\ y' &= n + (x-m)\sin\alpha + (y-n)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Úloha 7.2 *Dokažte, že otočení je shodné zobrazení.*

První řešení (analytické). Nechť $X = [a\cos\varphi, a\sin\varphi]$, $Y = [b\cos\varepsilon, b\sin\varepsilon]$ Potřebujeme dokázat, že $|X'Y'| = |XY|$. Bez újmy na obecnosti zvolíme střed otáčení v počátku soustavy souřadnic. Pomocí vztahů (7.1) dostáváme:

$$|X'Y'|^2 = \Big(a\cos(\varphi+\alpha) - b\cos(\varepsilon+\alpha)\Big)^2 + \Big(a\sin(\varphi+\alpha) - b\sin(\varepsilon+\alpha)\Big)^2.$$

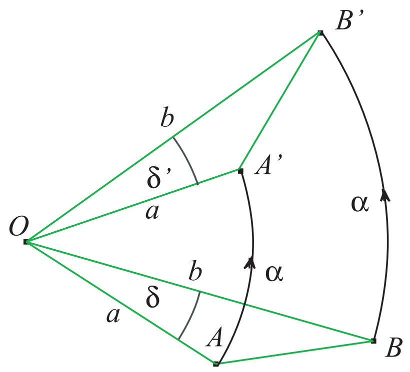
Odtud

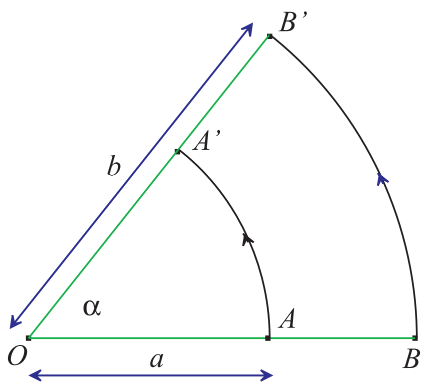
$$|X'Y'|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\Big(\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varepsilon+\alpha) + \sin(\varphi+\alpha)\sin(\varepsilon+\alpha)\Big)$$

Výraz ve velkých závorkách je roven $\cos\Big((\varphi+\alpha) - (\varepsilon+\alpha)\Big)$, proto

$$|X'Y'|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi-\varepsilon) = |XY|^2,$$

Poslední rovnost plyne z kosinové věty, která platí i tehdy, když jsou body X, Y a O kolineární (viz obr.7.2). Tvrzení je tedy dokázáno.





Obr. 7.3: Otočení úsečky AB

Druhé řešení (syntetické). Dokážeme, že pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' v rotaci $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ platí $|A'B'| = |AB|$. Když A, B a O neleží na téže přímce (obr.7.3a), platí: $|\angle AOA'| = \alpha + \delta' = \delta + \alpha$. Platí tedy $\delta' = \delta$ a trojúhelníky $A'OB'$ a AOB jsou shodné podle věty sus, neboť

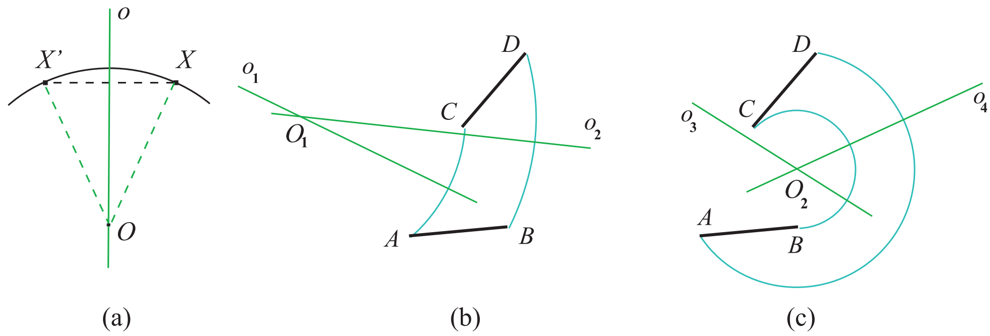
$$|\angle A'OB'| = |\angle AOB|, \quad |OA'| = OA|, \quad |OB'| = OB|.$$

Ze shodnosti plyne $|A'B'| = |AB|$.

Zdůvodnění poslední rovnosti v případě kolineárních bodů plyne z obr.7.3b. (Ověření pro situaci, kdy je O mezi A, B přenecháváme čtenáři.)

Poznámka. Důkazové úlohy jsme často a záměrně řešili analyticky i synteticky. Promyslete si přednosti a nevýhody každé z obou metod.

Úloha 7.3 *V rovině jsou dány dvě shodné a různoběžné úsečky AB, CD. Konstrukcí určete otočení, v němž se AB zobrazí na úsečku totožnou s CD.*



Obr. 7.4: Obrázek k úloze 5.3

Řešení. Využijeme poznatku, že střed O otočení je pro každý bod $X \neq O$ a jeho obraz X' hlavním vrcholem rovnoramenného trojúhelníku XOX' (obr.7.4a), leží tedy na ose úsečky XX'. Mohou nastat dva případy:
a) V otočení $\mathcal{R}_{O_1,\alpha}$ se A zobrazí na C a B na D. Pak je střed otáčení O_1 průsečíkem os o_1 a o_2 úseček AC a BD (obr.7.4b).
b) Druhé možné otočení $\mathcal{R}_{O_2,\beta}$ zobrazuje A na D a B na C. Jeho střed O_2 je průsečíkem os o_3 a o_4 úseček AD a BC (obr.7.4c).
Diskuse. Pokud žádné z krajních bodů úseček AB, CD nesplývají, má úloha vždy dvě řešení. Když jsou dva krajní body totožné, například $A = D$, existuje otočení jediné.

Úlohy

1. Jsou dány přímky a, b, bod S, který na nich neleží, a úhel α Sestrojte kružnici se středem S, aby protínala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y, a oblouk XY odpovídal středovému úhlu $\alpha \in (0, \pi$.

2. Jsou dány kružnice m, n se společným středem O a mezi nimi bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $D \in m$ a $B \in n$.

3. Do rovnoběžníku $KLMN$ vepište čtverec tak, aby na každé straně byl jeden vrchol čtverce.

4. Jsou dány přímky a, b a bod C, který na nich neleží. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC s hlavním vrcholem C, tak aby byly podobné danému rovnoramennému trojúhelníku KLM s hlavním vrcholem M a aby $A \in a$ a $B \in b$.

5. Dané kružnice m, n mají společné body A, D. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC s s hlavním vrcholem A tak, aby $B \in m$ a $C \in n$ a $|\angle\alpha| = 120°$.

6. Uvnitř daného čtverce $ABCD$ je pevně zvolen bod M Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky KLM, které mají vrcholy K, L na hranici čtverce.

7. Do daného čtverce $KLMN$ vepište čtverec $ABCD$, aby jeho strana měla danou délku d.

8. Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ jsou sestrojeny body K, L tak, že $|\angle KAL| = |\angle BAK|$. Dokažte, že $|BK| + |DL| = |AL|$.

9. Daným bodem M veďte k dané kružnici k sečnu tak, aby na kružnici vytnula tětivu dané délky d.

10. Sestrojte tětivu dané kružnice k, aby měla danou délku d a byla z daného bodu M vidět pod úhlem dané velikosti.

11. Jsou dány různoběžky a, b, které prochází po řadě danými body A, B. Nalezněte střed a úhel otočení, které zobrazí A na B a a na b.

12. Je dána kružnice k a body A, B, které na ní neleží. Sestrojte rovnoběžky a, b procházející body A, B tak, aby protínaly kružnici k v bodech X, Y omezujících čtvrtinu kružnice.

13. Je dána kružnice k a bod A, který na ní neleží. Najděte množinu vrcholů C všech rovnostranných trojúhelníků ABC takových, že $B \in k$.

14. Je dána kružnice k a bod A, který na ní neleží. Najděte množinu vrcholů D všech čtverců $ABCD$ takových, že $B \in k$.

15. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Najděte množinu vrcholů C všech rovnoramenných trojúhelníků ABC s hlavním vrcholem A takových, že $B \in p$ a $\alpha = \pi/4$.

Kapitola 8

Některé vlastnosti kružnice

Úlohy

1. Dokažte: Obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou navzájem shodné. Velikost každého z nich je polovinou velikosti středového úhlu příslušného témuž oblouku.

2. Dokažte: Konvexní čtyřúhelník je tětivový, právě když součet velikostí jeho protilehlých úhlů je π.

3. Úsekový úhel je úhel tětivy a tečny s dotykovým bodem v krajním bodě této tětivy. Dokažte že úsekový úhel je shodný s obvodovým úhlem příslušným uvažované tětivě.

4. Nechť D, E jsou paty výšek z vrcholů A, B ostroúhlého trojúhelníku ABC. Pak jsou trojúhelníky DEC a ABC podobné. Dokažte.

5. Označme E průsečík úhlopříček tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ a q kolmici z E na AB. Je-li $AC \perp BD$ pak průsečík přímek q a CD je středem úsečky CD. Dokažte.

6. Nechť výšky z vrcholů A, B, C protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech A_1, B_1, C_1. Dokažte:
   a) bod je souměrně sdružený s průsečíkem výšek (tzv. ortocentrem) trojúhelníka podle přímky BC,
   b) $|A_1B| = |C_1B|$ a cykl.

7. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V ortocentrum. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky CV.(54 MO B-II-3)

8. Jestliže přímka, jež prochází bodem M, protne kružnici $k(S,\ r)$ v bodech A, B, pak platí: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = m(M,k)$. Číslo $m(M,k)$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k a je pro dané k a M konstantou určenou vztahem $m(M,k) = |MS|^2 - r^2$.

9. Množinou všech bodů, které mají v dané rovině stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím, je přímka kolmá ke spojnici jejich středů (chordála kružnic). Dokažte.

10. Mějme po dvou nesoustředné kružnice k, m, n. Pak chordály dvojic kružnic $(k,\ m)$; $(k,\ n)$ a $(m,\ n)$ jsou navzájem rovnoběžné, nebo mají společný bod zvaný potenční střed daných kružnic.

11. Sestrojte a) chordálu dvou daných kružnic, b) potenční střed tří daných kružnic

12. Na přímce p sestrojte bod X, který má k dané kružnici k danou mocnost m.

13. S využitím mocnosti bodu ke kružnici dokažte Eukleidovy věty (o výšce a o odvěsně).

14. Sestrojte kružnici, která prochází danými body A, B a dotýká dané přímky p.

15. Sestrojte kružnici, která prochází danými body A, B a dotýká dané kružnice m.

16. Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek a, b a prochází daným bodem M. (Užitím souměrnosti převeďte na duální úlohu 14.)

Kapitola 9

Podobnost a stejnolehlost

Úlohy

1. Dokažte: Ke každým dvěma kružnicím m, n různých poloměrů existují právě dvě stejnolehlosti, které převádí kružnici m na kružnici n. Sestrojte středy stejnolehlostí takových kružnic, jestliže:
   a) m leží vně n,
   b) m leží uvnitř n,
   c) m, n mají vnitřní dotyk,
   d) m, n mají vnější dotyk,
   e) m, n jsou soustředné.

2. Sestrojte společné tečny dvou kružnic.

3. Jsou dány body A,B. Bodem B vedeme přímku p. Vyšetřete množinu bodů, které jsou souměrné s bodem A podle všech takových přímek p.

4. Je dána kružnice m, na ní body A, B, C. Sestrojte tětivu AX tak, aby ji tětiva BC půlila.

5. Je dána kružnice m a bod A uvnitř kruhu kružnicí ohraničeném. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice m, které procházejí bodem A a pro něž platí $|AX| : |AY| = 2 : 3$.

6. Jsou dány přímky a, b a bod M, který na nich neleží. Sestrojte:
   a) všechny body přímky a, které mají od b stejnou vzdálenost jako od M,
   b) všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se obou přímek,
   c) přímku $c = \leftrightarrow AB$, tak, aby $M \in c$, $A \in a$, $B \in b$, a $|MA| : |MB| = 2 : 3$.

7. Jsou dány kružnice $m(O, r_1)$, $n(O, r_2, r_2 < r_1$. Sestrojte přímku p, která vytne tětivu AB na m a tětivu CD na n tak že body A, B, C, D leží na p v abecedním pořadí a $|AB| = |BC| = |CD|$.

8. Je dána kružnice m, přímka p a na ní bod T. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice m a přímky p v jejím bodě T.

9. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice m a kružnice n v jejím bodě T.

10. Jsou dány přímky a, b a kružnice m. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají obou přímek i kružnice m.

11. Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby body K, L ležely na straně AB.

12. Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište obdélník $KLMN$ tak, aby $|KL| = 2|MN|$ a aby body K, L ležely na straně AB.

13. Do dané kruhové výseče vepište: a) kružnici, b) čtverec se dvěma vrcholy na rameni výseče, c) čtverec se dvěma vrcholy na oblouku výseče.

14. Do daného trojúhelníku ABC vepište trojúhelník tak, aby jeho strany byly rovnoběžné se třemi danými přímkami, navzájem různoběžnými.

15. Sestrojte přímku, která prochází bodem M a nepřístupným průsečíkem přímek a, b.

16. Daným bodem M veďte sečnu ke kružnici k s tětivou AB tak, aby $|AB| = |MB|$.

17. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník platí:
    a) Výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě,
    b) průsečík výšek, střed kružnice opsané a těžiště leží na jedné přímce (Eulerově).

18. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a) α, β, a $m = r + \rho$
    b)$a : b : c$ a $m = 2t_a - v_a$.

Kapitola 10

Skládání zobrazení

Úlohy

1. Dokažte, že složením středové souměrnosti a posunutí vznikne středová souměrnost.[1]

2. Určete zobrazení, které vznikne složením
   a) dvou středových souměrností,
   b) tří středových souměrností.

3. Ukažte, že složením lichého (resp. sudého) počtu středových souměrností vznikne středová souměrnost (resp. posunutí nebo identita).

4. S využitím poznatků o skládání dvou osových souměrností dokažte větu o obvodových úhlech.

5. Určete zobrazení, které vznikne složením rotace a translace.

6. Dokažte, že složením dvou rotací vznikne buď rotace nebo translace.

7. Dokažte: Zobrazení složené z n osových souměrností je při sudém n identitou, rotací nebo translací, a při n lichém je to osová nebo posunutá souměrnost.

8. Konstrukcí dokažte, že k libovolným shodným úsečkám AB, CD existuje jediná přímá a jediná nepřímá shodnost, která převádí body A, B po řadě na body C, D.

9. Dokažte, že libovolné shodné zobrazení v rovině lze rozložit na dvě souměrnosti.

[1]Pokud není v úlohách stanoveno jinak, předpokládáme zadání v prostoru $\mathbb{E}_2$.

10. V prostoru $\mathbb{E}_n$ je dána stejnolehlost $\mathcal{H}_{S,h}$ (různá od identity) a posunutí $\mathcal{T}_{\vec{u}}$. Dokažte, že zobrazení $\mathcal{T}_{\vec{u}}\mathcal{H}_{S,h}$ je stejnolehlost s koeficientem h a středem
$$O = S + \frac{1}{1-h}\vec{u}.$$

11. V prostoru $\mathbb{E}_n$ je dána stejnolehlost $\mathcal{H}_{S,h}$ (různá od identity) a posunutí $\mathcal{T}_{\vec{u}}$. Dokažte, že zobrazení $\mathcal{H}_{S,h}\mathcal{T}_{\vec{u}}$ je stejnolehlost s koeficientem h a středem
$$O = S + \frac{h}{1-h}\vec{u}.$$

12. Sestrojte dva přímo podobné trojúhelníky, které nejsou stejnolehlé ani shodné, a konstrukcí určete rotaci $\mathcal{R}$ a stejnolehlost $\mathcal{H}$ tak, aby transformace $\mathcal{HR}$ zobrazila jeden trojúhelník na druhý.

13. Sestrojte dva nepřímo podobné trojúhelníky, které nejsou shodné, a konstrukcí určete osovou souměrnost $\mathcal{S}$ a stejnolehlost $\mathcal{H}$ tak, aby transformace $\mathcal{HS}$ zobrazila jeden trojúhelník na druhý.

Kapitola 11

Výsledky a návody

1. Geometrie hmotných bodů

1. $T = [9, -3]$. **2.** $T = [-2, 7]$. **3.** $\sum m_i = 4 - m$ a) $m = 3$, $X = 4B - 3C$, b) $m = 4$, $\vec{u} = -A + 5B - 4C$, c) $m = -3$, $D = \frac{6}{7}A - \frac{2}{7}B + \frac{3}{7}C$, d) $m = 0$, $E = 3A + B$, e) vyhovuje každé $m \neq 4$, $T = \frac{3-m}{4-m}A + \frac{1+m}{4-m}B - \frac{m}{4-m}C$. **4.** a) $X = \frac{2}{5}A + \frac{3}{5}B$ nebo $X = -2A + 3B$, b) $X = -A + 2B$ nebo $X = 3A - 2B$, c) $X = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ nebo $X = -\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B$. **5.** Body množiny mají symbolické vyjádření $X = tA + (1-t)B$, které je vhodné přepsat na tvar $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{BA}$. a) Přímka AB, b) úsečka AB, c) polopřímka opačná k polopřímce AB, d) polopřímka opačná k polopřímce BA. **6.** Posunutí o vektor $\vec{u} = (3, -5)$. **7.** $\mathcal{T} : x' = x + 7, y' = y - 3, z' = z + 1$, $\mathcal{T}^{-1} : x' = x - 7, y' = y + 3, z' = z - 1$. **8.** $\mathcal{H}_{S,h} : X' = hX + (1-h)S$. **9.** $\mathcal{Z} : X' = hX + (1-h)S$, kde $h = 3$ a $S = [4, 0, -6]$, $\mathcal{Z}^{-1} : x' = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}, y' = \frac{1}{3}y, z' = \frac{1}{3}z - 4$. **10.** $S = [1, 2]$ $x' = -2x + 3$, $y' = -2y + 6$. **11.** a) Rovnice $X' = 2X + 3A - 2B$ neurčuje ani bod (nezávislý na volbě počátku) ani vektor, protože součty koeficientů na pravé a levé straně jsou různé. b) $X' = -4X + 5S$, kde $S = \frac{7}{5}A - \frac{2}{5}B$. Číselně: $x' = -4x - 55$, $y' = -4y + 15$. **12.** a) $r = -1$, $s = 5$, $X' = X + \vec{u}$, kde $\vec{u} = 2(A - B)$, b) $r = 1$, $s = -1$, $X' = 3X - 2S$, kde $S = 2A - B$, c) $r = -1/5$, $s = 13/5$, $h = 9/5$, $X' = \frac{9}{5}X - \frac{4}{5}S$, kde $S = \frac{1}{2}(A + B)$, d) $r = -1/4$, $s = 11/4$, $h = 7/4$, $X' = \frac{7}{4}X - \frac{3}{4}S$, kde $S = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ nebo $r =_1 /2$, $s = 7/2$, $h = 3/2$, $X' = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}S$, kde $S = -A + 2B$ **13.** $h = -3$, $S = [0, 2]$, $x' = -3x$, $y' = -3y + 8$. **14.** $S = [8, 2]$, $h = \frac{1}{3}$, $x' = \frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$, $y' = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$. **15.** Je to posunutí o vektor $\vec{u}$ pro $h = 1$. Pro $h \neq 1$ a $h \neq 0$ je zobrazení stejnolehlost s koeficientem h a středem $S = B + \frac{1}{1-h}\vec{u}$. **16.** Napište symbolickou rovnici pro obrazy dvou bodů a oba vztahy odečtěte. **17.** Napište symbolickou rovnici pro obrazy dvou bodů a oba vztahy odečtěte. **18.** $S = [3, 2]$, $x' = -x + 6$, $y' = -y + 4$. **19.** a) Střed souměrnosti je $S = [-2, 6]$ a leží ve středu dané úsečky. $\mathcal{S}_S : x' = -x - 4$, $y' = -y + 12$.

Poznamenejme, že střed úsečky s vyjádřením $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ můžeme zjistit buď pomocí vztahu $S = \frac{A+B}{2}$, kde $A = X(t_1)$ a $B = X(t_2$, nebo jednodušeji: $S = X(\frac{t_1+t_2}{2})$. b) Střed $S = [s_1, s_2]$ souměrnosti je libovolný bod dané přímky. Při volbě $s_1 = 3t$ vyjde po dosazení do rovnice přímky $s_2 = 2(1-t), \mathcal{S}_S : x' = -x+6t, y' = -y+4(1-t)$. **20.** $S = [-1, 2]$, $x' = -x-2$, $y' = -y+4$. **21.** $S = [O, 4]$, $x' = -x$, $y' = -y+8$. **22.** a) Neexistuje. Přímky nejsou rovnoběžné, neboť $\vec{n}_p = (1, -2)$, $\vec{n}_q = (5, -2)$, b) Využijte toho, že na ose pásu rovnoběžek p, q leží střed každé úsečky A, B, kde $A \in p$ a $p : x-2y+3 = 0$,$B \in q$. $o : 3x+2y-9 = 0$. **23.** a) Neexistuje. Přímky nejsou rovnoběžné, neboť $\vec{s}_p = (2, 1)$, $\vec{s}_q = (1, -2)$, a tak q nemůže být obrazem přímky p. b) $S = [-3, 0]$, $x' = -x - 6$, $y' = -y$. c) $p = q$, $S = [-3, 0]$, $x' = -x - 6$, $y' = -y$. d) Středem souměrnosti může být každý bod osy x. Je-li $S = [s, 0$ $(s \in \mathbb{R})$, pak $\mathcal{S}_S : x' = -x + 2s$, $y' = -y$ e) $x' = -x$, $y' = -y$. **24.** Zobrazení je homotetie jen když je obraz úsečky AB (což je úsečka CD) rovnoběžný se svým vzorem. a) Úsečky AB a CD jsou rovnoběžné. Vyhovují dvě stejnolehlosti: $x' = 2x + 2, y' = 2y - 7$ a $x' = -2x + 2, y' = -2y + 9$. Jedna z nich zobrazuje A na C a B na D, druhá zobrazuje A na D a B na C. Můžete je nalézt dosazením souřadnic odpovídajících bodů do obecného zápisu stejnolehlosti. Dostanete čtyři rovnice. K určení neznámých h, s_1 a s_2 stačí libovolné tři z nich, výsledek však musí vyhovovat i čtvrté rovnici. Jiná možnost řešení: Ověřte, že $D - C = 2(B - A)$, odtud $|h| = 2$ a pro nalezení středu stejnolehlosti stačí využít jednu dvojici odpovídajících si bodů. Z rovnice $D - C = 2(B - A)$ vidíme, že při kladném h se zobrazí A na C a S_1: $\leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD$, při záporném h se zobrazí A na D a S_2: $\leftrightarrow AD \cap \leftrightarrow BC$. b) $D - C = (-2, 8)$ a $B - A = (2, -1)$. Neexistuje homotetie, která by zobrazila úsečku AB na úsečku CD. c)$D - C = -(B - A)$. Posunutí $x' = x-1, y' = y+5$ a středová souměrnost $x' = 1-x, y' = 2-y$. d)$D-C = B-A$. Posunutí $x' = x-2, y' = y-5$ a středová souměrnost $x' = 3-x, y' = 1-y$. **25.** a) $S_1 = [0, -3]$, $r_1 = 2$, $S_2 = [2, -1]$, $r_2 = 4$,$S_1' = S_2$, $|h| = r_2/r_1$. Vyhovují dvě stejnolehlosti: $x' = 2x + 2, y' = 2y + 5$ a $x' = -2x + 2, y' = -2y + 5$. b) Kružnice jsou soustředné, jejich společný střed $S = [1, -2]$ je středem stejnolehlosti, $|h| = 3$. Vyhovují dvě stejnolehlosti: $x' = 3x - 2, y' = 3y + 4$ a $x' = -3x + 4, y' = -3y - 8$. c) $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [-3, 2]$, $r_1 = r_2 = 3$, vyhovuje posunutí $x' = x - 3, y' = y + 2$ a středová souměrnost (to znamená stejnolehlost pro $h = -1$) se středem $S = (S_1 + S_2)/2$: $x' = -x - 3, y' = -y + 2$.

2. Afinní zobrazení

1. f^{-1} : $\overline{x} = 3x - 2y - 1$, $\overline{y} = -4x + 3y + 2$. $D' = [-1, -2]$, $\overline{D} = [-1, 2]$, $E' = [2, 2]$ a $\overline{E} = [2, -2]$, $F' = [1, 1]$, $\overline{F} = [-3, 5]$, $G' = [4, 5]$, $\overline{G} = [0, 1]$, $M' = [6, 8]$, $\overline{M} = [-2, 4]$, $N' = [7, 9]$, $\overline{N} = [3, -3]$, $Q' = [9, 12]$, $\overline{Q} = [1, 0]$.

2. $f^{-1}: \; x = -2x' + y' + 7,\; y = -5x' + 2y' + 17$. $p'\colon 5x - 2y - 17 = 0$ a $\overline{p}\colon 5x - 2y - 1 = 0$, $q'\colon 2x - y - 7 = 0$ a $\overline{q}\colon 2x - y + 3 = 0$, $r'\colon 3x - y - 10 = 0$ a $\overline{r}\colon 3x - y - 4 = 0$, $s'\colon x - 5 = 0$ a $\overline{s}\colon x - 5 = 0$, $m'\colon 13x - 5y - 40 = 0$ a $\overline{m}\colon 13x - 5y - 10 = 0$, $n'\colon 11x - 4y - 37 = 0$ a $\overline{n}\colon 11x - 4y - 9 = 0$. **3.** $\mathcal{H}: \; x' = -2x + 3,\; y' = -2y - 9$, $\mathcal{H}^{-1}: \; x = -\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2},\; y = -\frac{1}{2}y' - \frac{9}{2}$, $p': \; 5x + y - 4 = 0$, $\overline{p}: \; 10x + 2y - 5 = 0$, $p' = \overline{p} = p$ (vysvětlete proč). **4.** $\mathcal{H}: \; x' = 3x + 10,\; y' = 3y - 4$, $\mathcal{H}^{-1}: \; x = \frac{1}{3}x' - \frac{10}{3},\; y = \frac{1}{3}y' + \frac{4}{3}$, a) $m': (x-13)^2 + (y+16)^2 = 81$, $\overline{m}: (x+1)^2 + y^2 = 1$, b) $m': (x+5)^2 + (y-2)^2 = 729$, $\overline{m}: \; (x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$. **5.** $f^{-1}: \; x = 5x',\; y = y'/5$, $p': \; y = 25x$, $\overline{p}: \; 25y - x = 0$, $q': \; 50x - y + 30 = 0$, $\overline{q}: \; 2x - 25y + 30 = 0$, m' je elipsa, $S' = [2/5, 25]$, $a = 50$, $b = 2$ a hlavní osu má rovnoběžnou s osou y; $\overline{m}$ je elipsa, $\overline{S} = [10, 1]$, $a = 50$, $b = 2$ a hlavní osu má rovnoběžnou s osou x. **7.** a) $x' = x+y+z-1$, $y' = x+y+z-2$, b) $x' = x-y+1$, $y' = 2x+y+z+2$, $z' = y - z$. **8.** $x' = -4x + 2y + 8$ **9.** $x' = x + y + 1$, $y' = x - y$. **10.** Existuje (zdůvodněte větou o určenosti afinního zobrazení). Lineární soustavu zvolíme například tak, aby $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $D = [0, 1]$. Pak vyjde $x' = x - y$, $y' = x$, $S = [1/2, 1/2]$ a $S' = [0, 1/2]$. Z výpočtu plyne, že střed rovnoběžníka se zobrazí na střed úsečky AD. Dá se to zjistit i bez počítání: Podle zadání se úsečka AC zobrazí na úsečku AD. Afinní zobrazení zachovává dělicí poměr a navíc je střed rovnoběžníka středem úsečky AC, tak se zobrazí do středu úsečky AD. **11.** V obou případex existuje jediné. a) Při volbě $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 1]$ je $x' = -x - y + 1$, $y' = x$ a $T' = T = [1/3, 1/3]$. b) Při volbě $A = [0, 0]$, $B = [0, 1]$ a $C = [1, 0]$ je $x' = y$, $y' = x$ a $T' = T = [1/3, 1/3]$. **12.** Do bodu M se zobrazí celá přímka $p: \; x = t,\; y = 3 - t,\; z = -3 + 2t$.

Další příklady afinních zobrazení: promítání, souměrnosti

1. $x' = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}z + 4$, $y' = y$, $z' = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}z - 2$. **2.** $x' = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z + 1$, $y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + 2$, $z' = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z + 1$. **3.** $x' = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z + \frac{3}{2}$, $y' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1$, $z' = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + \frac{7}{2}$. **4.** $x' = -3x - 4y$, $y' = 3x + 4y$, $z' = -\frac{3}{2}x - 2y + 3$. **5.** $x' = 3x - 6y - 2$, $y' = x - 2y - 1$, $z' = -x + 2y + 6$. **6.** $x' = -2x + 3y - 6z - 9$, $y' = y$, $z' = x - y + 3z + 3$. **7.** $x' = \frac{8}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{1}{3}z - \frac{8}{9}$, $y' = \frac{1}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{1}{3}z + \frac{8}{9}$, $z' = \frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{3}z + \frac{16}{9}$. **8.** $x' = x + 5y$, $y' = 0$. **9.** $x' = x$, $y' = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$. **10.** $x' = 0$, $y' = y + 3x$, $z' = z + 4x$. **11.** $x' = x$, $y' = y$, $z' = \frac{5}{2}x + 2$. **12.** $x' = 3z - 7$, $y' = -2z + 6$, $z' = z$. **13.** $x' = y$, $y' = x$. **14.** $x' = -y$, $y' = -x$, **15.** $o: \; x - y - 2 = 0$, $x' = y + 2$, $y' = x - 2$. **16.** $x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{26}{3}$, $y' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{13}{3}$, $z' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{13}{3}$. **17.** $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1$, $y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3$. **18.** $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 2$, $y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 4$, $z' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2$.

3. Středová souměrnost

1. Nechť X leží na ramenu BA a Y na BC. Zobrazte přímku AB v symetrii se středem D. Co bude obrazem bodu X? **2.** Sestrojte například $k' = \mathcal{S}_M(k)$. **3.** Kam se zobrazí body E, F v symetrii $\mathcal{S}_O$? **4.** Využijte středovou souměrnost podle zvoleného průsečíku. **5.** Využijte symetrii podle S a zobrazte v ní například kružnici m. Kam se zobrazí body A, B? **6.** Na jakých čarách leží $V' = \mathcal{S}_A(V)$? Sestrojte V' a dokažte, že jsou přímky AV' a AV totožné. **7.** Co je množinou všech středů souměrnosti dvou rovnoběžek? Sestrojte takové množiny pro přímky NM, XY a pak i pro KL a TU. **8.** Využijte symetrii podle středu úsečky AC. **9.** Využijte symetrii podle středu úsečky AC. **10.** Využijte $\mathcal{S}_O$. Jak najdete například bod $C = \mathcal{S}_O(A)$? **11.** Využijte symetrii podle středu strany AB. Zobrazí-li se A na A', pak je $ABA'C$ rovnoběžník a přímky AC a BA' mají vzdálenost v_b. **12.** Využijte symetrii podle středu strany AC. **13.** Využijte symetrii podle středu strany AB. **14.** Využijte symetrii podle středu strany BC. **15.** Označme $C' = \mathcal{S}_O(C)$, kde O je střed strany AB. Přímky $p = AC$ a $q = BC'$ mají vzdálenost v_b. Sestrojte nejprve takové dvě přímky, pak zvolte $C \in p$ a s využitím zmíněné souměrnosti najděte C' a O. Označíme-li th kružnici s průměrem CC', je B průsečík přímek q a CP, kde $P \in th \cap k(C', v_a$ (zdůvodněte!) a $A = \mathcal{S}_O(B)$. **16.** Lze řešit obdobně jako úlohu 15. **17.** Využijte souměrnost podle středu strany AC nebo podle středu strany AB. **18.** Využijte toho, že v symetrii podle středu kružnice je daná kružnice samodružná a sečny, na nichž leží tětivy AC a BD se zobrazují jedna na druhou (zdůvodněte, proč). Kam se zobrazí prúsečík C kružnice a jedné z těchto sečen? **19.** Postupujte dle návodu. **20.** Využijte vlastnosti středních příček. (Přímka AB je rovnoběžka s KL v bodě M atd.) **21.** Využijte vlastnosti těžnic a souměrnost podle T. **22.** Využijte symetrii podle středu kružnice vepsané. **23.** Využijte toho, že průsečík úhlopříček, podle nějž je každý rovnoběžník souměrný, je současně průsečíkem os rovinných pásů, na nichž leží protilehlé strany rovnoběžníku. **24.** Nechť P je uvažovaný průsečík daných kružnic $m = (M, r_1)$, $n = (N, r_2)$ a R, Q paty kolmic z bodů N, M (v daném pořadí) na hledanou sečnu. Označme ještě $R' = \mathcal{S}_P(R)$ a $N' = \mathcal{S}_P(N)$. Přímky $N'R'$ a MQ jsou rovnoběžné a mají vzdálenost $a/2$ (zdůvodněte!). Proto je přímka MQ tečnou z bodu M ke kružnici $k = (N', d/2)$ a hledanou sečnu sestrojíme jako kolmici z bodu P na tuto tečnu. **25.** Hráč A položí v prvním tahu minci přesně do středu S stolu. Další mince klade tak, aby byly souměrné podle S s mincemi položenými hráčem B.

4. Osová souměrnost

1. Nechť o je kolmice na b v bodě C a V průsečík přímek a, b. Sestrojte $\mathcal{S}_o(CV)$. **2.** Využijte toho, že množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímek a, b je sjednocení os souměrností, které zobrazují jednu z přímek na druhou (tzv. osy různoběžek). **3.** Rozlište situace, kda a, b jsou

a) rovnoběžné, b) různoběžné. Pro situaci b) dokažte, že hledaná přímka je kolmice na některou z os přímek a, b. **4.** Využijte obrazy bodu A v symetriích podle daných os úhlů. **5.** Sestrojte $m' = \mathcal{S}_p(m)$. Kam se zobrazí bod B? **6.** V rozboru uvažujte symetrii podle přímky BX. Kde bude ležet obraz bodu A a jaká bude jeho vzdálenost od B? **7.** Nechť o je osa úhlu BAD a $B' = \mathcal{S}_o(B)$. Dokážete sestrojit trojúhelník $B'CD$? **8.** a) Zvolte na polopřímce AC bod E tak, aby $|AE| = a + u$ a určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABE. b) Zvolte na polopřímce AC bod E tak, aby $|AE| = a - u$ a určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABE. **9.** a) Zvolte na polopřímce AB bod E tak, aby $|AE| = a + b$ a sestrojte nejprve trojúhelník ABE. b) V rozboru zvolte na polopřímce AB bod E tak, aby $|AE| = a + u$ a sestrojte nejprve trojúhelník AED. c) V rozboru zvolte na polopřímce AB bod E tak, aby $|AE| = u$ a sestrojte nejprve trojúhelník CBE. d) Zvolte na polopřímce AB bod E tak, aby $|AE| = a - b$ a sestrojte nejprve trojúhelník ABE. **10.** Sestrojte nejprve trojúhelník ABD, kde D je bod polopřímky AC a $|AD| = a + b$. **11.** Na přímce AC zvolte úsečku DE délky $a + b + c$ tak, aby bod A ležel mezi D, C a $|AD| = c$. Dokažte, že $|\angle EDB| = \alpha/2$ a pak sestrojte trojúhelník EDB. **12.** Sestrojte trojúhelník ABD, kde D je bod polopřímky AC a $|AD| = a+b$. (Vypočítejte nejprve velikost úhlu ADB. **13.** V rozboru využijte ten bod D úsečky AC, pro nějž je $|CD| = a$. **14.** V rozboru využijte ten bod D úsečky CB, pro nějž je $|CD| = b$ a vypočítejte nejprve velikost úhlu ADB. **15.** V rozboru využijte ten bod D polopřímky CB, pro nějž je $|CD| = b$ sestrojte nejprve trojúhelník BDA. **16.** Na přímce AC zvolte úsečku DE délky $a+b+c$ tak, aby bod A ležel mezi D, C a $|AD| = c$. Určete velikosti úhlů BDE, BED a pak sestrojte trojúhelník EDB.**17.** V rozboru zvolte uvnitř polopřímky BA bod D tak, aby trojúhelník DBA byl rovnoramenný se základnou DB, vypočítejte velikost úhlu ACD a pak sestrojte trojúhelník DAC. **18.** V rozboru zvolte na polopřímce AC bod D tak, aby $|AD| = a+b$, vypočítejte velikost úhlu ABD a pak sestrojte trojúhelník ABD. **19.** Dokažte, že pro $A' = \mathcal{S}_p(A)$ je $|AX| + |XB| = |A'X| + |XB|$, a pak to využijte. **20.** Využijte předchozí úlohu a body $C' = \mathcal{S}_{VX}(C)$ a $C'' = \mathcal{S}_{VY}(C)$. **21.** a) Využijte úlohu 19. b) Má-li být odchylka přímek BX a p dvakrát větší než odchylka přímek AX a p, lze bod X najít jako průsečík přímky p s tečnou ke kružnici $k = (A', |A'C|$, kde $A' = \mathcal{S}_p(A)$ a C je střed úsečky AA'. Dokažte. **22.** Využijte úlohu 19 (konstrukci pro každou zvolenou situaci zdůvodněte). **23.** a)3 obrazy, b) 5 obrazů. Obraz v zrcadle vzniká jako obraz symetrický s předmětem podle roviny zrcadla. Při řešení úlohy znázorníte roviny zrcadel přímkami a užijete osové souměrnosti. O výsledku se přesvědčte pomocí dvou zrcadel. **24.** Využijte $\mathcal{S}_o$. **25.** Nechť N je střed kružnice n, T je bod dotyku kružnice k s hledanou kružnicí $u(U, x$ a V ten bod polopřímky UT, pro nějž platí $|VU| = x + |NS|$. Dokažte, že trojúhelník NVU je rovnoramenný a využijte souměrnost podle osy úsečky VL. **26.** Označte P, Q paty kolmic z bodu X na ramena BC, AC. K důkazu využijte obraz trojúhelníka AXQ v souměrnosti podle přímky AB a vlastnosti úhlů střídavých.

5. Afinní transformace, samodružné objekty a základní afinity

1. Osová souměrnost. **2.** Rotace, pokud $\alpha \neq k\pi$. **3.** Rovnoběžné promítání. **4.** Z podmínky $X' - Y' = \lambda(X - Y)$ $(\lambda \neq 0)$ pro libovolné dva body a jejich obrazy plyne $X' + \lambda X = Y' + \lambda Y = c$, kde c je konstanta. Je-li $\lambda = 1$, musí být c vektor (zdůvodněte!) a pak jde o posunutí a pro $\lambda \neq 1$, je c hmotný bod $(1 - \lambda, S)$ - stejnolehlost $\mathcal{H}_{S,\lambda}$. **5.** a) $M = [-2, -1]$, nemá samodružné směry, b) $M = [-4, -2]$, $\lambda = 3$, samodružný směr dán vektorem $\vec{a} = (1, 0)$, c) $M = [2, 1]$, $\lambda = -3$, všechny směry samodružné (stejnolehlost), d) nemá samodružné body, všechny směry samodružné (posunutí), e) nemá samodružné body, pro $\lambda = 1$ je samodružný směr dán vektorem $\vec{u} = (0, 1)$ a $\lambda = 2$ je samodružný směr dán vektorem $\vec{v} = (1, 0)$. **6.** a) $M = [-1, 6, -6]$, $\lambda = 2$, samodružný směr dán vektorem $\vec{a} = (0, 0, 1)$, b) $p: \ x = t, \ y = 3t, \ z = t - 1$, $\lambda = 1$, samodružný směr dán vektorem $\vec{a} = (1, 3, 1)$, c) nemá samodružné body, dva samodružné směry: $\vec{u} = (1, -2, 0)$ pro $\lambda = 1$ a $\vec{v} = (0, 1, 0)$ pro $\lambda = 2$, d) $p: \ x = 2, \ y = -1 - t, \ z = t$, $\lambda = 1$, tři samodružné směry: $\vec{a} = (0, -1, 1)$ pro $\lambda = 1$, $\vec{u} = (3, 2, 1)$ pro $\lambda = 4$ a $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ pro $\lambda = -1$, e) $\sigma: \ x + y = 0$, samodružný dvojsměr určený vektory $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ pro $\lambda = 1$ a směr určený $\vec{a} = (2, 3, -2)$ pro $\lambda = -4$, f) $\sigma: \ x - y + 3z - 1 = 0$, dvojsměr určený vektory $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$ pro $\lambda = 1$ a směr určený $\vec{a} = (2, 1, -1)$ pro $\lambda = -1$, g) $M = [7, -16, -6]$, samodružný směr dán vektorem $\vec{a} = (0, 1, 1)$ pro $\lambda = 0$ (zobrazuje se na nulový vektor - zobrazení není afinita, neboť $\delta = 0$). **7.** a) $\delta = 1$ (přímá ekviafinita), je základní afinitou, protože má přímku samodružných bodů $(o: \ 2x - 2y - 1 = 0)$ a není elace, neboť pro směr afinity daný vektorem $\vec{s} = (1, 2)$ platí $\vec{s} \cdot \vec{n}_o \neq 0$, b) $\delta \neq 0$, $\sigma: \ x + y - z - 1 = 0$, $\vec{s} = (1, 3, 2)$ pro $\lambda = 3$, $\vec{s} \cdot \vec{n}_\sigma \neq 0$, není elace, c) není afinita $(\delta = 0)$, d) není afinita $(\delta = 0)$, e) $\delta = -1$, není zákl. afinita, má přímku sam. bodů $(p: \ x = -2, \ y = -2, \ z = t)$. **8.** a) Dané zobrazení má anal. vyjádření $f: \ x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}, \ y' = y + 1$, nemá sam. body platí např. $f = f_3 f_2 f_1$, kde $f_1: \ x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}, \ y' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$, $f_2: \ x' = x + y, \ y' = 2y$, $f_3: \ x' = \frac{1}{2}y, \ y' = -x + \frac{3}{2}y$, b) $f: \ x' = -x + 4, \ y' = -y + 2$, má jediný sam. bod $B = [2, 1]$, $f = f_2 f_1$, kde $f_1: \ x' = -3x + 4y + 4, \ y' = -2x + 3y + 2$, $f_2: \ x' = 3x - 4y, \ y' = 2x - 3y$, c) $f: \ x' = 2x + y + 1, \ y' = -x + 3y + 2$, má jediný sam. bod $B = [0, -1]$, $f = f_2 f_1$, kde $f_1: \ x' = 3x, \ y' = x + y$, $f_2: \ x' = \frac{1}{3}x + y + 1, \ y' = -\frac{4}{3}x + 3y + 2$, d) $f: \ x' = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \ y' = x + 1$, má jediný sam. bod $M_0 = M_0'$, $f = f_2 f_1$, kde $f_1: \ x' = 2x - y + 1, \ y' = x + 1$, $f_2: \ x' = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{5}{2}, \ y' = y$.

9. Lze zvolit tři nezávislé body a z rovnic afinity určit jejich obrazy a pak postupovat jako v předchozích úlohách. Pro $M_0 = [0,\ 0]$, $M_1 = [1,\ 0]$, $M_2 = [0,\ 1]$, máme $M_0' = [1,\ -2]$, $M_1' = [3,\ 1]$, $M_2' = [0,\ -2]$ a $f = f_3 f_2 f_1$, kde $f_1 :\ x' = -y + 1,\ y' = 2x + 3y - 2$, $f_2 :\ x' = 4x + y - 1,\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$, $f_3 :\ x' = x,\ y' = x + \frac{1}{3}y - \frac{7}{3}$.

6. Posunutí

1. a) Sestrojte libovolný bod $A_0 \in p$ a bod $B_0 \in q \cap k(A_0, d)$. Dále bod C_0 jako průsečík úsečky A_0B_0 s přímkou rovnoběžnou s p a jdoucí bodem C. Dále využijte posunutí o vektor $C - C_0$. Úloha má 2, 1 nebo 0 řešení. Zdůvodněte. b) Řeší se analogicky. **2.** Nechť O je střed úsečky S_1S_2. Využijte posunutí o vektor $S_1 - O$ nebo $S_2 - O$. Úloha má 0, 2 nebo 4 řešení. **3.** Danou přímku nebo kružnici zobrazte v $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ nebo v $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. **4.** Nechť $\vec{u}$ je vektor velikosti d a rovnoběžný s přímkou c. využijte $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ a $\mathcal{T}_{-\vec{u}}$. Jsou-li a, b různoběžky, má úloha 1 nebo 2 řešení. Jsou-li rovnoběžky, má 0 nebo nekonečně mnoho řešení. **5.** Je-li $b \parallel c$, jsou a, b, c a d navzájem rovnoběžné a řešením je každá přímka, jež obsahuje M a je s nimi různoběžná. Jsou-li b, c různoběžky, leží průsečíky daných přímek ve vrcholech rovnoběžníku. Bodem M veďte rovnoběžky s jeho úhlopříčkami. Postup zdůvodněte posunutím. **6.** Sestrojte například obraz trojúhelníka DAE v $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$. **7.** Označte po řadě A, B průsečíky (různé od T) přímky OS s kružnicemi m, n a využijte $\mathcal{T}_{\overrightarrow{SO}}(ABC)$. **8.** Vycházejte například z vlastností obrazu úsečky MN v posunutí $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MB}}$. **9.** a) Nechť $\vec{u}$ je vektor velikosti d a rovnoběžný s přímkou q. využijte $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ a $\mathcal{T}_{-\vec{u}}$. Úloha má 0 až 4 řešení. b) Nechť P, Q jsou paty kolmic z bodů S, O na přímku q. Využijte $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$. **10.** Bez újmy na obecnosti předpokládejme $r_1 < r_2$ a v rozboru označme P, Q paty kolmic z bodů S, O na přímku p. Nechť $X = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PS}}(A)$. Klíčem k řešení je vyjádření $|SX|$ pomocí d a sestrojení trojúhelníka SOX. **11.**a) Nechť K, L jsou po řadě průsečíky přímek m, n, které ohraničují řeku, s libovolnou kolmicí k nim a m leží mezi A a n. Posuňte polorovinu pA o vektor $\overrightarrow{KL}$. b) Řešte analogicky. **12.** Převeďte na Heronovu úlohu (tzn. úlohu 19 ze str. 32) pro přímku p a body $\mathcal{T}_{\vec{u}}(A)$, B, kde $\vec{u}$ je vektor velikosti d rovnoběžný s přímkou p a vhodně orientovaný. **13.** a) V rozboru určete nejprve délky stran trojúhelníka BCE, kde $E = \mathcal{T}_{\overrightarrow{DC}}(A)$. b) V rozboru určete nejprve délky stran trojúhelníka BCE, kde $E = \mathcal{T}_{\overrightarrow{DC}}(B)$. c) Je-li $E = \mathcal{T}_{\overrightarrow{DC}}(B)$, pak $|AE| = 2s$. Dokažte to, pak vycházejte z konstrukce trojúhelníku ACE. **14.** Využijte bod $E = \mathcal{T}_{\overrightarrow{DC}}(B)$: Úsečka AE má délku $2a$, její střed je B a bod C je průsečíkem kružnice $k = (B, b)$ s obloukem ℓ, který má tětivu AE a obvodový úhel velikosti ω. **15.** Sestrojte $B :\ k \cap m(A, r)$ a pak využijte $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(k)$, resp. $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(k)$. **16.** V rozboru využijte bod $E = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}(B)$ a vyjádřete $\varphi = |\angle ADE|$ pomocí γ a δ (rozlište situace $\gamma + \delta > \pi$, $\gamma + \delta < \pi$ a $\gamma + \delta = \pi$). Pak vycházejte z konstrukce trojúhelníku ADE.

7. Otočení

1. Využijte $\mathcal{R}_{S,\alpha}$ a $\mathcal{R}_{S,-\alpha}$. Je-li φ odchylka přímek a, b, pak úloha nemá řešení pro $\alpha = \varphi$ nebo $\alpha = \pi - \varphi$. Pro ostatní hodnoty α má vždy dvě řešení. **2.** Zobrazte jednu z kružnic v $\mathcal{R}_{A,\pm\pi/2}$. **3.** Dokažte, že čtverec i rovnoběžník mají tentýž střed (viz cv. 23 na str. 24) a pak využijte $\mathcal{R}_{A,\pi/2}$. **4.** Sestrojte $a' = \mathcal{R}_{C,\ \pm\varphi}(a)$, kde $\varphi = |\angle KML|$. **5.** Využijte $m' = \mathcal{R}_{C,\pm 2\pi/3}(m)$. **6.** Otočte čtverec v rotaci $\mathcal{R}_{M,\pm\pi/3}$. **7.** Nechť $a = |KL|$ a O je střed čtverce $KLMN$. Sestrojte kterýkoliv ze čtverců se středem O a stranou délky d. Pak zjistěte, o jaký úhel je zapotřebí jej otočit, aby byl vepsán danému čtverci. Otočení proveďte. Je-li $d\sqrt{2} < a$, nemá úloha řešení. Má 1 řešení, je-li $d\sqrt{2} = a$, nebo 2 řešení pro $d\sqrt{2} > a$. **8.** Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že lomená čára $ABCDA$ má kladnou orientaci. Označte $K' = \mathcal{R}_{A,\pi/2}$ a vyjádřete velikosti úhlů v trojúhelníku ALK' pomocí $\varphi = |\angle BAK|$. **9.** Zvolte v kružnici libovolně tětivu KL délky d a pak ji otočte kolem středu kružnice tak, aby obraz přímky KL procházel bodem M. **10.** Zvolte v kružnici libovolně tětivu KL délky d a sestrojte množinu $\mathbf{U}$ všech bodů X, pro něž má úhel KXL danou velikost. O jaký úhel je nutno kolem středu dané kružnice otočit úsečku KL s množinou $\mathbf{U}$, má-li obraz této této množiny procházet bodem M? **11.** Využijte řešení úlohy 8.2. **12.** Přímka a prochází bodem A a protíná danou kružnici $k(O, r)$ v bodě X. Přímka b prochází bodem B a protíná kružnici k v bodě Y. V jednom z otočení $\mathcal{R}_{O,\pm\pi/2}$ je obrazem přímky a kolmice na přímku b. Bod X se zobrazí na Y a bod A na A'. Úhel $A'YB$ je pravý. Využijte Thaletovu kružnici. **13.** Množinou je $\mathcal{R}_{A,\pi/3}(k) \cup \mathcal{R}_{A,-\pi/3}(k)$. **14.** Množinou je $\mathcal{R}_{A,\pi/2}(k) \cup \mathcal{R}_{A,-\pi/2}(k)$. **15.** Množinou je $\mathcal{R}_{A,\pi/4}(p) \cup \mathcal{R}_{A,-\pi/4}(p)$.

9. Podobnost a stejnolehlost

Symbol [P] znamená odkaz na učebnici Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia - Planimetrie*, Prometheus, Praha, 1993.

1. [P], str. 163-167. **2.** [P], str. 167-168. **3.** Co je množinou pat Q kolmic z bodu A na přímku p? Pro body X množiny, kterou hledáme platí $X = \mathcal{H}_{A,2}(Q)$. **4.** Využijte obraz přímky BC ve zobrazení $\mathcal{H}_{A,2}$. **5.** [P], str. 170-171. **6.** Situace $a \parallel b$ promyslete sami. Nechť a a b se protínají v bodě V. a) Na a zvolte $Y \neq V$ a na přímce AV sestrojte bod N tak, aby $|YN| = |Y, a|$. Pak užijte stejnolehlost $\mathcal{H}_{V,h}$, která zobrazí N na M. b) [P], str. 173-174. c) Využijte $\mathcal{H}_{M,2/3}$. **7.** Zvolte například $C \in n$ a využijte $\mathcal{H}_{C,-0,5}$. **8.** [P], str. 174-175. **9.** Sestrojením tečny ke kružnici n v jejím bodě T převedeme na úlohu 8. **10.** Nechť T je bod dotyku hledané kružnice k s kružnicí m a Nechť přímky a, b se protínají v bodě V (situaci $a \parallel b$ promyslete sami). Ze stejnolehlosti $\mathcal{H}_{T,h}$, která zobrazuje k na m, plyne, že přímky $a' = \mathcal{H}_{T,h}(a)$ a $b' = \mathcal{H}_{T,h}(b)$ jsou tečny k m rovnoběžné s přímkami a b a jejich průsečík V' je obraz bodu V. To umožňuje sestrojit bod T a pak i střed kružnice k.

11. [P], str. 172. **12.** Řešte analogicky jako úlohu 11. **13.** Řešte analogicky jako úlohu 11. **14.** Sestrojte pomocný trojúhelník XYZ, který má strany rovnoběžné se zadanými přímkami (délku jedné strany zvolte). Body x, Y a Z pak veďte rovnoběžky se stranami trojúhelníku KLM tak, aby tyto rovnoběžky ohraničily trojúhelník $A'B'C'$ stejnolehlý s ABC a opsaný trojúhelníku XXZ. Nakonec využijte stejnolehlost, která zobrazuje $A'B'C'$ na ABC. **15.** [P], str. 176. **16.** Sestrojte $k' = \mathcal{H}_{M,0,5}(k)$, je-li M vnější bod kružnice, resp. $k' = \mathcal{H}_{M,-0,5}(k)$, je-li M bod vnitřní. **17.** a) [P], str. 169-170. b) Využijte stejnolehlost z úkolu a). **18.** Jsou-li dány velikosti dvou úhlů trojúhelníku ABC, (nebo poměr délek stran), je tím pevně určen tvar trojúhelníku. Známe-li navíc délku m o níž víme, že ji lze z prvků trojúhelníka ABC sestrojit, lze postupovat takto: Sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC. Z něj si odměříme délky úseček potřebných ke konstrukci úsečky m', která v podobnosti odpovídá zadané délce m. Podíl m/m' ke koeficientem podobnosti, která převádí trojúhelník $A'B'C'$ na trojúhelník ABC. Z délek m', m a například délky c', kterou z trojúhelníku ABC odměříme, lze (jako čtvrtou geometrickou úměrnou) sestrojit délku c strany AB trojúhelníku ABC (nebo si odměříme jakoukoli jinou délku d' a k ní sestrojíme odpovídající délku d potřebnou ke konstrukci trojúhelníku ABC).

Literatura

[1] Balk, M. B.: *Geometričeskie priloženija ponjatija o centre tjažesti.* Fizmatgiz, Moskva, 1956

[2] Balk, M. B. - Boltjanskij, V. G.: *Geometrija mass.* Nauka, Moskva, 1987

[3] Boček, L. - Zhouf, J.: *Máte rádi kružnice?* Prometheus, Praha, 1995.

[4] Boček, L. - Zhouf, J.: *Planimetrie.* Pedagogická fakulta UK v Praze, Praha, 2009.

[5] Kuřina, F.: *10 geometrických transformací.* PROMETHEUS, Praha, 2002

[6] Leischner, P.: *Geometrická zobrazení.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, vyjde v roce 2010

[7] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia - Planimetrie.* Prometheus, Praha, 1993

[8] Sekanina, M. a kol.: *Geometrie I.* SPN, Praha, 1986.

[9] Sekanina, M. a kol.: *Geometrie II.* SPN, Praha, 1988.

[10] Šedivý, O. a kol.: *Geometria 2.* SPN, Bratislava, 1987