Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích
Katedra matematiky

Diplomová práce

Elementární metody řešení extremálních úloh

Vypracovala: Eva Řezníčková
Aprobace: matematika – občanská výchova
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Pavel Leischner
Datum odevzdání: 18. 5. 2001

Obsah

1. Úvod 6

2. Využití A-G nerovnosti 7

3. Využití kvadratické funkce 40

4. Extrémy kubické funkce 61

5. Metoda diskriminantu 79

6. Závěr 94

7. Seznam literatury 95

1. Úvod

V technice a přírodních vědách, ve výrobě i v životě se často setkáváme se zajímavými úlohami, v nichž je zapotřebí nalézt extremální hodnoty matematických funkcí, tj. jejich maxima a minima. Tyto úlohy se obvykle řeší diferenciálním počtem (poprvé se s ním seznamují studenti některých středních škol, jinak až na VŠ). Přesto mnoho těchto úloh mohou řešit již i mladší žáci středních škol, nebo nadaní žáci 2. stupně ZŠ vyšších tříd bez znalostí diferenciálního počtu za použití jednoduchých prostředků elementární matematiky. Zmíněné úlohy mají jednak široké možnosti praktického použití a jsou tedy prostředkem, jak žákům ukázat užitečnost matematiky, jednak jsou vynikajícím motivačním činitelem při výuce matematiky. Proto jsem se rozhodla zabývat se elementárními metodami řešení takových úloh ve své diplomové práci, jejíž hlavním cílem je poskytnout informativní a praktickou pomůcku pro práci s žáky v nepovinné matematice.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř částí podle jednotlivých metod, kde každá obsahuje teoretickou část s popisem metody a řešené úlohy. Vzhledem k rozsahu práce nebylo možné zabývat se všemi běžně užívanými elementárními metodami, proto jsem se omezila na použití A-G nerovnosti, metody diskriminantu, využití vlastností kvadratické funkce a také na využití extrémů kubické funkce.

2. Využití A-G nerovnosti

V této kapitole se seznámíme s metodou, která využívá Cauchyovy nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem k vyřešení extremálních úloh. Nejprve si zaveďme pojmy aritmetický a geometrický průměr.

Aritmetický průměr

Nechť $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Aritmetickým průměrem čísel $x_1,x_2,...,x_n$ nazveme takové číslo $A_n(x)$, pro které platí:

$$A_n(x)=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

Geometrický průměr

Nechť $x=(x_1,x_2,...,x_n)$; $x_i \geq 0$, $i=1,2,...,n$. Geometrickým průměrem čísel $x_1,x_2,...,x_n$ budeme nazývat číslo

$$G_n(x)=\sqrt[n]{x_1+x_2+...+x_n}$$

Věta 2.1: (o A-G nerovnosti)

Nechť jsou dána nezáporná čísla $x_1,x_2,...,x_n$. Pak platí

$$\boxed{\mathbf{G_n(x) \leq A_n(x)}}$$

přičemž rovnost nastává právě, když

$x_1=x_2=...=x_n$.

Důkaz:

a) v první části dokážeme, že rovnost nastává právě tehdy když

$x_1=x_2=...=x_n$

Nechť $x_1=x_2=...=x_n=s$. Položíme $S_n=x_1+x_2+...+x_n=n\cdot s$ pak

$$A_n(x)=\frac{n\frac{S_n}{n}}{n}=\frac{S_n}{n}=s \text{ a } G_n(x)=\sqrt[n]{\left(\frac{S_n}{n}\right)^n}=\frac{S_n}{n}=s. \text{ Tedy } A_n(x)=G_n(x).$$

b) Neplatí-li a), pak všechna x nejsou stejná a aspoň jedno z čísel je větší než $\frac{S_n}{n}$ a aspoň jedno z čísel menší než $\frac{S_n}{n}$. Označme tyto čísla x_r a x_s. Pak $x_r < \frac{S_n}{n}$ a $x_s > \frac{S_n}{n}$. Využijme pomocné věty.

<u>Pomocná věta:</u>

Jestliže při konstantním součtu dvou čísel menší číslo zvětšíme o hodnotu menší, než je absolutní hodnota jejich rozdílu, a druhé o stejnou hodnotu zmenšíme, pak se zvětší součin těchto čísel.

<u>Důkaz:</u>

Označme tyto čísla a,b , kde $a<b$. Zvolme $a' = a+\varepsilon$ a $b' = b-\varepsilon$, přičemž $b-a>\varepsilon>0$. Pak $a'\cdot b' = (a+\varepsilon)\cdot(b-\varepsilon) = ab - a\varepsilon + b\varepsilon - \varepsilon^2 = ab + \varepsilon(b-a-\varepsilon)$. Z podmínky pro ε je $\varepsilon(b-a-\varepsilon)>0$, tzn. že $a'\cdot b' > ab$.

Zvolme $x_r' = \frac{S_n}{n}$ (zvětšili jsme x_r o $\frac{S_n}{n} - x_r$) a $x_s' = x_s + x_r - \frac{S_n}{n}$ (zmenšili jsme x_s o $\frac{S_n}{n} - x_r$).

Pro ostatní $x_j' = x_j$, $j \neq r,s$

Podle předešlé věty platí $x_r \cdot x_s \prec x_r' \cdot x_s'$ a tedy $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} < \sqrt[n]{x_1' \ldots x_n'}$. Jsou-li čísla x_i, $i=1,\ldots,n$ rovna průměru, pak $G(n) < G'(n) = \sqrt[n]{\left(\frac{S_n}{n}\right)^n} = \frac{S_n}{n} = A_n(x)$. V opačném případě celý postup opakujeme dokud všechna čísla nebudou rovna průměru.

$$Gn(x) < G'n(x) < G''n(x) < \ldots < \sqrt[n]{\left(\frac{S_n}{n}\right)^n} = \frac{S_n}{n} = An(x)$$

$$Gn(x) < An(x).$$

Chyby při A-G nerovnosti

Při používání A-G nerovnosti k určování extremálních hodnot algebraických výrazů se mohou vyskytnout tyto chyby:

(a) Užití A-G nerovnosti i přesto, že některý z činitelů je záporný.
Nerovnost však obecně platí jen za předpokladu, že všechny do ní dosazované členy jsou nezáporné. Je-li tedy některý z nich záporný, musíme úlohu řešit jiným způsobem nebo výraz vhodně upravit.

(b) Nevhodná úprava a volba výrazu pro A-G nerovnost:

1) výraz není po odhadu omezen konstantní funkcí

Př. Určete maximální hodnotu výrazu

$V = 4x(11-x),\ 0 \le x \le 11$

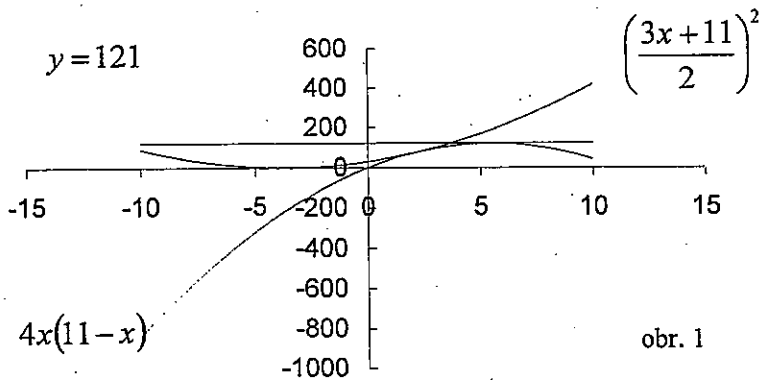
A-G nerovnost pro n = 2

$$\sqrt{4x(11-x)} \le \frac{4x+(11-x)}{2} = \frac{3x+11}{2} \le \frac{3\cdot 11+11}{2}$$

odtud

$$V \le \left(\frac{3\cdot 11+11}{2}\right)^2 = 484$$

Při tomto odhadu jsme se sice nedopustili formálně žádné chyby, ale číslo 484 neurčuje maximální hodnotu výrazu. Rovnost $V = 484$ totiž nemůže nastat, protože podle věty o A-G nerovnosti by muselo v případě rovnosti platit $4x = 11 - x$, tj. $x = \frac{11}{5}$. My jsme však dosadili $x = 11$ (maximální možnou hodnotu x). Výraz V musí být upraven tak, aby na jedné straně vyšla konstantní funkce (tj. aby se výrazy s proměnnou vyrušily, resp. vykrátily)(viz obr. 1).



obr. 1

2) výraz je po odhadu omezen konstantní funkcí, přičemž se ignoruje podmínka za jaké nastává rovnost

Př. $V=4x(11-x)$

A-G nerovnost pro $n=3$

$$\sqrt[3]{4\cdot x(11-x)}\le\frac{4+x+(11-x)}{3}=5$$

$V\le 5^3$

Rovnost $V_{max}=5^3$ nastává právě tehdy, když $4=x=11-x$.

Tato soustava však nemá řešení. Musíme tedy dbát na to, aby soustava pro rovnost A-G nerovnosti měla řešení.

Správný postup:

$V=4x(11-x)$. Podmínka $0\le x\le 11$ nám zaručuje nezápornost členů. Výraz V vydělíme 4, tedy $\frac{V}{4}=x(11-x)$. Použijeme A-G nerovnost pro $n=2$:

$$\sqrt{x(11-x)}\le\frac{x+(11-x)}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\frac{V}{4}\le\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$V=121$

Rovnost $V_{max}=121$ nastává, když $x=11-x$

$2x=11$

$$x = \frac{11}{2}$$

největší hodnota výrazu V je 121 pro $x = \frac{11}{2}$.

Úlohy:

2.1 Najděte největší hodnotu výrazu $V = x(8-x)$, $0 < x < 8$.

Řešení:

Použijeme A-G nerovnost pro $n = 2$, aby po odhadu vyšla konstanta.

$$\sqrt{x(8-x)} \le \frac{x+(8-x)}{2}$$

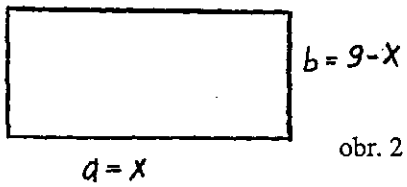
$$x(8-x) \le 16$$

Největší hodnota výrazu je $V = 16$, a to nastane, když $x = 8-x$. Tedy $x = 4$.

Největší hodnota výrazu je 16 pro $x = 4$.

2.2 Pravoúhelník má obvod $O = 18$ cm. Najděte takové rozměry a, b, aby měl maximální obsah.

Řešení:



obr. 2

Obvod pravoúhelníku je $O = 2(a+b) = 18$.

Položme $a = x$, $b = 9-x$, pak pro obsah platí $S = x(9-x)$

Podle věty 2.1 je $\sqrt{x(9-x)} \le \frac{x+(9-x)}{2} = \frac{9}{2}$, kde $0 < x < 9$.

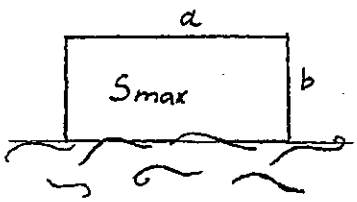
Po úpravě je $S \le \frac{81}{4}$. S má největší hodnotu $S_{max} = \frac{81}{4}$ právě, když platí $x = 9-x$.

Tedy $x = \frac{9}{2} = 4{,}5$, $a = 4{,}5$ cm a $b = 4{,}5$ cm.

Pravoúhelník má maximální obsah $S = 20{,}25\ \text{cm}^2$, když má obě strany stejně dlouhé, $a = b = 4{,}5$ cm.

2.3 Zahradník měl pravoúhlý pozemek těsně u řeky tak, že řeka tvořila hranici pozemku z jedné strany. Na oplocení spotřeboval 300 m pletiva. Najděte rozměry jeho pozemku, když víte, že plošný obsah je maximální.

Řešení:



obr. 3

Poněvadž oplotil pouze 3 strany, může zapsat $a+2b=300$, $0<b<150$

Označme $b=x$, pak $a=300-2x$

Obsah pozemku je

$$S=a\cdot b=(300-2x)\cdot x$$

$$S=2(150-x)\cdot x$$

$$\frac{S}{2}=(150-x)\cdot x$$

Podle A-G nerovnosti:

$\sqrt{(150-x)\cdot x}\leq\frac{(150-x)+x}{2}$, po úpravě

$S\leq\frac{150^2}{4}\cdot 2=11250$. Největší možný obsah $S_{max}=11250$ nastane, když

$150-x=x$

$150=2x$

$x=75$

Tedy $b=75\ m$ a $a=150\ m$.

Zahradníkův pozemek byl obdélník 75 m x 150 m.

2.4 Součin dvou kladných čísel, jejichž součet je konstantní je největší tehdy, jsou-li tato čísla stejná. Dokažte.

Řešení:

Označme čísla x, y a jejich součet $x+y=k$. Pak $y=k-x$ a součin těchto čísel je $x(k-x)$.

Podle věty 2.1 mohu napsat

$\sqrt{x(k-x)} \le \frac{x+(k-x)}{2}$. Po úpravě $x(k-x) \le \frac{k^2}{4}$. Výraz je největší, nastává-li rovnost, tj. když

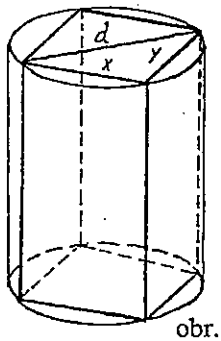
$x = k - x$

$x = \frac{k}{2}$

Pro $y = \frac{k}{2}$. Tedy $x = y$.

2.5 Z kulatiny tvaru válce je třeba vyřezat trám s největším objemem. Jaký tvar musí mít příčný řez trámu?

Řešení:



obr. 4

Aby byl objem trámu maximální, musí mít jeho podstava maximální obsah, tj.

$S = x \cdot y$. Z obr. 4 plyne $y^2 = d^2 - x^2$, kde d je průměr kulatiny.

Maximální obsah nastane při stejných hodnotách jako S^2.

$S^2 = x^2 \cdot y^2 = x^2(d^2 - x^2)$

Z A-G nerovnosti

$$S = \sqrt{x^2(d^2 - x^2)} \le \frac{x^2 + (d^2 - x^2)}{2} = \frac{d^2}{2}$$

tedy $S \le \frac{d^2}{2}$

Největší hodnota S je $\frac{d^2}{2}$, což nastává při rovnosti $x^2 = d^2 - x^2$. Tedy $x = \frac{d}{2}\sqrt{2}$

a $y = \frac{d}{2}\sqrt{2}$.

Trám musí mít čtvercovou podstavu o rozměrech $x = y = \frac{d}{2}\sqrt{2}$

2.6 Mezi všemi obdélníky vepsanými do kružnice o poloměru R, nalezněte ten, který má největší obsah.

Řešení:

viz. 2.5 [čtverec o straně $R\sqrt{2}$]

2.7 Najděte největší možnou hodnotu výrazu $V = 3x - 2x^2$, $0 \le x \le \frac{3}{2}$.

Řešení:

Výraz V musíme vhodně upravit, aby součet dvou členů, jejichž druhou odmocninu geometrického průměru máme na levé straně, nezávisel na x a zároveň, aby existovala hodnota x z uvažovaného intervalu $\left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$, pro který se členy rovnají.

$$V = x(3 - 2x)$$

$$2V = 2x(3 - 2x) \le \left(\frac{2x + (3 - 2x)}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$V \le \frac{9}{8}$$

$$V_{\max} = \frac{9}{8}.$$

Rovnost nastává právě, když

$$2x = 3 - 2x$$

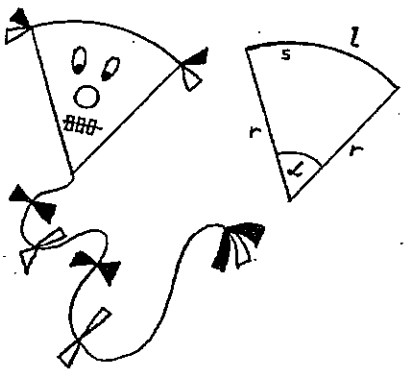
$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Největší hodnota výrazu je $\frac{9}{8}$ a to pro $x = \frac{3}{4}$.

2.8 Papírový drak má tvar kruhové výseče. Určete poloměr a příslušný oblouk výseče tak, aby drak měl maximální plošný obsah, je-li obvod kruhové výseče l.

Řešení:



obr. 5

Obvod výseče je $l = 2r + s$, kde $s = \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \alpha = r\alpha$

$l = 2r + r\alpha$ odtud $\alpha = \frac{l - 2r}{r}$

Pro obsah výseče platí $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ (neboť obsah kruhu je πr^2 a obsah výseče s úhlem α je $\frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha$.

Tedy $S = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{l - 2r}{r} \right) = \frac{1}{2} r(l - 2r) = r\left(\frac{l}{2} - r \right)$

S využitím A-G nerovnosti pro $n = 2$ dostáváme:

$$\sqrt{r\left(\frac{l}{2} - r\right)} \le \frac{r + \left(\frac{l}{2} - r\right)}{2} = \frac{l}{4}$$

$$S \le \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16}.$$

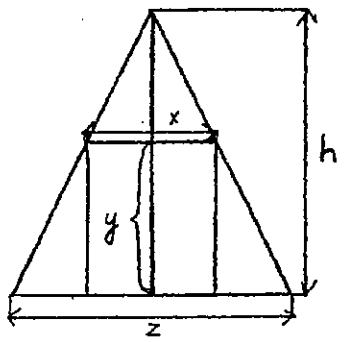
S je největší, když $S = \frac{l^2}{16}$, tzn. když $r = \frac{l}{2} - r$

$r = \frac{l}{4}$ pak $s = \frac{l}{2}$.

Výseč má mít tyto rozměry $r = \frac{l}{4}$ a $s = \frac{l}{2}$.

2.9 Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a k ní příslušné výšce h vepište obdélník největšího obsahu.

Řešení:



obr. 6

Obsah obdélníku je $S = x \cdot y$. Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\frac{x}{z} = \frac{h-y}{h} = 1 - \frac{y}{h}$$

$$x = z\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Tedy $S = z\left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot y = z\left(\frac{h-y}{h}\right) \cdot y = \frac{z}{h}(h-y) \cdot y$

Použijeme A-G nerovnost pro $n = 2$:

$$\sqrt{\frac{h}{z} S} = \sqrt{(h-y) \cdot y} \le \frac{(h-y)+y}{2}, \text{ po umocnění}$$

$$(h-y)y \le \frac{h^2}{4}$$

$$S \le \frac{z}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{z \cdot h}{4}$$

Maximální obsah je $S_{\max} = \frac{z \cdot h}{4}$ a to je, když

$$h - y = y$$

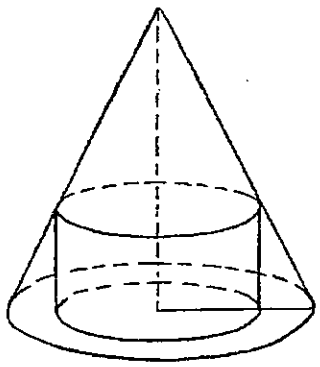
$$h = 2y$$

$$y = \frac{h}{2} \text{ a } x = \frac{z}{2}$$

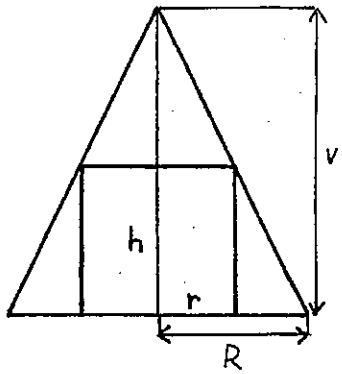
Obdélník má maximální obsah $S = \frac{zh}{4}$ jsou-li jeho rozměry $x = \frac{z}{2}$ a $y = \frac{h}{2}$.

2.10 Do rotačního kužele o poloměru R a výšce v vepište rotační válec o největším plášti.

Řešení:



obr. 7



obr. 8

Pro obsah pláště Q platí:

$Q = 2\pi r \cdot h$

Z podobnosti trojúhelníků je

$$\frac{r}{R} = \frac{v-h}{v} = 1 - \frac{h}{v}$$

$$r = R\left(1 - \frac{h}{v}\right)$$

Tedy $Q = 2\pi R\left(1 - \frac{h}{v}\right) \cdot h = \frac{2\pi R}{v}(v-h)h$

Podle 2.1 mohu napsat

$$\sqrt{(v-h)h} \le \frac{(v-h)+h}{2}$$

$Q \le \frac{2\pi R}{v} \cdot \frac{v^2}{4} = \frac{\pi R v}{2}$, přičemž rovnost nastane právě, když

$v - h = h$

$2h = v$

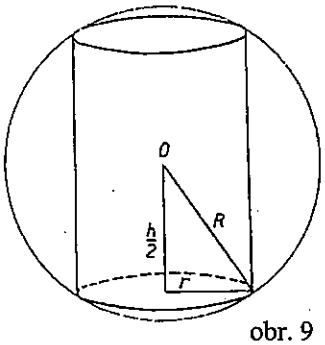
$h = \frac{v}{2}$

pro r dopočteme $r = R\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{R}{2}$.

Do kužele vepíšeme válec o poloměru $r = \frac{R}{2}$ a výšce $h = \frac{v}{2}$.

2.11 Do koule o poloměru R vepište rotační válec největšího pláště.

Řešení:



obr. 9

Pro obsah pláště platí:

$Q = 2\pi r \cdot h$

Z Pythagorovy věty je $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ tedy

$Q = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{r^2\left(R^2 - r^2\right)}$

S využitím A-G nerovnosti je

$4\pi\sqrt{r^2\left(R^2 - r^2\right)} \leq 4\pi\frac{r^2 + \left(R^2 - r^2\right)}{2} = 2\pi R^2$

$Q_{\max} = 2\pi R^2$ právě tehdy, když

$r^2 = R^2 - r^2$

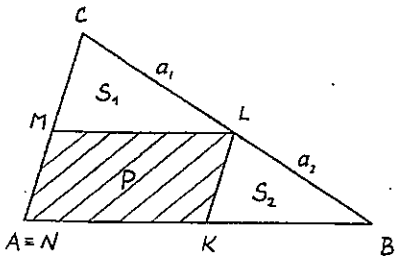
$r = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$

Dosazením do vztahu pro h je $h = R \cdot \sqrt{2}$

Rotační válec má podstavu o poloměru $r = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$ a výšku $h = R \cdot \sqrt{2}$.

2.12 Do trojúhelníku vepište rovnoběžník $KLMN$ takový, aby dvě jeho strany ležely ve stranách trojúhelníka. Určete bod L na straně BC, tak aby rovnoběžník měl maximální obsah.

Řešení:



obr. 10

Označme S obsah trojúhelníka ABC, P obsah rovnoběžníka $KLMN$ a S_1, S_2 obsahy zbylých trojúhelníků KBL, MLC. Pro obsah P rovnoběžníku platí:

$P = S - \left(S_1 + S_2\right)$

Z poměrů obsahů trojúhelníku S_1 a S_2

k trojúhelníku S $\left(\frac{S_1}{S}=k_1^2, \frac{S_2}{s}=k_2^2\right)$ dostáváme

$P=S-\left(k_1^2S+k_2^2S\right)=S\left(1\left(k_1^2+k_2^2\right)\right)$

dále z poměrů stran trojúhelníků ke straně trojúhelníku ABC dostáváme vztah

$\frac{a_1}{a}+\frac{a_2}{a}=k_1+k_2=\frac{a_1+a_2}{a}=\frac{a}{a}=1$, tedy $k_1+k_2=1$.

Po umocnění a malé úpravě dostaneme

$2k_1k_2=1-\left(k_1^2+k_2^2\right)$ a po dosazení do vztahu pro obsah $P=2k_1k_2S$.

Dále platí

$2k_1k_2S\le 2S\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2$, odtud

$2k_1k_2S\le 2S\frac{1}{4}=\frac{S}{2}$ $P=\frac{S}{2}$ právě tehdy, když

$k_1=k_2=\frac{1}{2}$.

Bod L leží v polovině úsečky BC.

<u>Pozn.</u>

Dosud jsme řešili úlohy pomocí A-G nerovnosti pro $n=2$. Zaměřme se nyní na úlohy, kde využijeme nerovnost pro $n=3$.

2.13 Najděte největší hodnotu výrazu $V=x^2\cdot(15-2x)$, $0<x<\frac{15}{2}$.

<u>Řešení:</u>

Použijeme A-G nerovnost pro $n=3$, aby po odhadu vyšla konstanta:

$\sqrt[3]{x\cdot x(15-2x)}\le\frac{x+x+(15-2x)}{3}=5$

$V\le 5^3=125$

Rovnost nastane, když:

$x=15-2x$

$3x=15$

$x=5$

Číslo 125 je největší hodnota výrazu V pro $x=5$.

2.14 Dané číslo a rozložte na součet tří čísel tak, aby jejich součin byl největší.

Řešení:

Označme jednotlivá čísla x,y,z, pak $x+y+z=a$ a $x\cdot y\cdot z$ má být maximální.

Z A-G nerovnosti pro $n=3$ plyne:

$$\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}\le\frac{x+y+z}{3}=\frac{a}{3}$$

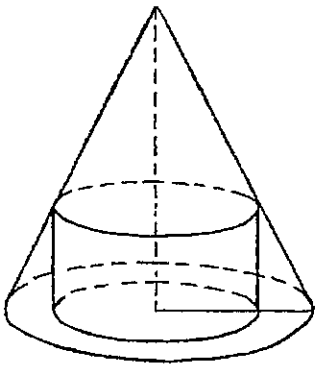
$$x\cdot y\cdot z\le\frac{a^3}{27}$$

Největší součin je $x\cdot y\cdot z=\frac{a^3}{27}$ právě, když $x=y=z=\frac{a}{3}$.

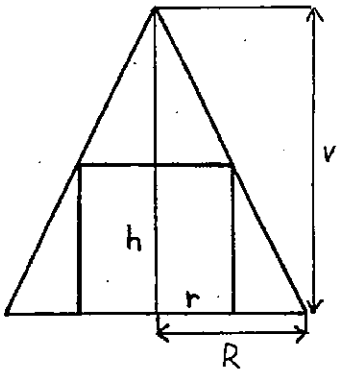
Dané číslo rozdělíme na třetiny.

2.15 Je dán kužel výšky v a s poloměrem podstavy R. Najděte válec maximálního objemu, který je vepsán do kužele.

Řešení:



obr. 11



obr. 12

Pro objem válce platí:

$$V_{\max}=\pi r^2\cdot h$$

z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\frac{r}{R}=\frac{v-h}{v}=1-\frac{h}{v}$$

$$h=\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot v$$

Po dosazení do V

$$V=\pi r^2\cdot h=\pi r^2\cdot\left(1-\frac{r}{R}\right)v=\pi r^2 v\left(\frac{R-r}{R}\right)=\frac{\pi v}{R}\cdot r^2(R-r).$$

Abychom mohli použít A-G nerovnost, rozšíříme výraz

$$V=\frac{\pi v}{2R}\cdot r^2(2R-2r)$$

$$\sqrt[3]{r\cdot r(2R-2r)}\leq\frac{r+r+(2R-2r)}{3}$$

$$r\cdot r(2R-2r)\leq\left(\frac{2R}{3}\right)^3=\frac{8R^3}{27}$$

$$V\leq\frac{\pi v}{2R}\cdot\frac{8R^3}{27}=\frac{4\pi vR^2}{27}$$

$V_{\max}=\frac{4\pi vR^2}{27}$ právě tehdy, když

$$r=2R-2r$$

$$3r=2R$$

$$r=\frac{2}{3}R$$

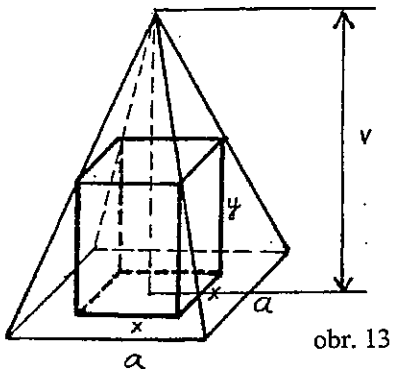
pro výšku vyjde $h=\left(1-\frac{r}{R}\right)v=\left(1-\frac{2R}{3R}\right)v=\left(1-\frac{2}{3}\right)v=\frac{1}{3}v$

$$h=\frac{1}{3}v$$

Válec bude mít maximální V, když $r=\frac{2}{3}R$ a $h=\frac{1}{3}v$.

2.16 Do pravidelného čtyřbokého jehlanu vepište kvádr maximálního objemu tak, aby jeho dolní podstava ležela uvnitř podstavy jehlanu a hrany jeho horní podstavy ležely v bočních stěnách jehlanu.

Řešení:



obr. 13

Objem kvádru je

$V = x \cdot x \cdot y$

Z podobnosti trojúhelníků je $\frac{a}{x} = \frac{v}{v-y}$, odtud

$y = v - \frac{vx}{a}$. Po dosazení do V je

$$V = x \cdot x\left(v - \frac{vx}{a}\right) = \frac{v}{a} \cdot x \cdot x(a-x) = \frac{v}{2a} \cdot x \cdot x(2a-2x)$$

Podle A-G nerovnosti platí:

$$\sqrt[3]{x \cdot x(2a-2x)} \le \frac{x + x + (2a-2x)}{3}$$

$$x \cdot x(2a-2x) \le \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{8a^3}{27}$$

$$V \le \frac{8a^3}{27} \cdot \frac{v}{2a} = \frac{4a^2 v}{27}$$

Maximální objem $V_{\max} = \frac{4a^2 v}{27}$. Rovnost nastává právě tehdy, když

$x = 2a - 2x$

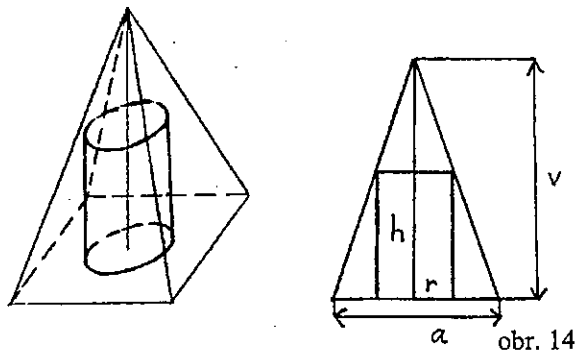
$3x = 2a$

$x = \frac{2}{3}a$, pro y po dosazení za x vyjde $y = \frac{1}{3}v$.

Vepsaný kvádr má podstavu tvaru čtverce o straně $x = \frac{2}{3}a$ a výšku $y = \frac{1}{3}v$.

2.17 Do pravidelného čtyřbokého jehlanu vepište rotační válec o maximálním objemu tak, aby jeho dolní podstava ležela uvnitř podstavy jehlanu a hrana horní podstavy se dotýkala bočních stěn jehlanu.

Řešení:



obr. 14

Objem válce je $V = \pi r^2 h$.

Z podobnosti trojúhelníků plyne $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{v-h}{v}$. Odtud $h = v - \frac{2rv}{a}$ a po dosazení do V je

$$V = \pi r^2\left(v - \frac{2rv}{a}\right) = \frac{\pi v}{a} \cdot r \cdot r(a-2r).$$

Po využití A-G nerovnosti

$$\sqrt[3]{r \cdot r(a-2r)} \le \frac{r + r + (a-2r)}{3}$$

$$r \cdot r(a-2r) \le \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$$

$$V \le \frac{\pi v}{a} \cdot \frac{a^3}{27} = \frac{\pi v a^2}{27}$$

Maximální objem $V_{\max} = \frac{\pi v a^2}{27}$, je-li

$$r = a - 2r$$

$$3r = a$$

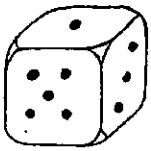
$$r = \frac{a}{3}$$

Po dopočtení je $h = \frac{v}{3}$.

Válec má poloměr $r = \frac{a}{3}$ a výšku $h = \frac{v}{3}$.

2.18 Dokažte, že kostka je kvádr s maximálním objemem při daném povrchu P.

Řešení:



obr. 15

Nechť a,b,c jsou délky třech sousedních hran. Potom $P = 2(ab+bc+ca)$ a $V = a \cdot b \cdot c$

$$V^2 = a^2b^2c^2 = (ab)(bc)(ca)$$

Podle A-G nerovnosti platí:

$$(ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{P}{2}}{3}\right)^3$$

$$V^2 \leq \left(\frac{P}{6}\right)^3$$

$$V \leq \left(\frac{P}{6}\right)^{3/2}$$

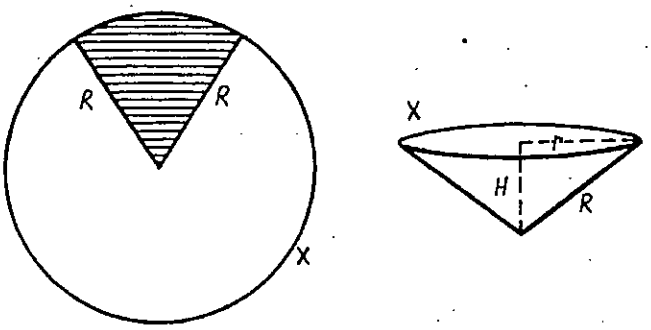
Maximální objem $V_{\max} = \left(\frac{P}{6}\right)^{3/2}$ nastává, když

$ab = bc = ca$ tedy $a = b = c$.

Při konstantním povrchu P má největší objem $V = \left(\frac{P}{6}\right)^{3/2}$ krychle.

2.19 Z plechového kruhu je možné udělat kuželovou část trychtýře. Z kruhu lze vystřihnout výseč a zbývající část se ohne do kuželovitého tvaru. Kolik stupňů má mít středový úhel příslušného oblouku výseče, abychom dostali kužel s maximálním objemem?

Řešení:



obr. 16

Označme obvod podstavy kužele x, pak

$x = 2\pi r$ a $r = \dfrac{x}{2\pi}$

Z Pythagorovy věty plyne:

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Objem kužele je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$V = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$ celý výraz umocníme a vynásobíme $\dfrac{1}{4}$, abychom mohli použít A-G nerovnost.

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9}\left(\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^2 \cdot \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$$

$$\frac{V^2}{4} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 4\pi^2} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 4\pi^2}\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2}\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)} \le \frac{\dfrac{x^2}{8\pi^2} + \dfrac{x^2}{8\pi^2} + \left(R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)}{3} = \frac{R^2}{3}$$

$$V \le \sqrt{\left(\frac{R^2}{3}\right)^3 \cdot \frac{\pi^2}{9} \cdot 4} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\left(\frac{R^2}{3}\right)^3} = \frac{2}{27}\pi R^3\sqrt{3}$$

Maximální objem nastává při rovnosti $\dfrac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}$, tedy

$$x = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 8\pi^2}{3}} = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$$

Úhel γ vypočteme pomocí přímé úměrnosti:

360^0 ..... $2\pi R$

γ ..... $2\pi R \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\gamma = 294^0$

$\alpha = 360^0 - 294^0 = 66^0$

$\alpha = 66^0$

Oblouk vystřihlé části má 66^0.

2.20 Který trojúhelník má při daném konstantním obvodu největší obsah? Jak to dokážeme?

Řešení:

Obvod trojúhelníku je $O = a + b + c = 2s$

Podle Heronova vzorce je obsah $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, po umocnění

$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ a po vydělení s $(s \neq 0)$

$$\frac{S^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}$$

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq (-1)\frac{(-s+a-s+b-s+c)}{3} = (-1)\frac{(a+b+c-3s)}{3} = (-1)\frac{(2s-3s)}{3} = \frac{s}{3}$$

$$\underbrace{(s-a)(s-b)(s-c)}_{\frac{S^2}{s}} \leq \frac{s^3}{27}$$

$$S \leq \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{\sqrt{3} \cdot s^2}{9}$$

Maximální obsah $S_{max} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$ nastává právě tehdy, když

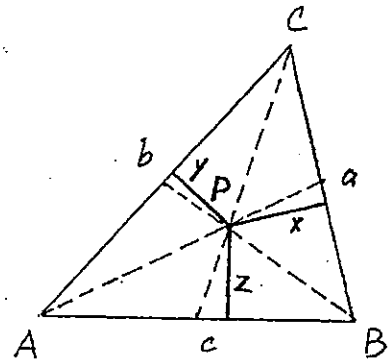
$s - a = s - b = s - c$

$a = b = c$

Největší obsah při daném obvodu má rovnostranný trojúhelník.

2.21 Nechť P je vnitřní bod trojúhelníku ABC a nechť x,y,z jsou v daném pořadí vzdálenosti bodu P od přímek BC, AC a AB. Kde má být umístěný bod P, aby byl součin xyz maximální?

Řešení:



obr. 17

Nechť a,b,c jsou v daném pořadí délky stran BC, AC, AB. Podle A-G nerovnosti platí:

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \le \frac{ax+by+cz}{3},$$

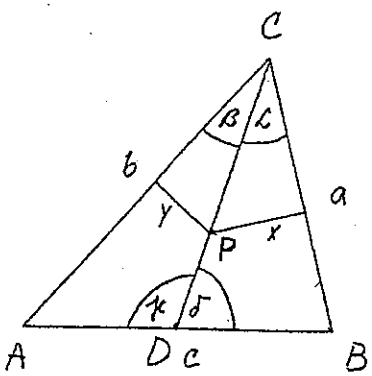
ale víme, že $ax+by+cz=2S$, kde S je obsah trojúhelníku (viz obr. 17). Tedy maximální hodnota součinu xyz je

$$axbycz \le \left(\frac{2S}{3}\right)^3$$

$$xyz \le \frac{8S^3}{27abc}$$

$$xyz = \frac{8S^3}{27abc} \text{ právě tehdy, když } ax=by=cz$$

Ukážeme, že $ax=by=cz$ platí pouze, když P je umístění v těžišti trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že CP protíná AB v bodě D. Nechť $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ jsou úhly znázorněné na obr. 18.



obr. 18

Platí, že $\frac{b\cdot\sin\beta}{a\cdot\sin\alpha}=\frac{AD}{DB}$. Tento vztah dostaneme aplikací sinové věty na trojúhelníky ADC a CDB. Dostaneme:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\gamma} \text{ a } \frac{DB}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\delta}.$$

z těchto rovností vyplývá, že

$$\frac{b\cdot\sin\beta}{a\cdot\sin\alpha}=\frac{AD\sin\gamma}{DB\sin\delta}=\frac{AD}{DB}$$ neboť γ a δ jsou doplňkové úhly.

Po použití uvedené rovnosti máme:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{b\cdot\sin\beta}{a\cdot\sin\alpha}=\frac{by/CP}{ax/CP}=\frac{by}{ax}$$

A z toho vyplývá, že $AD = DB$ jen tehdy, když $by = ax$. Tedy $ax = by$ jen tehdy, když bod P leží na těžnici procházející vrcholem C.

Podobně je možné ukázat, že $ax = cz$ pouze tehdy, když bod P leží na těžnici procházející bodem B. Z toho vyplývá, že $ax = by = cz$ tehdy, když P je těžištěm trojúhelníku ABC.

Pozn.

Všechny předchozí příklady byly na hledání maximálních hodnot a A-G nerovnost se zde používala jedním směrem. V dalších úlohách ukážeme, jak jí lze využít v opačném směru k nalezení minimálních hodnot.

2.22 Najděte takové kladné reálné číslo x, aby součet tohoto čísla x a jeho převrácené hodnoty byl minimální.

Řešení:

Využijeme A-G nerovnost pro n = 2.

$$\sqrt{x\frac{1}{x}}\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$$

$$1\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$$, po vynásobení 2

$$2\le x+\frac{1}{x}$$

Součet $x+\frac{1}{x}$ je nejmenší, je-li roven 2. To je právě, když

$$x=\frac{1}{x}$$

$$x^2=1$$

$x=1$, protože x je kladné.

2.23 Jaké minimální hodnoty nabývá funkce $f(x)=9x+\frac{1}{x},\ x>0$

Řešení:

Podle A-G nerovnosti pro $n=2$ platí:

$$\sqrt{9x\cdot\frac{1}{x}}\le\frac{9x+\frac{1}{x}}{2}$$

$$6\le 9x+\frac{1}{x}$$

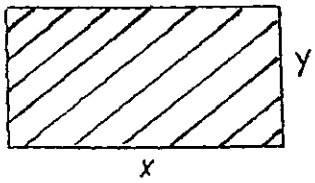
$f(x)_{\min}=6$ právě tehdy, když $9x=\frac{1}{x}$.

$$x=\frac{1}{3}$$

Funkce nabývá minimální hodnoty $f(x)=6$ pro $x=\frac{1}{3}$.

2.24 Jaký tvar má mít pravoúhlý pozemek, aby při stejném plošném obsahu byla délka ohrady co nejmenší?

Řešení:



obr. 19

Obsah pozemku $S=x\cdot y$ je konstantní.

Tedy $y=\frac{S}{x}$

Pro obvod dostaneme:

$$O=2(x+y)=2\left(x+\frac{S}{x}\right)$$

Podle A-G nerovnosti:

$$\sqrt{x\frac{S}{x}}\le\frac{x+\frac{S}{x}}{2}$$

$$2\sqrt{S}\le\underbrace{x+\frac{S}{x}}_{\frac{O}{2}}$$

$$4\sqrt{S}\le O$$

Nejmenší obvod je $O_{\min} = 4\sqrt{S}$ právě tehdy, když $x = \frac{S}{x}$, $x \neq 0$

$x^2 = S$

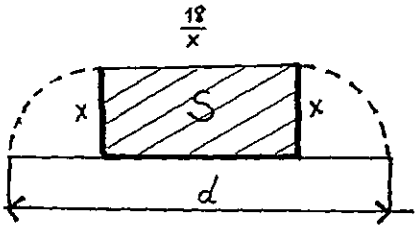
$x = \sqrt{S}$

pak $y = \frac{S}{x} = \frac{S}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}} = \frac{S\sqrt{S}}{S} = \sqrt{S}$

Pozemek musí být čtvercový.

2.25 Žlab s obdélníkovým průřezem o obsahu 18 dm^2 se má zhotovit s použitím co nejmenšího množství plechu. Jakou šířku bude mít plechový pás?

Řešení:



obr. 20

Je-li výška obdélníkového průřezu x, je jeho délka $\frac{18}{x}$.

Šíře pásu d je tedy:

$d = 2x + \frac{18}{x}$

$d = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$

Podle A-G nerovnosti platí:

$\sqrt{x\frac{9}{x}} \leq \frac{x + \frac{9}{x}}{2}$

$3 \leq \frac{d}{4}$

$12 \leq d$

nejmenší šířka je $d = 12\ dm$, když

$x = \frac{9}{x}$

$x^2 = 9$

$x = 3\ dm$

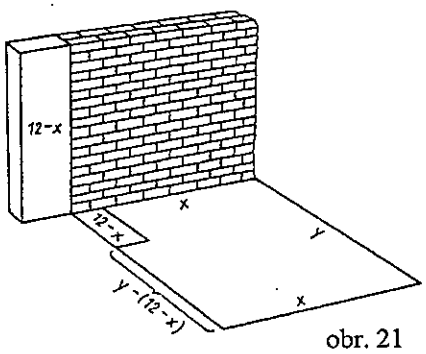
Žlab zhotovíme z plechového pásu o šířce 12 dm tak, že ve vzdálenosti 3 dm od okrajů plech ohneme.

2.26 Na místě zničeného domu, ze kterého se zachovala pouze jedna stěna, je třeba postavit nový dům. Délka zachované stěny je 12 m. Nový dům bude stát na ploše o obsahu 112 m^2. Ekonomické podmínky práce jsou tyto:

1) Oprava 1 m (délky) stěny stojí 25% ceny postavení nové stěny;
2) Demolice 1 m (délky) staré zdi a postavení nové zdi s použitím starého materiálu stojí 50% ceny postavení nové zdi z nového materiálu.

Jaký je nejlepší způsob využití staré zdi?

Řešení:



obr. 21

Nechť se ze staré zdi zachová x m a zbývajících $(12-x)$ m se rozebere a ze získaného materiálu se postaví část stěny nového domu (obr. 21). Je-li cena 1 m nové zdi a Kč, pak oprava x m staré zdi bude stát $\frac{a \cdot x}{4}$ Kč, vybudování části zdi délky $(12-x)$ m bude stát $\frac{a(12-x)}{2}$ Kč. Zbytek této stěny pak bude stát $(a[y-(12-x)])$ Kč, třetí stěna ax Kč a čtvrtá ay Kč. Celá práce tedy bude stát

$\frac{ax}{4}+\frac{a(12-x)}{2}+a(y+x-12)+ax+ay=\frac{a(7x+8y)}{4}-6a$ a tento výraz má být nejmenší, což závisí na součtu $7x+8y$. Víme, že $x \cdot y=112$, takže $7x \cdot 8y=56 \cdot 112$.

Podle A-G nerovnosti platí:

$$\sqrt{7x \cdot 8y} \leq \frac{7x+8y}{2}$$

$$2\sqrt{56 \cdot 112} \leq 7x+8y$$

Nejmenší hodnota výrazu $7x+8y$ nabude při rovnosti, když $7x+8y$ tj. $y=\frac{7}{8}x$

y dosadíme do rovnice $xy=112$, a dostaneme $\frac{7}{8}x^2=112$, kde $x=\sqrt{128} \doteq 11{,}3$ m.

Protože délka staré zdi je 12 *m*, rozbouráme pouze 0,7 *m* stěny.

2.27 Najděte nejmenší hodnotu výrazu $V = \frac{7}{x+1} + 5x$, $x > -1$.

<u>Řešení:</u>

Součin všech sčítanců musí být konstantní, proto k V přičteme číslo 5:

$$S = V + 5 = \frac{7}{x+1} + 5x + 5 = \frac{7}{x+1} + (x+1)5$$

$$\sqrt{\frac{7}{x+1}(x+1)5} \leq \frac{\frac{7}{x+1} + (x+1)5}{2}$$

$$2\sqrt{35} \leq \underbrace{\frac{7}{x+1} + (x+1)5}_{S}$$

$$2\sqrt{35} \leq V + 5$$

$$2\sqrt{35} - 5 \leq V$$

$V_{\min} = 2\sqrt{35} - 5$, tato rovnost nastane, když

$$\frac{7}{x+1} = 5(x+1)$$

$$7 = 5(x+1)^2$$

$$\frac{7}{5} = (x+1)^2$$

$$\sqrt{\frac{7}{5}} = x + 1$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{5}} - 1$$

2.28 Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

Řešení:

Povrch válce je $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

Ze vzorce pro objem válce vyjádříme výšku h

$$V = \pi r^2 h,\ h = \frac{V}{\pi r^2}$$

pak $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$

Využijeme A-G nerovnost pro $n = 3$:

$$\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} \le \frac{2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}}{3}$$

Po úpravách

$$3\sqrt[3]{2\pi V^2} \le S$$

Rovnost $S_{\min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ nastane právě tehdy, když $2\pi r^2 = \frac{V}{r}$, tedy $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a výšku $h = 2r$. (Osový řez je čtverec).

2.29 Najděte nejmenší hodnotu výrazu $V = x^3 + \frac{48}{x^2}$, $x > 0$

Řešení:

Součin sčítanců není konstantní, a tak výraz musíme vhodně upravit:

$$V = x^3 + \frac{48}{x^2} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{16}{x^2} + \frac{16}{x^2} + \frac{16}{x^2}$$

Podle A-G nerovnosti pro $n = 5$ platí:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{x^3}{2}\right)^2 \left(\frac{16}{x^2}\right)^3} \le \frac{V}{5}$$

$$5 \cdot \sqrt[5]{\frac{x^6}{4} \cdot \frac{16^3}{x^6}} \le V$$

$$5 \cdot \sqrt[5]{\frac{16^3}{4}} \le V$$

$20 \leq V$

Výraz nabývá nejmenší hodnoty $V_{\min} = 20$, když

$$\frac{x^3}{2} = \frac{16}{x^2}$$

$$x^5 = 32$$

$$x = 2$$

2.30 Součet několika čísel, jejichž součin je stejný, je nejmenší právě tehdy, pokud jsou tato čísla stejná. Dokažte.

Řešení:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$n \cdot \sqrt[n]{a} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

Označme čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a jejich součin $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = k$. Pak podle A-G nerovnosti pro n je

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$n \cdot \sqrt[n]{k} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Rovnost nastává, je-li $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n$.

Využití metody neurčitých koeficientů při odhadech pomocí A-G nerovnosti

2.31 Najděte největší hodnotu výrazu $V = (24 - x)^3 \cdot (x + 1)^2$, $x \leq 24$

Řešení:

Výraz V obsahuje 5 lineárních nezáporných činitelů, z nichž jsou pouze dva různé. Jejich součet není konstantní, a tak výraz V musíme vhodně vynásobit. Nyní však nevíme jakým číslem, a tak ho vynásobíme nějakým číslem A.

$S = A^3 \cdot V = (24A - AX)^3 \cdot (x + 1)^2$ (nebo $S = A^2 \cdot V = (24 - x)^3 \cdot (AX + A)^2$)

Použijeme A-G nerovnost pro $n = 5$:

$$\sqrt[5]{(24A-AX)^3\cdot(x+1)^2}\le\frac{3(24A-AX)+2(x+1)}{5}=\frac{x(2-3A)+72A+2}{5}$$

Abychom mohli udělat horní odhad, člen $(2-3A)$ u x ve výrazu musí být nulový.

Tedy $2-3A=0$, $A=\frac{2}{3}$.

Dosadíme zpět za A.

$$\sqrt[5]{S}\le\frac{72\cdot\frac{2}{3}+2}{5}=10$$

$$S\le 10^5$$

$$A^3\cdot V\le 10^5$$

$$V\le 10^5\left(\frac{3}{2}\right)^3=2^2\cdot 3^3\cdot 5^5$$

Rovnost nastane právě, když $24A-AX=x+1$, tedy

$$16-\frac{2}{3}x=x+1$$

$$x=9$$

Výraz V nabývá největší hodnoty $V_{\max}=2^2\cdot 3^3\cdot 5^5$ pro $x=9$.

2.32 Určete největší hodnotu výrazu $V=(x-2)(5-x)(x+3)$, $2\le x\le 5$

Řešení:

Výraz V vynásobíme nějakými kladnými koeficienty A,B.

$$A\cdot B\cdot V=A(x-2)\cdot B(5-x)(x+3)$$

Použijeme A-G nerovnost pro $n=3$:

$$\sqrt[3]{A(x-2)\cdot B(5-x)(x+3)}\le\frac{A(x-2)+B(5-x)+(x+3)}{3}$$

$$A\cdot B\cdot V\le\left(\frac{x(A-B+1)-2A+5B+3}{3}\right)^3$$

Abychom mohli odhadnout největší hodnotu, musí být koeficient u x roven nule, tzn. $A-B+1=0$

$$A=B-1$$

Rovnost nastane právě, když $A(x-2)=B(5-x)=x+3$ tedy

$(B-1)(x-2)=B(5-x)=x+3$

Z 1. rovnosti:

$Bx-2B-x+2=5B-Bx$

$x(2B-1)=7B-2$, $B\neq\frac{1}{2}$, tedy mohu dělit výrazem

$$x=\frac{7B-2}{2B-1}$$

Z 2.rovnosti:

$5B-Bx=x+3$

$5B-3=x(1+B)$, $B\neq 1$, tedy mohu dělit výrazem

$$x=\frac{5B-3}{1+B}$$

Obě vyjádření x si musí být rovna:

$\frac{7B-2}{2B-1}=\frac{5B-3}{1+B}$. Po upravení získáme kvadratickou rovnici $3B^2-16B+5=0$, jejíž řešením je

$$B=\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{3}\\ 5\end{array}\right.$$

$$A=B-1=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{2}{3}\\ 4\end{array}\right.$$

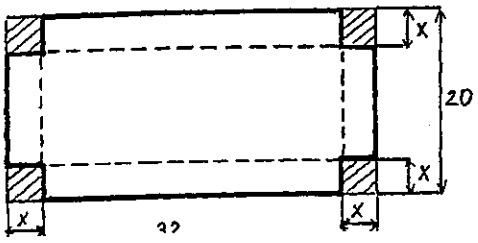
Podmínce $A,B\in R^+$ vyhovuje pouze $A=4$, $B=5$

Po dopočtení je $x=\frac{11}{3}$ a $20V_{\max}=\left(\frac{20}{3}\right)^3$

$$V_{\max}=\frac{400}{27}$$

2.33 Karton má tvar obdélníku o rozměrech 32 *cm* x 20 *cm*. V rozích kartonu máme vystřihnout shodné čtverečky tak, aby po přehnutí zbylých částí vznikla krabička s největším objemem (viz. obr. 22)

Řešení:



obr. 22

Podle obrázku je objem krabičky

$$V = (20-2x)(32-2x)\cdot x$$

$$\frac{V}{4} = (10-x)(16-x)\cdot x$$

Vynásobme výraz koeficienty A,B,C, kde

$$A\cdot B\cdot C = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{V}{4} = A(10-x)\cdot B(16-x)\cdot Cx$$

Podle A-G nerovnosti je:

$$\sqrt[3]{A(10-x)\cdot B(16-x)\cdot Cx} \le \frac{10A+16B+x(C-A-B)}{3}$$

$$A(10-x)\cdot B(16-x)\cdot Cx \le \left(\frac{10A+16B+x(C-A-B)}{3}\right)^3$$

Abychom mohli provést odhad, musí být

$$C-A-B=0 \qquad (2)$$

Rovnost nastane, když $A(10-x)=B(16-x)=Cx$

Ze vztahu (2) vyjádříme C a dosadíme do rovnice:

$$A(10-x)=Cx$$

$A(10-x)=(A+B)x$, odtud $x=\dfrac{10A}{2A+B}$.

Z druhé rovnice $B(16-x)=(A+B)x$ je $x=\dfrac{16B}{A+2B}$

Z rovnice $\dfrac{10A}{2A+B}=\dfrac{16B}{A+2B}$ vypočteme A pomocí B

$$A_1 = 2B,\ A_2 = -\frac{2}{5}B$$

Jelikož $A, B, C \in R^+$, vyhovuje pouze $A_1 = 2B$.

x je po dosazení $\frac{20B}{5B} = 4$.

Ze vztahu (1) vypočteme koeficienty:

$A \cdot B \cdot C = 1$

$2B \cdot B \cdot 3B = 1$

$B^3 = \frac{1}{6}$

$B = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$, $A = 2\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$, $C = 3\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$

Dosazením $x = 4$ do V zjistíme, že $V_{\max} = 1152$.

3. Využití kvadratické funkce

Jednou z možných metod řešení extremálních úloh je využití vlastností grafu grafů kvadratických funkcí z nichž je zřejmé, že mohou nabývat pouze jednoho extrému. Buďto minima nebo maxima. Charakter extrému je určován znaménkem koeficientu kvadratického členu, který určuje polohu paraboly.

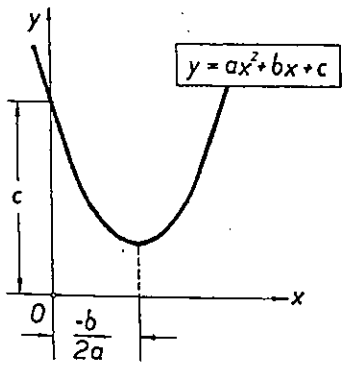
Při řešení úloh budeme vycházet z následující věty, která udává vztah pro největší nebo nejmenší hodnotu kvadratické funkce. Po jejím vyslovení tuto větu odvodíme.

Věta 3.1:

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ nabývá extrémní hodnoty $y_{ext.} = c - \frac{b^2}{4a}$ pro

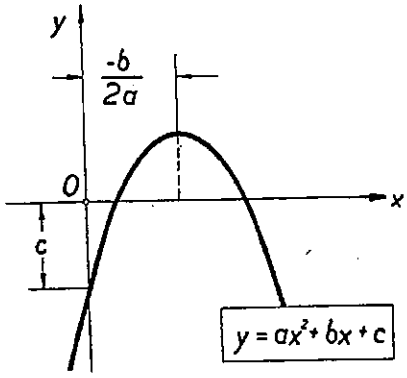
$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}} \qquad (3.1)$$

Tato hodnota je minimem funkce, jestliže $a > 0$ a maximem funkce, jestliže $a < 0$. Existuje-li maximální funkční hodnota, pak minimální funkční hodnota neexistuje a naopak.



obr. 23

$a > 0, b < 0, c > 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$



obr. 24

$a < 0, b > 0, c < 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$

Důkaz:

Důkaz spočívá v upravení funkce y na čtverec.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$c - \frac{b^2}{4a}$ je nějaké stálé číslo nezávislé na hodnotách nezávisle proměnné x.

Rozlišme dva případy:

1. Je-li $a > 0$, pak $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ není nikdy záporný, ale pro $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nabývá nulové hodnoty. Proto proměnná y má nejmenší hodnotu rovnou $y_{min} = y_{min} = c - \frac{b^2}{4a}$ a nemá hodnotu největší (viz. obr. 23)

2. Je-li $a < 0$, pak $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ je vždy záporný, ale pro $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nabývá nulové hodnoty. Funkce y má největší možnou hodnotu rovnou $y_{max} = c - \frac{b^2}{4a}$ a nemá hodnotu nejmenší (viz obr.24)

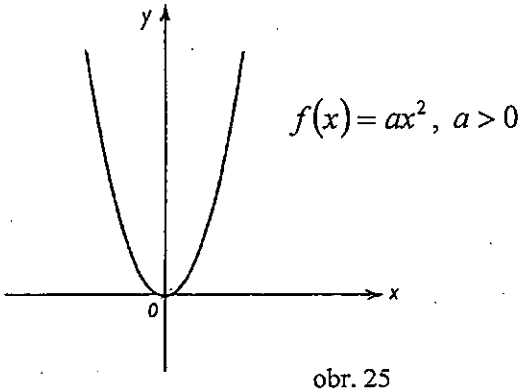
Pozn. 1

Při řešení dále uvedených úloh využívám pro rychlejší průběh výpočtu přímo odvozeného vztahu pro extrém (3.1). Avšak žáci mohou tyto úlohy řešit i úpravami a úvahami z právě uvedeného důkazu čistě algebraicky, tedy bez použití vlastností grafu kvadratické funkce. Je užitečné, když se žáci naučí tento typ úvahy na konkrétních situacích. Vyhneme se tak tendenci memorování vzorců a mechanického dosazování do nich, aniž by došlo k jejich pochopení.

Pozn. 2

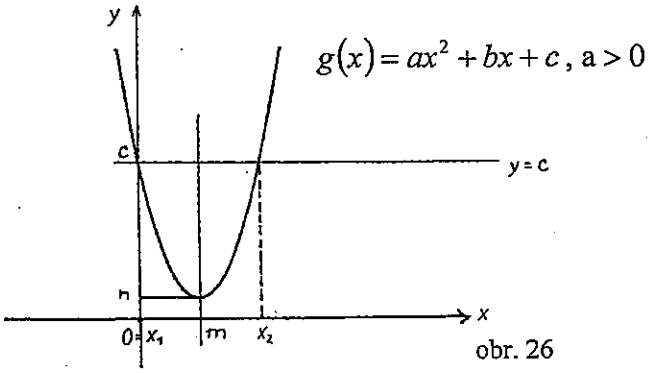
Jiné odvození vztahu (3.1)

Grafem kvadratické funkce $f(x) = ax^2$ je parabola procházející počátkem. Víme, že je souměrná podle osy y, neboť funkce je sudá.



obr. 25

Obecný tvar kvadratické funkce $g(x) = ax^2 + bx + c$, lze zapsat také ve tvaru $g(x) = a(x - m^2) + n$, kde graf této funkce vznikne posunutím funkce $f(x)$



obr. 26

Tento graf je souměrný podle osy o, která prochází bodem m a je rovnoběžná s osou y. V bodě m má funkce extrémální hodnotu n.

Označte x-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou $y = c$. Jejich hodnota x_1 a x_2 je:

$$ax^2 + bx + c = c$$
$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Vzhledem k souměrnosti grafu leží m uprostřed bodů x_1 a x_2. Tedy

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Dospěli jsme tak k závěru, že kvadratická funkce nabývá svého extrému v bodě $-\frac{b}{2a}$.

Úlohy:

3.1 Nalezněte extrém funkce $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

Řešení:

Jelikož je $a = 3$ větší jak nula, funkce nabývá minima v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ tj.

$$x_0 = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2$$

$$f(x)_{\min} = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$$

Funkce nabývá nejmenší hodnoty $y = -4$ v bodě $x = 2$

3.2 Dané kladné číslo A rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

Řešení:

Jeden ze sčítanců označíme x a druhý $A - x$

$$y = x \cdot (A - x)$$

$$y = -x^2 + Ax$$

Tento kvadratický trojčlen nabývá největší hodnoty, neboť koeficient kvadratického členu je záporný. Můžeme stanovit hledané číslo x_0.

První sčítanec $x_0 = -\frac{A}{-2} = \frac{1}{2}A$, druhý je $A - x_0 = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$.

Oba sčítanci jsou si navzájem rovny.

Pozn. Podmínka $A > 0$ nebyla nutná.

3.3 Výkon P turbíny závisí na počtu n obrátek za sekundu. Určete počet obrátek, pro něž bude výkon maximální, víte-li že tento výkon je vyjádřen vztahem

$$P = \alpha n - \beta n^2, \quad \alpha = 0{,}45543\, m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$$

$$\beta = 0{,}0010344\, m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$$

Řešení:

Výkon turbíny P vyjadřuje kvadratickou funkci, která nabývá největší hodnoty,

P_{max} pro $n_0 = \frac{-\alpha}{-2\beta} = \frac{\alpha}{2\beta}$

$$n_0 = \frac{0{,}45543}{0{,}0010344 \cdot 2} \frac{\left[m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}\right]}{\left[m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}\right]}$$

$n_0 = 220 \ s^{-1}$

Výkon turbíny bude největší při 220 obrátkách za sekundu.

3.4 Od půlnoci do sedmé hodiny ranní se teplota ve ^oC měnila tak, že byla kvadratickou funkcí f času v hodinách. Víte, že o půlnoci byla naměřena teplota $2{,}5\,^oC$, ve 4 hodiny $-1{,}5\,^oC$ a v 7 hodin $6\,^oC$. Jaká byla nejnižší teplota a v kolik hodin to bylo?

Řešení:

Rovnici určující funkci f budeme hledat ve tvaru

$f: y = ax^2 + bx + c$

kde y je číselná hodnota teploty ve ^oC a x je číselná hodnota času v hodinách. Ze zadání úlohy plyne:

$f(0) = 2{,}5 \quad f(4) = -1{,}5 \quad f(7) = 6$

Pro neznámé koeficienty a, b, c dostáváme soustavu:

$2{,}5 = c$

$-1{,}5 = 16a + 4b + c$

$6 = 49a + 7b + c$, jejíž řešením je

$a = 0{,}5$, $b = -3$, $c = 2{,}5$

Funkci f pak můžeme zapsat ve tvaru

$f: \ y = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5, \ x \in \langle 0,7 \rangle$

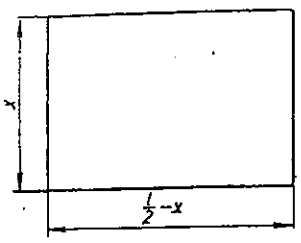
f nabývá nejmenší hodnoty y_0 pro $x_0 = \frac{3}{1} = 3$

Tedy $y_0 = 0{,}5 \cdot 9 - 9 + 2{,}5 = -2$

Nejnižší teplota byla naměřena ve 3 hodiny, kdy rtuť teploměru klesla na -2 $^{\circ}C$.

3.5 Drát délky l je třeba ohnout tak, aby vznikl obdélník největšího možného plošného obsahu.

Řešení:



obr. 27

Obsah obdélníka můžeme zapsat ve tvaru:

$$S = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$S = -x^2 + \frac{l}{2}x$$

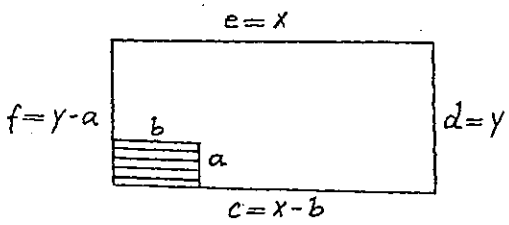
Tato funkce nabude největší hodnoty pro $x_0 = \frac{-\frac{l}{2}}{-2} = \frac{l}{4}$

Druhá strana obdélníka je $\frac{l}{2} - x_0 = \frac{1}{4}$

Drát je třeba třikrát ohnout ve vzdálenosti $\frac{1}{4}l$. Pak vznikne čtverec, který má největší obsah.

3.6 Chceme oplotit výběh pro slepice, který má mít tvar pravoúhelníku. Přitom máme k dispozici 200 m drátěného pletiva a víme, že část plotu budou tvořit stěny drůbežárny, jejíž obdélníkový půdorys má rozměry $a = 16\ m$, $b = 10\ m$. Jaké rozměry musí mít výběh, aby měl co největší obsah?

Řešení:



obr. 28

Označme jednotlivé strany výběhu c, d, e, f (viz obr. 28). Pak pro délku plotu platí:

$$o = 2(x+y) - (a+b)$$

$$200 = 2(x+y) - 26$$

$$\frac{226}{2} = x + y \qquad \text{odtud} \qquad x = 113 - y$$

Pro obsah výběhu dostaneme:

$$S = x \cdot y - ab$$

$$S = x \cdot y - 160$$

$$S = (113 - y)y - 160$$

$$S = -y^2 + 113y - 160$$

Největší obsah nastane:

$$S_{\max} \text{ pro } y_0 = \frac{-113}{-2} = 56{,}5 \ m \text{ a tedy}$$

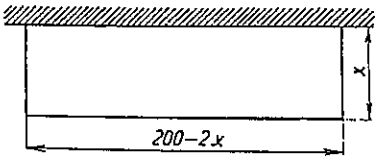
$$x_0 = 113 - 56{,}5$$

$$x_0 = 56{,}5 \ m$$

Aby měl výběh maximální obsah, musí mít tyto rozměry: *c = 46,5 m, d = 56,5 m, e = 56,5 m, f = 40,5 m.*

3.7 Z prken, které jsou k dispozici, se má postavit plot o délce 200 *m*. Tímto plotem je potřeba ohradit dvůr, který má obdélníkový půdorys, tak, aby ohrazená plocha byla co největší, přičemž dvůr na jedné straně zůstane ohraničen zdí.

<u>Řešení:</u>



obr. 29

Obsah dvora je:

$$S = x(200 - 2x)$$

$$S = -2x^2 + 200x$$

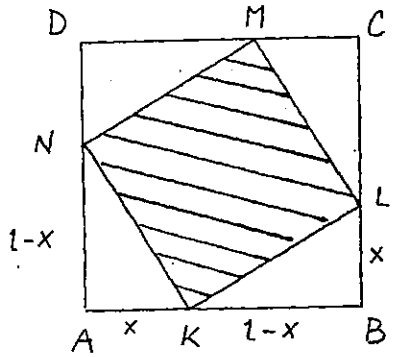
$$x_0 = -\frac{200}{-2 \cdot (2)} = 50 \ m$$

Druhá strana je $200 - 2 \cdot 50 = 100 \ m$

Strana dvora kolmá ke zdi musí být 50 *m* a strana rovnoběžná se zdí 100 *m*.

3.8 Je dán čtverec *ABCD*. Do něho je vepsán čtverec *KLMN*, jehož vrcholy jsou od vrcholů daného čtverce vzdáleny o stejné délky $|AK|$, $|BL|$, $|CM|$, $|DN|$. Pro jakou hodnotu $|AK|$ bude obsah čtverce *KLMN* nejmenší?

Řešení:



obr. 30

Označme vzdálenost $|AK| = x$, $|KB| = l - x$ a $|AB| = l$

Pro velikost *KL* dostáváme z Pythagorovy věty:

$$|KL|^2 = |KB|^2 + |BL|^2$$

$$|KL|^2 = (l-x)^2 + x^2$$

$$|KL|^2 = 2x^2 - 2xl + l^2$$

Obsah čtverce *KLMN* je:

$$S = |KL|^2$$

$$S = 2x^2 - 2xl + l^2$$

Obsah čtverce jsme vyjádřili jako kvadratickou funkci, která nabývá své nejmenší hodnoty v bodě $x_0 = \frac{2l}{4} = \frac{l}{2}$. Tedy $S_{\min} = \frac{l^2}{4}$. Velikost $|AK| = \frac{l}{2}$, $|KB| = \frac{l}{2}$.

Body *K, L, M, N* musíme umístit do středů stran čtverce *ABCD*.

Pozn.

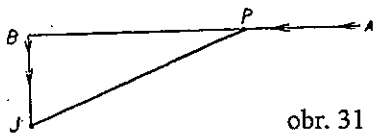
Jiný způsob řešení:

Protože trojúhelníky *BLK, CML, DNM a AKN* jsou shodné a mají stejný obsah, můžeme obsah čtverce KLMN vyjádřit jako $S_{KLMN} = l^2 - 4S_{AKN}$.

Minimum obsahu čtverce KLMN nastane právě, když bude obsah trojúhelníku *AKN* maximální. Trojúhelník *AKN* je pravoúhlý s odvěsnami délek x, $l - x$, tzn. že jeho obsah je $S_{AKN} = \frac{x(l-x)}{2}$. To vede k nalezení maxima funkce $y = x \cdot (l - x) = -x^2 + lx$, které nastává pro $x_0 = \frac{l}{2}$

3.9 Z míst A a B vyjedou současně parník a jachta ve směrech určených šipkami. Jejich rychlosti jsou $v_p = 40$ *km/hod*, $v_j = 16$ *km/hod*. Za jak dlouho bude jejich vzájemná vzdálenost nejmenší, jestliže $|AB| = 145$ *km*?

Řešení:



obr. 31

Označíme polohu parníku a jachty po t hodinách po odjezdu z míst A a B písmeny P a J. Pak

$|AP| = 40 \cdot t$ *km*

$|BJ| = 16 \cdot t$ *km*

Trojúhelník BPJ je pravoúhlý a z Pythagorovy věty plyne:

$$|PJ| = \sqrt{|BP|^2 + |BJ|^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2}$$

$$|PJ| = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}$$

Tato odmocnina nabude nejmenší hodnoty při témže t, při němž bude mít výraz pod odmocninou nejmenší hodnotu.

$|PJ|^2 = 1856t^2 - 11600t + 21025$, $|PJ|_{\min}$ pro

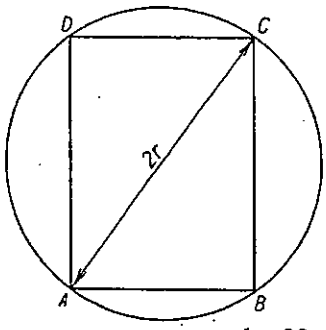
$$t = \frac{-11600}{2 \cdot 1856} = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8} \text{ hod} = 3 \textit{ hod } 7 \textit{ min } 30 \textit{ s}$$

$$|PJ|_{\min} = 54 \textit{ km}$$

Parník a jachta budou mít nejmenší vzdálenost za 3 *hod* 7 *min* 30 *s* po odjezdu z míst A a B.

3.10 Do dané kružnice vepište pravoúhelník největšího obsahu.

Řešení:



obr. 32

Označme poloměr kružnice r a délku strany hledaného pravoúhelníka $|AB| = x$. Druhá strana BC má podle Pythagorovy věty délku:

$$|BC| = \sqrt{(2r)^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

Obsah pravoúhelníku vyjádříme jako:

$$S = |AB| \cdot |BC|$$

$$S = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}$$

Tato funkce nabývá své největší hodnoty při témže x jako funkce

$$y = S^2$$

$$y = x^2 \cdot \left(4r^2 - x^2\right)$$

Abychom dostali kvadratickou funkci položíme $x^2 = z$.

$y = z\left(4r^2 - z\right) = -z^2 + 4r^2 z$, funkce nabývá maxima:

$y_{\max}$ pro $z = \dfrac{4r^2}{2} = 2r^2$

Pak je $x^2 = 2r^2$

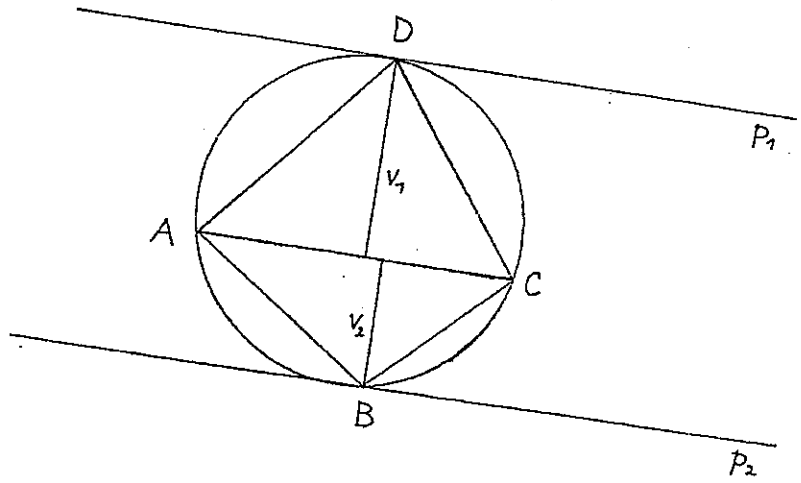
$x = r\sqrt{2}$ a

$$|BC| = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r \cdot \sqrt{2}$$

Hledaný pravoúhelník je čtverec o straně $r \cdot \sqrt{2}$.

Pozn.:

Řešme obecnější úlohu: do kružnice vepsat čtyřúhelník maximálního obsahu.



obr. 33

Čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme na dva trojúhelníky úhlopříčkou AC a body B, D proložíme rovnoběžky s touto úhlopříčkou. Pak obsah čtyřúhelníka je součet obsahů těchto dvou trojúhelníků:

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot v_1 + \frac{1}{2}|AC| \cdot v_2 = \frac{1}{2}|AC| \cdot (v_1 + v_2).$$

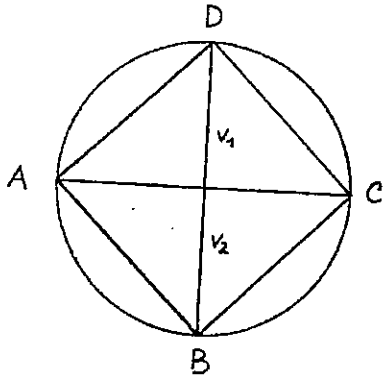
AC je tětivou kružnice, proto nemůže být větší než průměr kružnice. Tzn. $|AC| \leq 2r$ a $v_1 + v_2$ je vzdálenost rovnoběžek p_1, p_2, která také nemůže být větší jak průměr.

$$v_1 + v_2 = |p_1 p_2| \leq 2r$$

Po dosazení těchto hodnot je

$$S \leq \frac{1}{2} 2r \cdot 2r = 2r^2$$

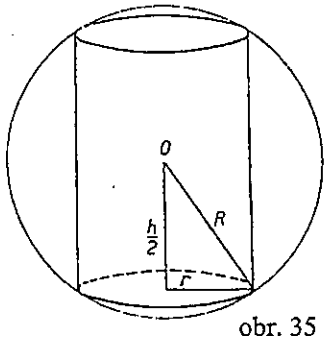
Největší S je $2r^2$. Zbývá ukázat, že jde o čtverec. Protože je $|AC| = 2r$ a $(v_1 + v_2) = 2r$, musí procházet středem a navíc výšky jsou kolmé k AC. Tyto vlastnosti mají jen úhlopříčky ve čtverci (viz obr. 34) Strana takového čtverce je pak $r \cdot \sqrt{2}$.



obr. 34

3.11 Do dané koule vepište válec o největším plášti.

Řešení:



obr. 35

Označíme poloměr koule R, hledaný poloměr základny válce r a jeho výšku h. Pak pro obsah pláště platí:

$S = 2\pi r \cdot h$, přičemž výšku h vyjádříme z Pythagorovy věty a dosadíme do vzorce.

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$S = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}$, jelikož S dosahuje stejné největší hodnoty jako S^2, celý výraz umocníme a položíme $r^2 = z$.

$$S^2 = 4\pi^2 r^2 \cdot \left(4R^2 - 4r^2\right)$$

$S^2 = -16\pi^2 z^2 + 16\pi^2 R^2 z$. Tato kvadratická funkce nabývá maxima pro

$z = \dfrac{16\pi^2 R^2}{2 \cdot 16\pi^2} = \dfrac{R^2}{2}$, a tak

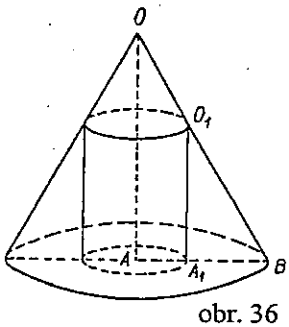
$$r^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$r=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\cdot\sqrt{2}}{2} \text{ a } h=2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}=2\sqrt{\frac{R^2}{2}}=2\sqrt{\frac{R^2}{2}}=R\cdot\sqrt{2}$$

Hledaný válec má poloměr $\frac{R\cdot\sqrt{2}}{2}$ a výšku $R\sqrt{2}$. Osovým řezem tohoto válce je čtverec.

3.12 Do rotačního kužele vepište válec o největším plášti.

Řešení:



obr. 36

Označíme daný poloměr základny kužele R a výšku kužele H; r a h poloměr a výšku hledaného válce. Pak pro obsah pláště můžeme napsat:

$S_{pl}=2\pi r\cdot h$.

Dále je zřejmé že:

$\Delta\, ABO \sim \Delta\, A_1BO_1$ podle věty o podobnosti trojúhelníků *uu*.

Tedy:

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$$

$h=\frac{H(R-r)}{R}$, h dosadíme do vzorce pro S_{pl}

$$S_{pl}=2\pi r\cdot\frac{H}{R}(R-r)$$

$S_{pl}=2\pi Hr-2\pi\frac{H}{R}r^2$. Dospěli jsme ke kvadratické funkci, jejíž maximum je v bodě

$$r_0=\frac{2\pi H}{4\pi\frac{H}{R}}=\frac{2\pi HR}{4\pi H}=\frac{R}{2}$$

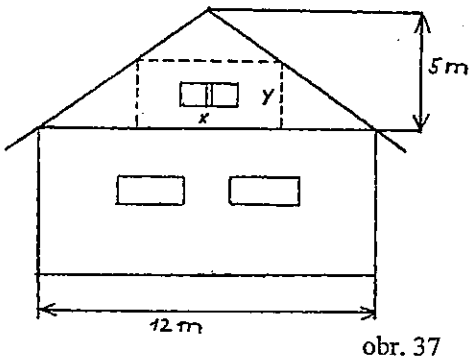
po dopočtení h je

$$h_0=\frac{H}{R}\left(R-\frac{R}{2}\right)=\frac{H}{R}\cdot\frac{R}{2}=\frac{H}{2}.$$

Do rotačního kužele vepíšeme válec o výšce $\frac{H}{2}$ a poloměru $\frac{R}{2}$.

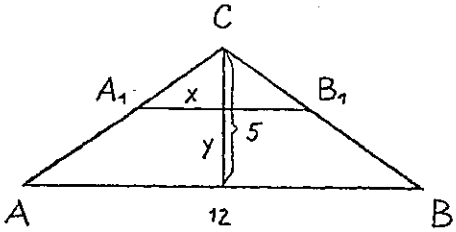
3.13 Tím jak člověk stárne, přibývá členů rodiny a nejednou člověk zjistí, že jeho byt je malý a děti nemají kde bydlet. A tak se hledají různé varianty. Růžičkovi staví dům, Opršálkovi přistavovali a Novákovi se rozhodli pro zřízení podkrovního bytu na půdě. Jaké rozměry bude mít podkroví, má-li být co největší a střecha domu má na průřezu tvar trojúhelníku (viz obr. 37).

Řešení:



obr. 37

Označíme-li rozměry podkroví x a y, pak obsah podkroví na průřezu je $S = x \cdot y$.



obr. 38

Z podobnosti trojúhelníků na obr. 38 plyne:

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{5-y}$$

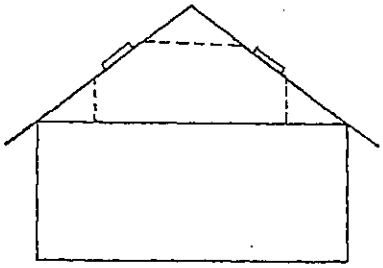
$$x = \frac{12(5-y)}{5}$$

Po dosazení x do S je $S = -\frac{12}{5}y^2 + 12y$. Tato kvadratická funkce nabývá své největší hodnoty v bodě $y_0 = \frac{12}{\frac{2 \cdot 12}{5}} = \frac{5}{2}$ a pro x_0 dostaneme $x_0 = 6$.

Podkroví bude mít rozměry 6 *m* a na výšku 2,5 *m*.

Pozn.

Ve skutečnosti naše řešení není optimální, neboť při využití střešních oken, bude podkroví mnohem větší (obr. 39).


obr. 39

3.14 Lakomý zaměstnavatel měl zaplatit dvěma svým zaměstnancům mzdu. Dohromady měl na oba platy vymezeno 16 tisíc Kč. Ačkoliv si jeho firma nestála moc dobře, řekl, že když počkají s vyplacením mzdy jeden rok, dostanou po roce každý svou mzdu ve druhé mocnině. Jak původně rozdělil peníze mezi oba zaměstnance, aby za rok přišel o co nejméně?

Řešení:

celkem	16 000 Kč
1. zaměstnanec.....	x Kč
2. zaměstnanec.....	$16\,000 - x$ Kč

Hledáme minimum funkce $f(x) = (16000 - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 32000 + 256000000$, které nastává v bodě $x_0 = 8000$. Pro druhého zaměstnance dostáváme $16000 - 8000 = 8000$.

Zaměstnavatel rozdělil peníze mezi oba zaměstnance na polovinu, tzn. že každý měl původně dostat 8 000 Kč.

3.15 Při které hodnotě parametru m je součet čtverců kořenů kvadratické rovnice $x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0$ nejmenší?

Řešení:

Jsou-li x_1, x_2 kořeny této rovnice, pak platí:

$x_1 + x_2 = m - 2$

$x_1 x_2 = -(m+1)$

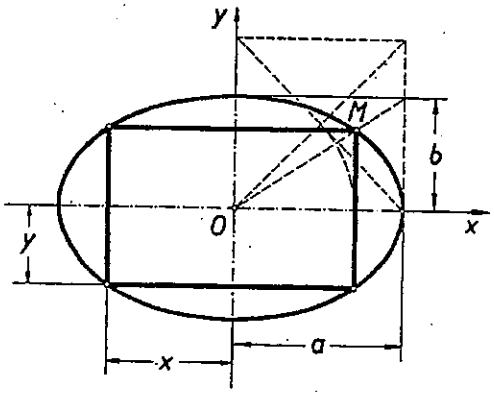
Hledáme minimum součtu $x_1^2 + x_2^2$, což lze zapsat jako $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m-2)^2 + 2(m+1) = m^2 - 2m + 6$.

Minimum nastává pro $m_0 = \frac{2}{2} = 1$.

Součet čtverců kořenů je minimální, když $m = 1$.

3.16 Do elipsy o daných poloosách a, b vepište obdélník maximálního obsahu. Jaké jsou jeho rozměry?

Řešení:



obr. 40

Bod M má souřadnici $[x, y]$, $o < x < a$, $o < y < b$, a protože leží na elipse, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnice elipsy.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, odtud $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ .Pro obsah obdélníka platí

$S = 4xy$, tedy

$S = 4x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Funkce S nabývá maximální hodnoty při témž x_0 jako funkce S^2.

$S^2 = 16x^2b^2 - 16x^4\frac{b^2}{a^2}$. Jelikož se nám x vyskytuje ve čtvrté mocnině, zavedeme substituci $z = x^2$.

$S^2 = -16\frac{b^2}{a^2}z^2 + 16b^2z$

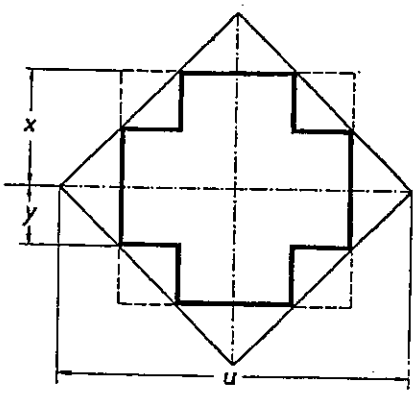
Maximum nastane pro $z_0 = -\frac{16b^2}{-2 \cdot 16\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2}$. Tedy $x_0 = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$ a $y_0 = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$.

$S_{max} = 2ab$

Rozměry obdélníku vepsaného do elipsy jsou $a \cdot \sqrt{2}$ a $b \cdot \sqrt{2}$.

3.17 Do čtverce o dané úhlopříčce u vepište obrazec tvaru kříže složeného ze dvou stejně širokých pruhů, souměrných podle úhlopříček tak, aby plošný obsah kříže byl největší.

Řešení:



obr. 41

Podle obr. 41 je obsah kříže

$S = 4x^2 - 4(x-y)^2$, kde

$y = \frac{u}{2} - x$. Po dosazení je

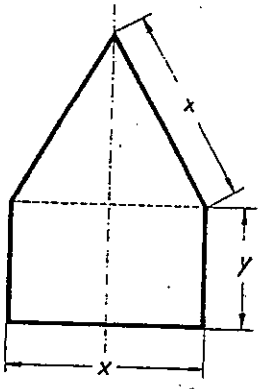
$S = -12x^2 + 8ux - u^2$, přičemž největší hodnota S_{max} nastává pro $x_0 = -\frac{8u}{-24} = \frac{u}{3}$,

$y = \frac{u}{2} - \frac{u}{3} = \frac{u}{6}$ a $S_{\max} = \frac{1}{3}u^2$.

Kříž vypíšeme do čtverce tak, aby vrcholy kříže ležely vždy ve třetinách strany (viz obr. 41).

3.18 Obrazec skládající se z obdélníka o rozměrech x,y a rovnostranného trojúhelníka o délce stran x má předepsaný obvod l. Určete rozměry obrazce tak, aby jeho plošný obsah byl maximální.

Řešení:



obr. 42

Z obvodu obrazce $O = 3x + 2y = l$ vyjádříme neznámou y:

$y = \frac{l - 3x}{2}$

Obsah obrazce zapíšeme jako:

$S = xy + \frac{x \cdot v}{2}$, kde $v = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Tedy

$S = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ a po dosazení za y a úpravě

$S = \frac{\left(-6 + \sqrt{3}\right)x^2}{4} + \frac{l}{2}x$.

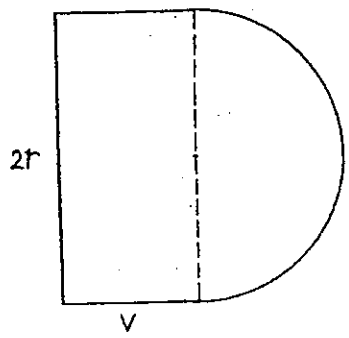
S nabývá největší hodnoty S_{max} pro $x_0 = -\frac{\frac{l}{2}}{\frac{\left(-6+\sqrt{3}\right)}{2}} = \frac{l}{6-\sqrt{3}}$

Po dopočtení je $y_0 = \dfrac{l - \dfrac{3l}{6-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{l\left(5-\sqrt{3}\right)}{22}$, a tedy $S_{\max} = \dfrac{l^2}{4\left(6-\sqrt{3}\right)}$.

Rozměry tohoto obrazce jsou $x = \dfrac{l}{6-\sqrt{3}}$ a $y = \dfrac{l\left(5-\sqrt{3}\right)}{22}$.

3.19 Na obrázku je půdorys divadelního jeviště, které je sjednocením obdélníku a půlkruhu. Obvod půdorysu jeviště je 40 m. Určete rozměry půdorysu, víte-li, že byly stanoveny tak, aby obsah půdorysu jeviště byl největší.

Řešení:



obr. 43

Ze vzorce pro obvod jeviště vyjádříme neznámou v.

$O = 2r + 2v + \pi r$

$40 = r(2+\pi) + 2v$

$v = 20 - \dfrac{r}{2}(2+\pi) = 20 - r - \dfrac{\pi r}{2}$

Obsah jeviště je

$S = 2r \cdot v + \dfrac{\pi r^2}{2}$ a po dosazení za v

$S = 2r \cdot \left(20 - r - \dfrac{\pi r}{2}\right) + \dfrac{\pi r^2}{2} = 40r - 2r^2 - \pi r^2 + \dfrac{\pi r^2}{2} = -\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)r^2 + 40r$. Obsah S jsme vyjádřili jako kvadratickou funkci s neznámou r, která nabývá své největší hodnoty pro $r_0 = 5{,}6\ m$

Zpětným dosazením r_0 do vztahu pro v dostáváme

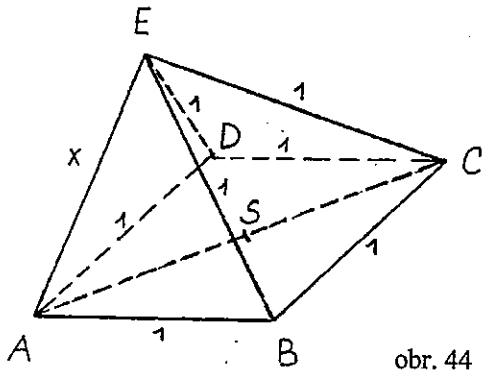
$v_0 = 20 - 5{,}6 - \dfrac{5{,}6\pi}{2} = 5{,}6$

$v_0 = 5{,}6\ m$

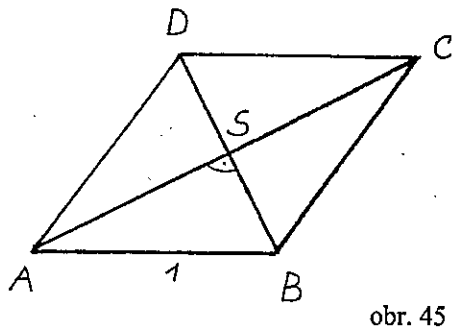
Poloměr půlkruhu čili polovina delší strany obdélníku má být 5,6 m a kratší strana obdélníku také 5,6 m.

3.20 Jedna pobočná hrana čtyřbokého jehlanu má délku x, všechny ostatní jeho hrany mají délku 1. Vyjádřete objem jehlanu jako funkci proměnné x a určete, pro které x je objem co největší.

Řešení:

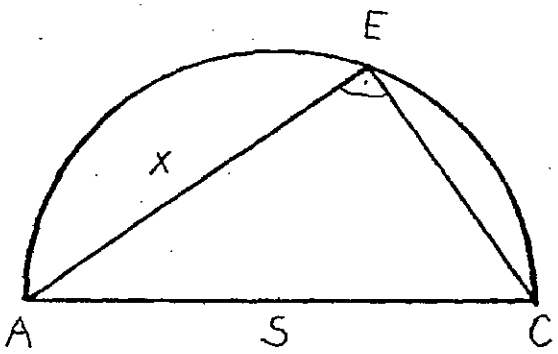


obr. 44



obr. 45

Podstava jehlanu $ABCDE$ je rovnostranný čtyřúhelník se stranami délky 1. Nechť $AE = x$ a ostatní hrany mají délku 1 a S je průsečík úhlopříček AC a BD. Poněvadž $AB = EB = CD = 1 = AD$, jsou trojúhelníky BDC, BDE a BDA rovnoramenné a shodné. Pro jejich těžnice z vrcholů C,E,A tedy platí $|CS| = |ES| = |AS|$, a proto leží body A,E,C na kružnici se středem S. Vrchol E tedy leží na Thaletově kružnici, a trojúhelník ACE je pravoúhlý (obr. 46).



obr. 46

Přepona $AC = \sqrt{1+x^2}$. Trojúhelník ASB je také pravoúhlý (obr. 46), takže délku odvěsny SB dostaneme opět podle Pythagorovy věty

$$|SB| = \sqrt{|AB|^2 - |AS|^2}$$

$$|SB| = \sqrt{1 - \frac{1+x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$$

Jehlan $ABCDE$ si můžeme představit složený ze dvou shodných trojbokých jehlanů $ABCE$ a $ADCE$, se společnou podstavou ACE a výškou SB resp. SD. Pro objem jehlanu $ABCDE$ dostáváme:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ACE} \cdot |SB|$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6} x\sqrt{3 - x^2}\ .$$

Objem V bude maximální právě tehdy, bude-li maximální $36V^2$.

$$36V^2 = x^2\left(3 - x^2\right) = 3x^2 - x^4$$

Zavedeme substituci $y = x^2$:

$$36V^2 = 3y - y^2$$

Hledáme extrém kvadratické funkce $f(y) = -y^2 + 3y$. Ta nabývá extrému v bodě

$$y_0 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Zpětným dosazením do substituce dostáváme:

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

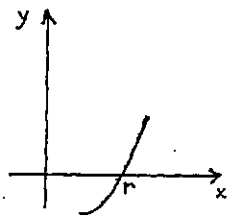
objem je pak $V_{\max} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ \text{cm}^3$.

Jehlan má maximální objem je-li $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ cm.

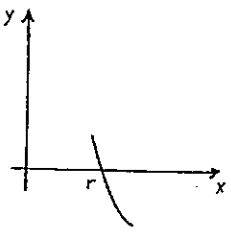
4. Extrémy kubické funkce

V této kapitole si ukážeme elementární metodu vyšetřování lokálních extrémů kubické funkce, která byla popsána v časopise Kvant [11]. Budeme předpokládat, že kubická funkce je spojitá stejně jako všechny polynomické funkce. Tzn. že se její graf nikde „netrhá„. Nulovým bodem funkce $f(x)$ nazveme takové číslo r, pro které platí $f(r)=0$.

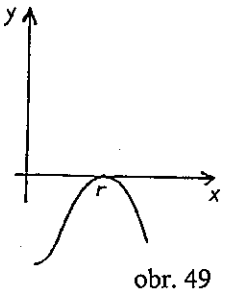
Na obrázku jsou znázorněny čtyři situace, které mohou nastat pro spojitou funkci f v okolí nulového bodu r.



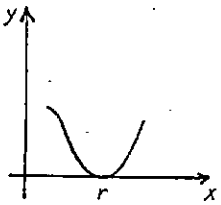
obr. 47



obr. 48



obr. 49



obr. 50

Na prvních dvou obrázcích mění funkce f při přechodu přes r svou hodnotu z kladné na zápornou (obr. 48) nebo ze záporné na kladnou (obr.47). (Pozn. dále už jen mění znaménko). Na druhých dvou je její znaménko v dostatečně malém okolí bodu r pořád stejné pro všechna x z tohoto okolí s výjimkou bodu r, neboť $f(r)=0$.

Na obr. 49 má funkce v čísle r lokální maximum, na obr. 50 lokální minimum.

Uvažujme kubickou funkci $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ a její nulový bod r. Pak platí

$h(x)=h(x)-h(r)=a(x^3-r^3)+b(x^2-r^2)+c(x-r)$.

Po úpravě prvních dvou výrazů podle vzorců dostáváme

$h(x)=a(x-r)(x^2+xr+r^2)+b(x-r)(x+r)+c(x-r)$ a po vytknutí $a(x-r)$

$h(x)=a(x-r)\left[x^2+x\left(\frac{b}{a}+r\right)+\left(r^2+\frac{b}{a}r+\frac{c}{a}\right)\right]$. Označme $\left(\frac{b}{a}+r\right)$ jako p a $\left(r^2+\frac{b}{a}r+\frac{c}{a}\right)$ jako q, pak $h(x)=a(x-r)(x^2+px+q)$. Označme výraz x^2+px+q jako funkci g a rozlišme tyto situace:

1) číslo r není nulovým bodem funkce g ($g(r) \neq 0$). Pak při přechodu přes r funkce $g(x)$ nemění své znaménko v dostatečně malém okolí bodu r. Avšak výraz $(x-r)$ mění znaménko v tomto okolí při přechodu přes r, a tedy i funkce $h(x)$ mění znaménko.

2) Číslo r je dvojnásobným nulovým bodem funkce g. Pak lze $g(x)$ napsat jako $g(x)=(x-r)(x-r)$ a $h(x)=a(x-r)^3$. V dostatečně malém okolí čísla r nemění $g(x)$ své znaménko, ale výraz $(x-r)$ ano, a tedy i $h(x)$ mění své znaménko.

3) Platí $g(x)=(x-r)(x-s)$ kde $s \neq r$. Funkce h je pak $h(x)=a(x-r)^2(x-s)$. V dostatečně malém okolí čísla r nemění výraz $(x-s)$ své znaménko a výraz $a(x-r)^2$ také ne, a tak ani funkce h nemění své znaménko při přechodu přes r.

Tím jsme dospěli k závěru, že kubická funkce má lokální extrém ve svém nulovém bodě r, je-li r dvojnásobný, tzn. můžeme-li napsat funkci ve tvaru $a(x-r)^2(x-s)$. Jiná situace již zřejmě nenastává.

Věta 4.1:

1) Kubická funkce $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ kde $a,b,c,d \in R$; $a \neq 0$ má extrém m v bodě r právě tehdy, když existuje takové číslo s, tj. že platí

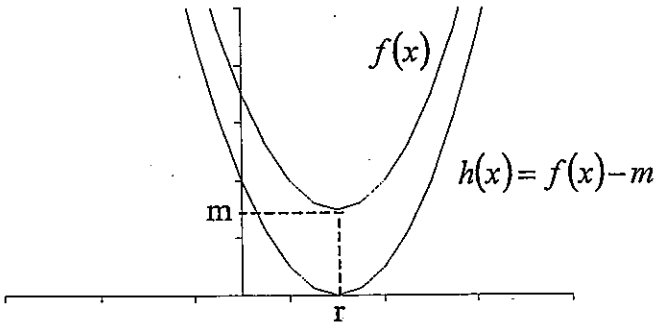
$$\boxed{f(x)-m=a(x-r)^2(x-s)} \tag{4.1}$$

2) Je-li navíc $a(r-s)<0$ (4.2), má funkce f v bodě r maximum. Je-li $a(r-s)>0$ (4.3), má funkce f v bodě r minimum.

Důkaz:

Nechť má $f(x)$ v čísle r lokální extrém $f(r)=m$ (např. podle obr. 51). To nastane právě tehdy, když bude mít funkce $h(x)=f(x)-m$ lokální extrém ve svém nulovém bodě r. Podle předchozích úvah to nastane právě, když existuje

číslo s takové, že $h(x)=a(x-r^2)(x-s)$. Výraz $(x-s)$ nemění v dostatečně malém okolí čísla r (včetně r) své znaménko. Proto je $h(x)$ v tomto okolí (s výjimkou čísla r) kladná právě, když $a(x-s)>0$ a podle obr. 51 nastává v r lokální minimum pro $h(x)$ a tedy pro posunutou funkci $f(x)$. Podobně lokální maximum nastane právě, když $a(x-s)<0$.



obr. 51

Úlohy:

4.1 Součet dvou čísel je 12. Najděte tato čísla, jsou-li obě kladná a součin jednoho s druhou mocninou druhého je maximální.

Řešení:

Označme jedno číslo x a druhé y. Pak má platit $x+y=12$ a $x\cdot y^2$ má být maximální. Číslo x vyjádříme pomocí y : $x=12-y$ a dosadíme do vztahu $x\cdot y^2$

$(12-y)\cdot y^2=-y^3+12y^2$.

Hledáme lokální extrém kubické funkce $f(y)=-y^3+12y^2$, který podle věty 4.1 nastává, když:

$-y^3+12y^2-m=-y^3+(2r+s)y^2-(2rs+r^2)y+r^2s$. Rovnost nastává pouze, když

$12=2r+s$

$0=2rs+r^2$

$-m=r^2s$

Řešením soustavy dostaneme:

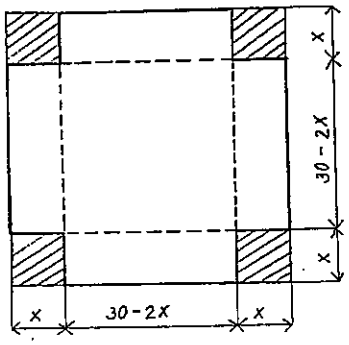
a) $r=8$, $s=-4$

b) $r=0$, $s=12$

Podle (4.2) funkce nabývá lokálního maxima pro $y=8$, neboť $(-1)\cdot(8+4)=-12<0$. Pro $x=0$ nabývá lokálního minima. Hledaná čísla tedy jsou 8 a 4.

4.2 Loupežníci vyloupili královskou truhlu plnou zlaťáků. Při rozdělování se strhla hádka o to, kdo si kolik vezme. Nejstarší loupežník zvaný Lotrando Hrozný musel zakročit. Řekl: „Každý si odnese tolik, kolik si zaslouží a nejchytřejšímu náleží nejvíce“, přičemž dal každému papírový karton tvaru čtverce o straně 30 *cm* a lepící pásku s tím, že v rozích kartonu vyříznou shodné čtverce, zbytek přehnou a slepí do krabice tvaru kvádru, ve které si budou moci odnést své zlaťáky. Netřeba říkat, že si někteří neodnesli vůbec nic, neboť karton rozstříhali tak, že jim nic nezbylo. Jaké rozměry měla mít krabice, aby se do ní vešlo co nejvíce?

Řešení:



obr. 52

V rozích kartonu vystřihneme čtverečky. Je-li délka strany tohoto čtverečku x, je objem krabice $V=(30-2x)^2\cdot x=4x^3-120x^2+900x$. Tento objem má být největší podle věty 4.1 , když $4x^3-120x^2+900x-m=4(x-r)^2(x-s)$

$$4x^3-120x^2+900x-m=4x^3-4(2r+s)x^2+4(2rs+r^2)x-4r^2s.$$

Rovnost těchto dvou výrazů nastane, když si koeficienty u stejných mocnin proměnné x budou rovny:

$120=4(2r+s)$

$900=4(2rs+r^2)$

$\underline{m=4r^2s}$

Řešením soustavy je:

$r=5$, $s=20$ a $r=15$, $s=0$

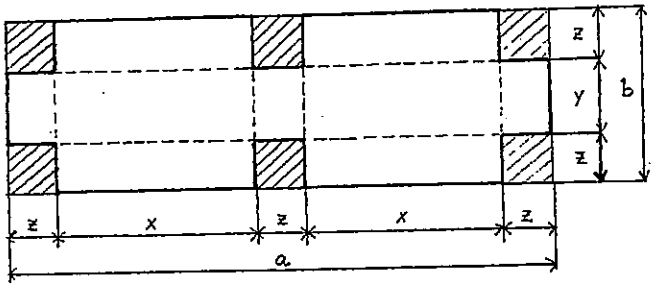
Poněvadž má platit $0<x<15$ je jediným řešením $r=5$, $s=20$

Podmínka (4.2.) je splněna, tudíž maximum funkce je v bodě $x=5$. Tzn. že vystříhlý čtvereček musí mít velikost 5 x 5 *cm*, aby objem vzniklé krabice byl největší.

Krabice bude o rozměrech 20 *cm* x 20 *cm* x 5 *cm*. Objem tedy bude 2 000 cm^3.

4.3 Z tuhého papíru délky $a = 40$ *cm* a šířky $b = 10$ *cm* má být zhotovena krabice (tvaru kvádru) s překrytím na třech stěnách. Síť krabice je znázorněna na obrázku. Určete rozměry krabice x,y,z tak, aby její objem byl co největší.

Řešení:



obr. 53

Pro objem platí:

$V = x \cdot y \cdot z$

z obr. 53 pro x a y vyplývá:

$x = \frac{1}{2}(40 - 3z)$

$y = 10 - 2z$

tedy $V = \frac{1}{2}(40 - 3z)(10 - 2z) \cdot z$

$V = 3z^3 - 55z^2 + 200z$

Lokální extrém nastává v čísle z = r, platí-li:

$3z^3 - 55z^2 + 200z - m = 3z^3 - 3(2r + s)z^2 + 3(2rs + r^2)z - 3r^2 s$. Rovnost nastává, jsou-li koeficienty u různých mocnin proměnné z stejné:

$55 = 3(2r + s)$

$200 = 3(2rs + r^2)$

$\underline{m = 3r^2 s}$

Po vyřešení soustavy vyjde $r = 10$, $s = -\frac{5}{3}$ a $r = \frac{20}{9}$, $s = \frac{125}{9}$

Kořen $r = 10$ nemá smysl. Pro $r = \frac{20}{9}$ a $s = \frac{125}{9}$ je $3(r - s) < 0$ a funkce má lokální maximum. Dopočtením ostatních rozměrů vyjde:

$$x = \frac{50}{3}\ cm = 16{,}7\ cm$$

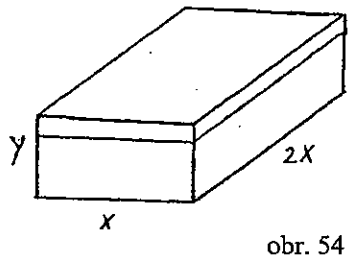
$$y = \frac{50}{9}\ cm = 5{,}6\ cm$$

$$z = \frac{20}{9}\ cm = 2{,}2\ cm$$

Krabice má dno o rozměrech 16,7 *cm* a 5,6 *cm* a je vysoká 2,2 *cm*.

4.4 Krabice tvaru kvádru má dvakrát větší délku než šířku a povrch (včetně dna a víka, pokud nepočítáme přesah) 108 cm^2. Jaký je její největší možný objem?

<u>Řešení:</u>



obr. 54

Pro povrch kvádru platí:

$$S = 4x^2 + 6xy$$

$$y = \frac{108 - 4x^2}{6x}$$

Pro objem kvádru platí:

$$V = 2x^2 \cdot y$$

po dosazení za y $V = -\frac{4}{3}x^2 + 36x$.

V souladu s větou 4.1 máme najít čísla r, s, m tak, aby platilo:

$$-\frac{4}{3}x^3 + 36x - m = -\frac{4}{3}(x - r)^2(x - s).$$

Po roznásobení $-\frac{4}{3}x^3 + 36x - m = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}(2r + s)x^2 - \frac{4}{3}(2rs + r^2)x + \frac{4}{3}r^2 s$

Rovnost nastává pouze, platí-li:

$$36 = -\frac{4}{3}(2rs + r^2)$$

$$0 = \frac{4}{3}(2r + s)$$

$$-m = \frac{4}{3}r^2 s$$

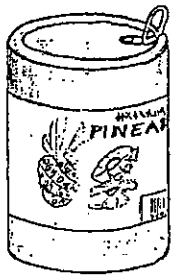
Za podmínky $r > 0$ vyhovuje soustavě jen $r = 3$, $s = -6$

Funkce má lokální maximum pro $x = 3$, neboť podle 4.2 musí být $-\frac{4}{3}(3+6) < 0$.

Největší možný objem je 72 cm^3 při rozměrech 3 cm x 6 cm x 4 cm.

4.5 Na konzervu tvaru válce se má spotřebovat $5dm^2$ bílého potravinářského plechu. Jaké má mít konzerva rozměry, aby měla maximální objem?

Řešení:



obr. 55

Pro povrch válce platí: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot v = 5$.

Výšku v vyjádříme jako $v = \frac{5 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{5}{2\pi r} - r$ a dosadíme do vzorce pro objem válce

$V = \pi r^2 \cdot v$

$$V = \pi r^2 \cdot \left(\frac{5}{2\pi r} - r\right) = -\pi r^3 + \frac{5}{2}r$$

Podle věty 4.1 hledejme čísla m, t, s taková, aby platilo:

$-\pi r^3 + \frac{5}{2}r - m = -\pi(r-t)^2(r-s)$.Rovnost nastává pouze, mají-li oba polynomy stejné koeficienty u stejných mocnin proměnné r, tedy

$$0 = \pi(2t + s)$$

$$\frac{5}{2} = -\pi(2ts + t^2)$$

$$-m = \pi\, t^2 s$$

Vyřešením soustavy vyjde:

$t = \pm\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$ a $s = \pm 2\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$.

Maximum nastane pro $t=\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$, neboť $-\pi\left(\sqrt{\frac{5}{6\pi}}+2\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\right)<0$.

Poloměr r je tedy $\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$ dm a zbývá dopočítat výšku v:

$$v=\frac{5}{2\pi r}-r=\frac{5}{2\pi\sqrt{\frac{5}{6\pi}}}-\sqrt{\frac{5}{6\pi}}=2\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\,(dm)$$

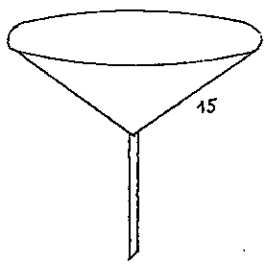
Konzerva o maximálním objemu by měla mít $r=\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$ dm = 5 cm a

$$v=\frac{5}{3\pi\sqrt{\frac{5}{6\pi}}}\,dm=10\,cm$$

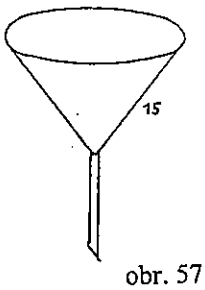
Osový řez válce bude čtverec.

4.6 "Tatínek poslal Pepíčka do obchodu, aby koupil trychtýř s největším objemem. Pepíček prohlédl všechny trychtýře, které byly v regálu, ale u žádného nenalezl označení objemu. Jediné co zjistil bylo, že všechny mají stranu délky 15 *cm*. Přesto domů přinesl ten správný, aniž by počítal objemy všech trychtýřů a měřil poloměry a výšky. Určete jaký poloměr a jakou výšku má kužel maximálního objemu se stranou 15 *cm*.

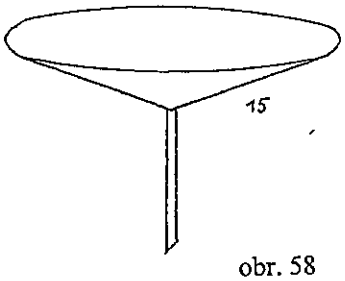
<u>Řešení:</u>



obr. 56



obr. 57



obr. 58

Pro objem kužele dostáváme: $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot v$.

Z pravoúhlého trojúhelníku plyne $15^2=r^2+v^2$, $r^2=15^2-v^2$

Po dosazení $V=\frac{1}{3}\pi\left(15^2-v^2\right)\cdot v=\frac{1}{3}\pi\left(-v^3+15^2v\right)$.

Hledáme maximum funkce $f(v) = -v^3 + 15^2 v$. Ta nabývá extrému v čísle t právě tehdy, když

$-v^3 + 15^2 v - m = -v^3 + (2t+s)v^2 - (2ts + t^2)v + t^2 s$, a to je pouze, když

$0 = 2t + s$

$15^2 = -(2ts + t^2)$

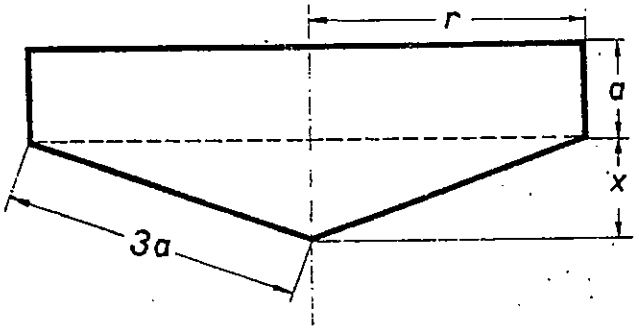
$-m = t^2 s$

Po vyřešení soustavy dostaneme $t = 5\sqrt{3}$, $s = -10\sqrt{3}$, neboť kořen $t = -5\sqrt{3}$ nevyhovuje podmínce kladných rozměrů kužele.

Maximum funkce je pro $v = 5\sqrt{3}$ *cm* a $r = 5\sqrt{6}$ *cm* = 12,2 *cm*. Kužel se stranou 15 *cm* má největší objem, je-li r = 12,2 *cm* a v = 8,7 *cm*.

4.7 Nádrž na vodárenské věži se skládá ze svislého kruhového válce o dané výšce *a*, dole ukončeného kuželem o témž poloměru podstavy a o straně délky *3a*. Určete výšku a poloměr kužele tak, aby nádrž měla maximální objem.

Řešení:



obr. 59

Objem nádrže je $V = \pi r^2 a + \frac{1}{3}\pi r^2 x = \pi r^2\left(a + \frac{1}{3}x\right)$.

Podle Pythagorovy věty platí $r^2 = 9a^2 - x^2$

$$V = \pi(9a^2 - x^2)\left(a + \frac{1}{3}x\right) = \pi\left(9a^3 + 3a^2 x - ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

Podle věty 4.1 máme najít *t,s,m* tak, aby platilo:

$$-\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3a^2 x + 9a^3 - m = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(2t+s)x^2 - \frac{1}{3}(2ts + t^2)x + \frac{1}{3}t^2 s.$$

Rovnost těchto dvou polynomů nastává, když:

$$-a=\frac{1}{3}(2t+s)$$

$$3a^2=-\frac{1}{3}(2ts+t^2)$$

$$9a^3-m=\frac{1}{3}t^2s$$

Po vyřešení soustavy dostaneme $t=a$, $s=-5a$, neboť o $t=-a$ nemá smysl uvažovat.

Dále musí platit $-\frac{1}{3}(t-s)<0$, což platí.

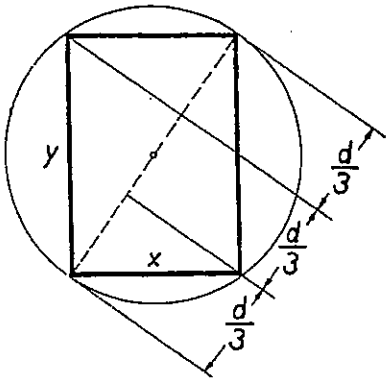
Funkce má maximum pro $x=a$, $r=2a\sqrt{2}$.

Aby nádrž měla maximální objem, musí mít kužel stejnou výšku jako válec, a to $x=a$ a poloměr kužele $r=2a\sqrt{2}$.

4.8 Stanovte rozměry x,y obdélníkového trámu vytesaného z válcového kmene o konstantním průměru d tak, aby jeho únosnost byla maximální.

(Pozn. únosností trámu rozumíme maximální ohybový moment, který může trám přenést při zachování předepsané bezpečnosti. Maximální ohybový moment je podle nauky o pružnosti a pevnosti dán vzorcem $M_{\max}=\sigma\cdot W$, kde σ je dovolené napětí užitého materiálu a c je tzv. průřezový modul.)

Řešení:



obr. 60

Hledáme maximální hodnotu veličiny W.

$W=\frac{1}{6}xy^2$

Podle Pythagorovy věty platí: $y^2=d^2-x^2$

takže

$$W=\frac{1}{6}x(d^2-x^2)=\frac{1}{6}(-x^3+d^2x)$$

Hledáme lokální extrém funkce $f(x)=-x^3+d^2x$

Podle věty 4.1 položíme

$$-x^3+d^2x-m=-(x-r)^2(x-s)$$

$$-x^3+d^2x-m=-x^3+(2r+s)x^2-(2rs+r^2)x+r^2s$$

Rovnost nastává, mají-li oba polynomy stejné koeficienty u stejných mocnin proměnné x:

$$d^2=-2rs-r^2$$

$$0=2r+s$$

$$-m=r^2s$$

Za podmínky $r>0$ je řešením soustavy $r=\frac{d}{3}\sqrt{3}$ a $s=-\frac{2}{3}d\sqrt{3}$.

Jelikož je $(-1)\cdot(r-s)<0$, nastává v $x=\frac{d}{3}\sqrt{3}$ maximum.

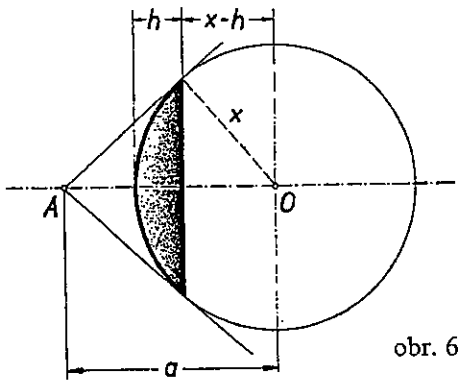
Pro y platí $y=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{9}\cdot 3}=\frac{d}{3}\sqrt{6}$.

Obdélníkový trám o rozměrech $x=\frac{d}{3}\sqrt{3}$ a $y=\frac{d}{3}\sqrt{6}$ má maximální únosnost

$$W_{\max}=\frac{d^3}{27}\sqrt{3}.$$

4.9 Od světelného bodu A je ve vzdálenosti a střed koule o poloměru x, který je menší než a. Jak velký má být tento poloměr, aby z bodu A osvětlený kulový vrchlík měl největší obsah?

Řešení:



obr. 61

Pro obsah vrchlíku platí:

$$S=2\pi xh$$

Trojúhelník AOV je pravoúhlý a podle Euklidovy věty platí:

$$x^2=a\cdot(x-h)$$

$$h=-\frac{x^2}{a}+x=\frac{ax-x^2}{a}$$

$$S = 2\pi x\left(\frac{ax - x^2}{a}\right) = \frac{2\pi}{a}\left(-x^3 + ax^2\right)$$

Hledáme lokální extrém funkce $f(x) = -x^3 + ax^2$

Podle věty 4.1 položíme

$$-x^3 + ax^2 - m = -x^3 + (2r + s)x^2 - (2rs + r^2)x + r^2 s$$

Rovnost nastane právě, když bude platit:

$$a = 2r + s$$

$$0 = 2rs + r^2$$

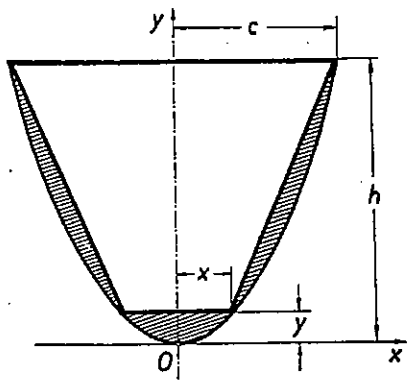
$$\underline{-m = r^2 s}$$

Řešením soustavy za podmínkou $r > 0$ je $r = \frac{2}{3}a$ a $s = -\frac{1}{3}a$, a tedy maximum funkce f nastane v bodě $x = \frac{2}{3}a$.

Při poloměru koule $\frac{2}{3}a$ má osvětlený vrchlík největší obsah $S_{\max} = \frac{8\pi a^2}{27}$.

4.10 Do parabolické úseče vytvořené parabolou $2py = x^2$ a přímkou $y = h$ vepište rovnoramenný lichoběžník se základnami rovnoběžnými s osou x o největším obsahu.

Řešením:



obr. 62

Obsah lichoběžníku je

$$S = (c + x)(h - y)$$

Z rovnice paraboly vyjádříme y a dosadíme do vzorce pro obsah.

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

$$S = (c + x)\left(h - \frac{x^2}{2p}\right) = hc + hx - \frac{cx^2}{2p} - \frac{x^3}{2p}$$

Funkce S nabývá lokálního extrému v bodě r, existují-li čísla extrému m,s, tak, že platí

$$-\frac{1}{2p}x^3-\frac{c}{2p}x^2+hx+hc-m=-\frac{1}{2p}(x-r)^2(x-s)$$

Po roznásobení

$$-\frac{1}{2p}x^3-\frac{c}{2p}x^2+hx+hc-m=-\frac{1}{2p}x^3+\frac{1}{2p}(2r+s)x^2-\frac{1}{2p}(2rs+r^2)x+\frac{1}{2p}r^2s$$

Rovnost nastane, když

$$-\frac{c}{2p}=\frac{1}{2p}(2r+s)$$

$$h=-\frac{1}{2p}(2rs+r^2)$$

$$hc-m=-\frac{1}{2p}r^2s$$

Řešením soustavy dostaneme (za podmínky $r>0$)

$r=\frac{-c+\sqrt{c^2+6ph}}{3}$, $s=\frac{c-2\sqrt{c^2+6ph}}{3}$. Užitím vztahu $2ph=c^2$, který plyne z rovnice paraboly je $r=\frac{c}{3}$, $s=-c$, přičemž podmínka pro maximum

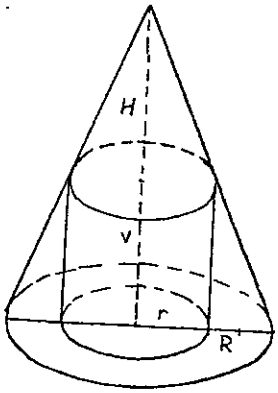
$-\frac{1}{2p}(r-s)<0$ je splněna.

Funkce nabývá maxima v bodě $x=\frac{c}{3}$. Pro y dostáváme $y=\frac{\frac{c^2}{9}}{2p}=\frac{c^2}{18p}$

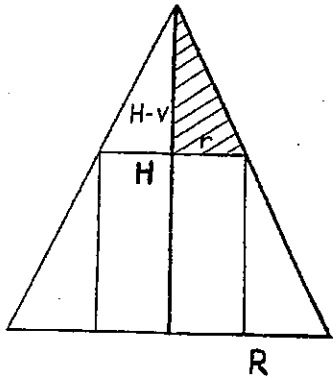
Hledaný lichoběžník má obsah $S=\frac{16c^3}{27p}=\frac{32}{27}hc$.

4.11 Jaké rozměry má válec, je-li vepsán kuželi o rozměrech R a H, má-li mít maximální objem?

Řešení:



obr. 63



obr. 64

Pro objem válce platí:

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

Z podobnosti trojúhelníků (obr. 64) plyne:

$$\frac{H}{H-v} = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-v)$$

po dosazení do vzorce pro objem dostaneme

$$V = \pi\left(\frac{R}{H}(H-v)\right)^2 \cdot v = \frac{\pi R^2}{H^2}v^3 - \frac{2\pi R^2}{H}v^2 + \pi R^2 v$$

Podle věty 4.1 položíme

$$\frac{\pi R^2}{H^2}v^3 - \frac{2\pi R^2}{H}v^2 + \pi R^2 v - m = \frac{\pi R^2}{H^2}v^3 - \frac{\pi R^2}{H^2}(2r+s)v^2 + \frac{\pi R^2}{H^2}(2rs+r^2)v - \frac{\pi R^2}{H^2}r^2 s$$

rovnost těchto polynomů nastává pouze, mají-li oba polynomy stejné koeficienty u stejných mocnin proměnné v. Platí tedy:

$$\frac{2\pi R^2}{H} = \frac{\pi R^2}{H^2}(2r+s)$$

$$\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{H^2}(2rs+r^2)$$

$$m = \frac{\pi R^2}{H^2}r^2 s$$

Po vyřešení soustavy dostaneme (za podmínky $r > 0$)

$r = \frac{H}{3}$, $s = \frac{4}{3}H$ a $r = H$, $s = 0$

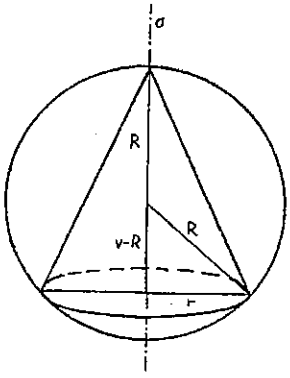
Jediným řešením je $r = \frac{H}{3}$, neboť podle věty 4.2 je v tomto bodě lokální maximum. Tedy $v = \frac{H}{3}$ a dopočteme poloměr r:

$$r = \frac{R}{H}\left(H - \frac{H}{3}\right) = \frac{2}{3}R$$

Válec má podstavu o poloměru $\frac{2}{3}R$ a výšku $\frac{1}{3}H$.

4.12 Do koule o poloměru R vepište kužel maximálního objemu.

Řešení:



obr. 65

Pro objem kužele platí:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$$

Z Pythagorovy věty je

$$r^2 = R^2 - (v - R)^2$$

$$r^2 = R^2 - v^2 + 2vR - R^2 = -v^2 + 2vR$$

dosazením do V vyjde:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(-v^3 + 2Rv^2\right)$$

Hledáme lokální maximum kubické funkce $-v^3 + 2Rv^2$ s proměnnou v. Podle věty 4.1 položíme

$$-v^3 + 2Rv^2 - m = -(v - t)^2(v - s)$$

$$-v^3 + 2Rv^2 - m = -v^3 + (2t + s)v^2 - (2ts + t^2)v + t^2 s$$

Rovnost nastává v případě, že :

$$2R = 2t + s$$

$$0 = 2ts + t^2$$

$$\underline{-m = t^2 s}$$

Po vyřešení vyhovuje podmínce $t > 0$ jen $t = \frac{4}{3}R$, $s = -\frac{2}{3}R$

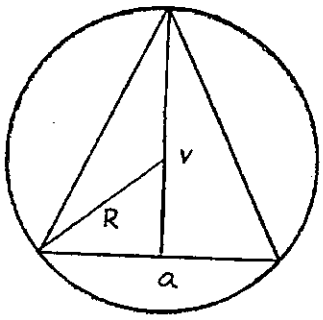
Vztah $-(t-s) < 0$ zřejmě platí, nastává tedy maximum.

Tak funkce nabývá maxima pro $v = \frac{4}{3}R$. Po dopočtení r je $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Hledaný kužel má podstavu o poloměru $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ a výšku $v = \frac{4}{3}R$.

4.13 Do koule o poloměru R vepište čtyřboký jehlan o maximálním objemu.

Řešení:



obr. 66

Objem jehlanu je $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot v$

Z Pythagorovy věty plyne: $(v-R)^2 + \frac{a^2}{2} = R^2$, tedy

$a^2 = 2(2vR - v^2)$

Po dosazení do objemu je $V = \frac{2}{3}(2v^2R - v^3)$.

Podle věty 4.1 funkce $V(v) = -v^3 + 2v^2R$ nabývá lokálního extrému, když:

$-v^3 + 2v^2R - m = -v^3 + (2r+s)v^2 - (2rs + r^2)v + r^2s$

Rovnost nastává pouze tehdy, když:

$2R = 2r + s$

$0 = 2rs + r^2$

$\underline{-m = r^2s}$

Řešením soustavy (za podmínky $r > 0$) je $r = \frac{4}{3}R$, $s = -\frac{2}{3}R$.

Podmínka pro maximum $(-1)(r-s) < 0$ je splněna, tzn. že v čísle $v = \frac{4}{3}R$ je nabýváno největší hodnoty.

Pro stranu jehlanu a dostáváme : $a = \frac{4}{3}R$.

Do koule vepíšeme jehlan s podstavou o straně $a = \frac{4}{3}R$ a výšky $\frac{4}{3}R$ o objemu $V = \frac{64}{81}R^3$.

5. Metoda diskriminantu

Základem této metody je, že hledanou extremální hodnotu určíme právě z podmínky pro diskriminant kvadratické rovnice. Lze ji aplikovat na úlohy, které na první pohled vypadají obtížně, neboť výraz, jehož extremální hodnotu hledáme, obsahuje odmocninu s neznámou nebo zlomek, kde neznámá vystupuje ve jmenovateli. Metodu používáme, když po úpravě výrazu dospějeme ke kvadratické (resp. bikvadratické) rovnici, v níž vystupuje veličina, jejíž extrém hledáme, v podobě parametru. Pokud má být řešení dané kvadratické rovnice v oboru reálných čísel (R), musí být diskriminant D větší nebo roven nule. Odtud dostaneme nerovnost omezující hodnotu parametru, tedy hledané funkce. Řešením této nerovnosti určíme extrémy funkce. Je však třeba zvážit, za jakých podmínek je funkce definována a jakých hodnot může nabývat.

Úlohy:

5.1 Stanovte minimum funkce $f(x)=\frac{12(x+2)}{x^2}$

Řešení:

Předpokládejme, že minimum existuje a označme jej m. Hledejme x tak, aby $\frac{12(x+2)}{x^2}=m$. Po úpravě $-mx^2+12x+24=0$. Tedy

$144+96m\geq 0$

$m\geq -\frac{144}{96}=-\frac{3}{2}$

Protože m je ale minimální hodnota funkce, zvolíme $m=-\frac{3}{2}$. Určíme ještě příslušné hodnoty x. Platí $-\frac{3}{2}=\frac{12(x+2)}{x^2}$ a po úpravě $x^2+8x+16=0$

$x=\frac{-8\pm 0}{2}=-4$

Závěr: Daná funkce nabývá svého lokálního (ale i absolutního) minima $f_{\min}(x)=-\frac{3}{2}$ pro $x=-4$.

5.2 Součin dvou kladných čísel, jejichž součet je stálý, je největší tehdy, jestliže jsou tato čísla stejná. Dokažte.

Řešení:

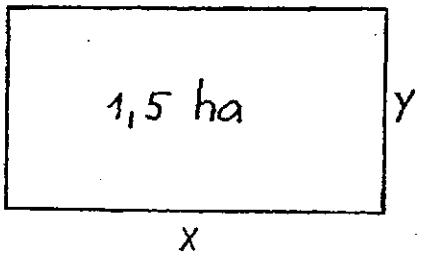
Součet čísel označme a, jedno z čísel označme x, pak druhé číslo je $(a-x)$. Součin obou čísel označme písmenem m: $(a-x)\cdot x=m$. Po roznásobení dostáváme rovnici $-x^2+ax-m=0$, kde x je neznámá, m parametr. Diskriminant $D=a^2-4m$ musí být větší nebo roven nule, odtud $m\leq\frac{a^2}{4}$. Největší možnou hodnotou m je tedy $m=\frac{a^2}{4}$, když $D=0$. Dále platí $x=\frac{-a\pm\sqrt{0}}{-2}=\frac{a}{2}$. Dokázali jsme, že obě čísla musí být stejná a to $\frac{a}{2}$.

Pozn. s touto úlohou jsme se setkali již v kapitolách 2 a 3. Nyní jsme si ukázali třetí způsob řešení.

5.3 Farmář chce ohradit výběh pro dobytek o rozloze 1,5 *ha* elektrickým ohradníkem. Vzhledem k tomu, že tento způsob hrazení je poměrně nákladný, usiluje, aby spotřebovaného materiálu bylo co nejméně.

Jaké rozměry má mít ohrazený pozemek, chce-li, aby byl ve tvaru pravoúhelníku?

Řešení:



obr. 67

Označme jednu stranu pozemku x a druhou y, pak pro obsah pozemku platí:

$S = x \cdot y = 1{,}5$ odtud $y = \frac{1{,}5}{x}$.

Pro délku ohrady l dostáváme: $2\left(x + \frac{1{,}5}{x}\right) = l$.

Pro úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x (l považujeme za parametr): $2x^2 - lx + 3 = 0$.

Má-li být x reálné musí být diskriminant větší nebo roven nule:

$D = l^2 - 24 \geq 0$

$l \geq \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Za l vezmeme nejmenší možnou hodnotu, tj. $l = 2\sqrt{6}$.

Po dopočtení je $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ a $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

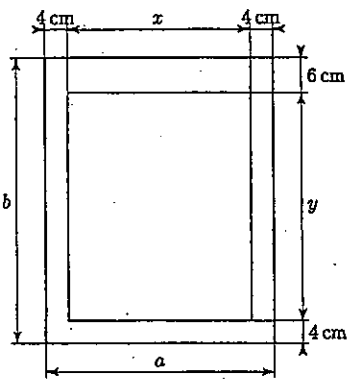
V převodu na metry $50 \cdot \sqrt{6} \doteq 122{,}5\,m$.

Pozemek je třeba ohradit jako čtverec o straně $50 \cdot \sqrt{6}\ m$.

Pozn. Úlohu jsme řešili již pomocí A-G nerovnosti i využitím vlastností kvadratické funkce.

5.4 Plakát pravoúhelníkového tvaru má celkovou plochu 2000 cm^2. Určete rozměry x,y potištěné plochy S, jestliže je přesně dodržen okraj 6 cm nahoře a 4 cm po stranách a dole a potištěná plocha S má být maximální.

Řešení:



obr. 68

Pro plochu listu platí $(x+8)\cdot(y+10)=2000$, odtud $y=\dfrac{2000}{x+8}-10$.

Hledáme maximum potištěné plochy $S=x\cdot y=x\cdot\left(\dfrac{2000}{x+8}-10\right)$.

Po roznásobení a úpravě obdržíme kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem S: $10x^2+(S-1920)x+85=0$.

Diskriminant $D=S^2-4160S+3686400$ musí být větší nebo roven 0. Řešením nejprve $D=0$ dostaneme $S_1=2880$ $S_2=1280$ a D vyjádříme jaký součin $D=(S-S_1)(S-S_2)\geq 0$ tedy $(S-2880)\cdot(S-1280)\geq 0$. To je pouze, když:

$S-2880\geq 0$ a $S-1280\geq 0$ nebo $S-2880\leq 0$ a $S-1280\leq 0$

$S\geq 2880$ a $S\geq 1280$ nebo $S\leq 2880$ a $S\leq 1280$

$S\geq 2880$ nebo $S\leq 1280$

Vzhledem k tomu, že popsaná plocha nemůže být větší než plocha celého plakátu, vyhovuje pouze $S\leq 1280\ cm^2$.

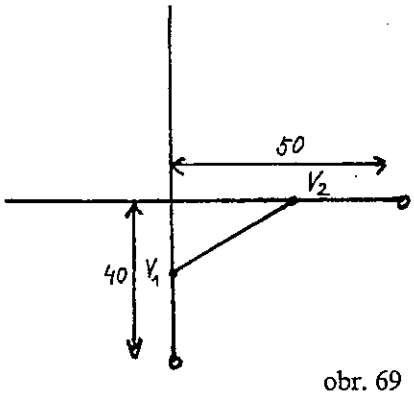
Dopočtením získáme $x=32$ cm a $y=40$ cm.

Potištěná plocha na plakátu má rozměry 32 x 40 cm.

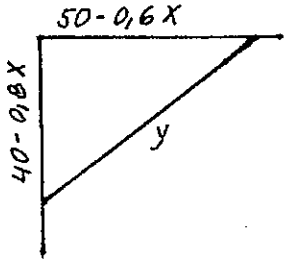
5.5 Dvě železniční stanice se kříží pod pravým úhlem. K místu křížení se současně blíží po obou tratích dva vlaky; jeden z nádraží, které leží 40 km od křížení, druhý z nádraží, které je 50 km od křížení. První vlak ujede za 1 minutu 0,8 km, druhý 0,6 km.

Za kolik minut od výjezdu z obou nádraží budou vlaky od sebe nejméně vzdáleny? Jaká je tato vzdálenost?

Řešení:



obr. 69



obr. 70

Označme nejkratší vzdálenost mezi vlaky y a čas, za který dorazí do takového místa, x.

První vlak za x minut urazí 0,8 x *km* a do místa, kde se kříží koleje, mu zbývá $(40-0{,}8x)$ *km*. Druhý vlak za x minut 0,6x *km* a do křížení mu zbývá $(50-0{,}6x)$ *km*.

Z Pythagorovy věty (obr. 70) plyne:

$$y=\sqrt{(40-0{,}8x)^2+(50-0{,}6x)^2}$$

po umocnění a úpravě dostaneme

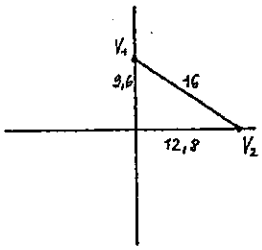
$$x^2-124x+4100-y^2=0$$

Z podmínky nezáporného diskriminantu máme $y^2 \geq 256$.

Protože $y \geq 0$, dostaneme odmocněním $y \geq 16$, kdy $y_{\min}=16$. To dosadíme do kvadratické rovnice a určíme $x=62$.

Vypočetli jsme, že lokomotivy si budou nejblíže za 62 *min* a vzdálenost mezi nimi v tomto okamžiku bude 16 km.

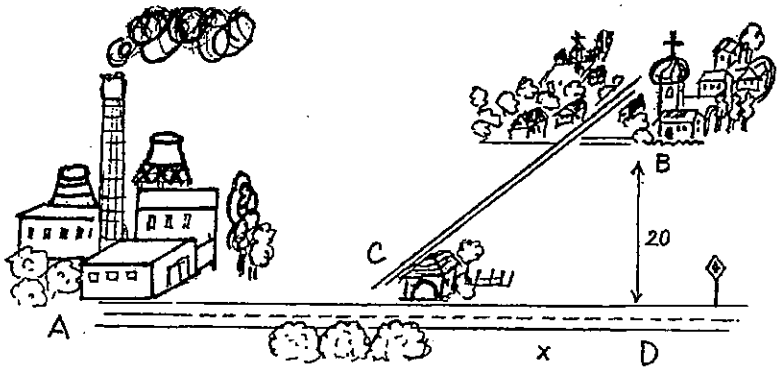
Vypočteme-li jejich vzdálenost od místa křížení tratí v čase 62 *min*, zjistíme, že první vlak je vzdálen: $40-0{,}8\cdot 62=-9{,}6$. To znamená, že projel křižovatkou a nachází se 9,6 *km* za ní. Druhý vlak je $50-0{,}6\cdot 62=12{,}8$ *km* před křižovatkou. (obr. 71)



obr. 71

5.6 20 *km* od hlavní silnice leží vesnice *B*, odkud jezdí obyvatelé do zaměstnání v místě *A*. Poněvadž z vesnice nejede žádný autobus, musí se nejprve dopravit na kole do místa *C*, odkud už mají autobusové spojení do *A*. Kde má být postavena autobusová zastávka *C*, aby jim cesta do práce trvala co nejkratší dobu? Rychlost jízdy autobusu je 0,8 *km/min* a rychlost na jízdním kole 0,2 *km/min*.

Řešení:



obr. 72

Označme *a km* vzdálenost *AD* a *x km* vzdálenost *CD*. Pak $AC = (a - x)$ *km* a $CB = \sqrt{x^2 + 20^2}$ *km*. Čas, který potřebují cyklisté k ujetí trasy *BC*, je $\frac{\sqrt{x^2+400}}{0{,}2}$ *min*, neboť $t = \frac{s}{v}$. Čas potřebný na projetí autobusu v úseku *AC* je $\frac{a-x}{0{,}8}$ *min*. Celková doba cesty z *A* do *B* je *y min*, kde $y = \frac{\sqrt{x^2+400}}{0{,}2} + \frac{a-x}{0{,}8}$ a tento součet musí být co nejmenší.

Po úpravách dostáváme:

$0{,}8y - a + x = 4\sqrt{x^2 + 400}$.

Označme $0{,}8y - a$ jako k a umocněme rovnici:

$15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0$.

Z podmínky diskriminantu dostaneme $16k^2 \geq 96000$. Po vydělení 16 a odmocnění:

$|k| \geq \sqrt{6000} = 20\sqrt{15}$.

Nejmenší možná hodnota k je tedy $k_{\min} = 20\sqrt{15}$, a tedy

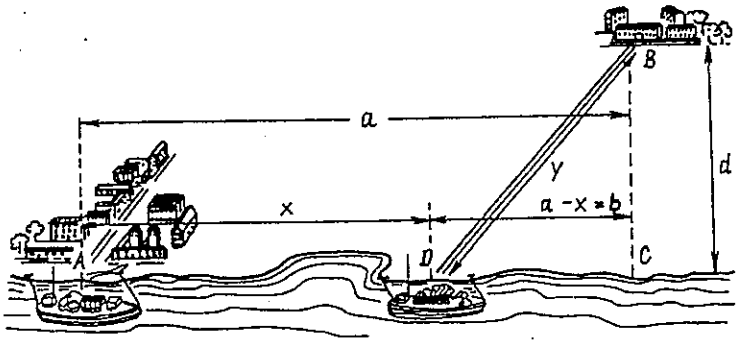
$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{20\sqrt{15}}{15} \doteq 5{,}16\ km.$

Autobusová zastávka má být postavena přibližně 5 *km* od bodu *D*.

Pozn. řešení má smysl pouze je-li $x < a$.

5.7 Z města *A* na břehu řeky je třeba dopravit náklad do města B, které je vzdáleno *a km* po proudu řeky a *d km* od břehu. Kudy je třeba vést silnici od místa *B* k řece tak, aby doprava nákladu z *A* do *B* byla co nejlevnější, je-li cena přepravy na úseku 1 *km* po řece dvakrát menší než po silnici?

Řešení:



obr. 73

Označme *x km* vzdálenost *AD*, *b km* vzdálenost *DC* a *y km* délku silnice *DB*.

Protože je provoz po silnici dvakrát dražší než po řece, musí být součet $x + 2y$ co nejmenší.

$x = a - b$ a $b = \sqrt{y^2 + d^2}$

Když součet označíme *m*, pak dostáváme

$m = a - \sqrt{y^2 + d^2} + 2y$

po odstranění odmocniny dostaneme

$3y^2 - 4(m-a)y + (m-a)^2 + d^2 = 0$

Aby y bylo reálné číslo, je třeba, aby diskriminant byl větší nebo roven nule.

Tedy $16(m-a)^2 \geq 12(m-a)^2 + 12d^2$

Po úpravě a odmocnění

$|m-a| \geq d\sqrt{3}$

Přitom $m = x + 2y > a$ (viz obrázek).

Můžeme tedy položit $|m-a| = m-a$

A dostaneme $m_{\min} = a + d\sqrt{3}$

Potom $y = \frac{2}{3}d\sqrt{3}$

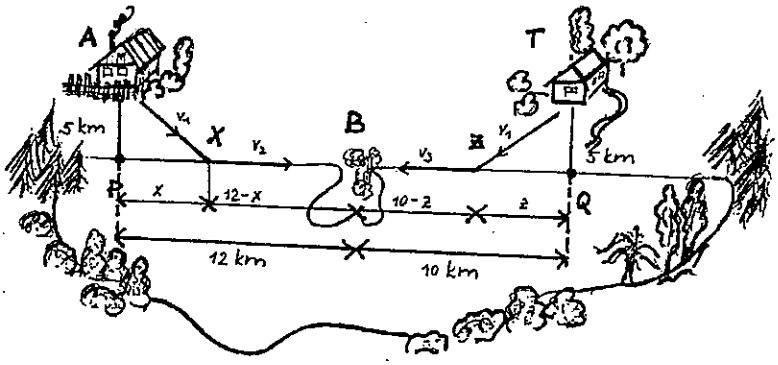
Jelikož $\sin\angle BDC = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, je úhel BDC roven 60°. To znamená, že silnice musí být postavena pod úhlem 60° k řece.

5.8 Dva kamarádi Adam a Tonda trávili celé prázdniny na Botě. Tak říkají obyvatelé Kocourkova poloostrůvku na místním jezeře, neboť svým tvarem nepřipomíná nic jiného.

Jednou se vsadili, kdo tam bude dříve. Oba chlapci bydlí 5 *km* od jezera, ale Adam bydlí od Boty ve vzdálenosti 12 *km* podél řeky a Tonda ve vzdálenosti 10 *km* podél řeky na opačnou stranu (viz obr. 74)

Jaký způsob cesty zvolil každý z nich a kdo vyhrál sázku, víte-li, že Adam i Tonda jdou rychlostí 5 *km/h*, ale Adam plave rychlostí 7 *km/h* a Tonda 6 *km/h*.

Řešení:



obr. 74

Nejdříve určíme Adamovu trasu, po které se dostal na Botu za nejkratší možnou dobu. Tzn., že musím najít takové místo u jezera *X*, kam dojde pěšky, a poté začne plavat. Podle obr. 74 je cesta z *A* do *X* rovna $\sqrt{25+x^2}$ a cesta z X do B $(12-x)$ *km*.

Čas t ($t=\frac{s}{v}$), za který Adam urazí tuto trasu je $t=\frac{\sqrt{25+x^2}}{5}+\frac{12-x}{7}$.

Po úpravě a umocnění dostáváme kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem t

$24x^2+(600-350t)x-1225t^2+4200t-2375=0$

Před řešením diskriminantu provedeme odhad parametru *t*. Je zřejmé, že $\frac{|PB|}{v_2}<t\le\frac{|AB|}{v_1}$, to znamená $\frac{12}{7}<t\le\frac{13}{5}\doteq 1{,}72<t\le 2{,}6$.

Z podmínky pro diskriminant je $240100t^2-823200t+588000\ge 0$.

Řešením $D=0$ dostaneme $t_1\doteq 2{,}414$, $t_2\doteq 1{,}014$

Pak $D=(t-2{,}414)\cdot(t-1{,}014)\ge 0$ a řešením nerovnice je $t\ge 1{,}014$ a $t\ge 2{,}414$.

Jelikož hledáme minimální hodnotu t a zároveň z výše uvedeného odhadu víme, že $t>1{,}72$, jediným řešením je $t\doteq 2{,}414\doteq 2$ *hod* 24 *min* 50 *s*.

Po dořešení je $x\doteq 5{,}1$ *km*.

Zjistili jsme, že Adam se nedostane na Botu dříve než za 2 *hod* 24 *min* a 50 *s*.

Postupujme stejně i v případě Tondy. Předpokládejme, že se nejprve musí dostat do místa *Z*, odkud poplave do *B*. Tedy jeho trasa je:

$s=\sqrt{25+z^2}+10-z$, a čas který stráví na cestě

$$t = \frac{\sqrt{25+z^2}}{5} + \frac{10-z}{6}.$$

úpravou a po umocnění dospějeme ke kvadratické rovnice s neznámou z a parametrem t:

$$11z^2 + (500-300t)z - 900t^2 + 3000t - 1600 = 0$$

Odhad pro t je: $\frac{|QB|}{6} < t \le \frac{|TB|}{5}$ tj. $1,\overline{6} < t \le 2,236$.

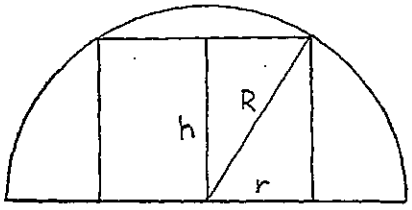
Řešením diskriminantu rovnice a jeho podmínek dospějeme k řešení $t \ge 2,219$ a $t \le 1,114$, přičemž vzhledem k odhadu je jediným řešením $t \doteq 2,219 \doteq 2$ *hod* 13 *min* 8 *s*.

Vidíme, že Tonda se dostane na místo rychleji. Pro z dopočteme $z \doteq 7,54$ *km*.

Sázku vyhrál Tonda, neboť se na poloostrov dostal v kratším čase.

5.9 Do polokoule o poloměru R je vepsán rotační válec tak, že jeho dolní podstava leží v kruhové podstavě polokoule a hranice horní podstavy válce se dotýká vrchlíku polokoule. Určete rozměry tohoto válce, má-li být jeho povrch maximální.

Řešení:



obr. 75

Pro povrch válce dostáváme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

Z Pythagorovy věty plyne $h = \sqrt{R^2 - r^2}$

po dosazení

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 2\pi r\left(r + \sqrt{R^2 - r^2}\right)$$

Pro zjednodušení výrazu volme $\frac{S}{2\pi} = M$ a $r^2 = x$.

Po umocnění a úpravě vyjde rovnice $2x^2 - (2M + R^2)x + M^2 = 0$.

Jelikož x má být reálné, diskriminant musí být větší nebo roven nule. Ale protože hledáme maximální povrch, musí být i M maximální a to je, když diskriminant bude nezáporný.

$$-4M^2 + 4MR^2 + R^4 \ge 0$$

Protože $M > 0$, vyjde řešením předchozí nerovnice jen $M \in \left(0, \frac{R^2}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

$M_{\max}$ je tedy $\frac{R^2}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$

Pro S_{max} získáme $S_{\max} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi\left(1+\sqrt{2}\right) = \pi R^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Pro x po dosazení M do rovnice vyjde:

$$x = \frac{R^2\left(1+\sqrt{2}\right)+R^2}{4} = \frac{R^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}$$

po zpětném vypočtení r je:

$$r = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

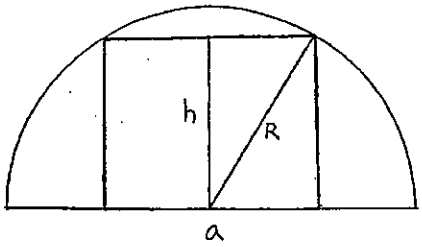
a $h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Rozměry válce o maximálním povrchu jsou $r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ a výška

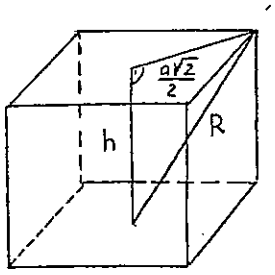
$h = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

5.10 Do polokoule o poloměru R je vepsán kvádr se čtvercovou podstavou, která leží v kruhové podstavě polokoule. Vrcholy protilehlé podstavy kvádru se dotýkají vrchlíku polokoule. Určete rozměry kvádru tak, aby jeho povrch byl maximální.

Řešení:



obr. 76



obr. 77

Pro povrch kvádru platí:

$S = 2a^2 + 4ah$

Z Pythagorovy věty je

$$h=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$$

po dosazení do vzorce pro obsah je

$$S=2a^2+4a\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$$

po umocnění a úpravě získáváme rovnici

$12a^4-a^2\left(4S+16R^2\right)+S^2=0$, kde za a^2 položme x.

Pak $12x^2-x\left(4S+16R^2\right)+S^2=0$

Aby rovnice měla reálné řešení, musí být $D\geq 0$, tedy $\left(4S+16R^2\right)^2\geq 48S^2$.

Po odmocnění $\left|4S+16R^2\right|\geq\left|4S\sqrt{3}\right|$.

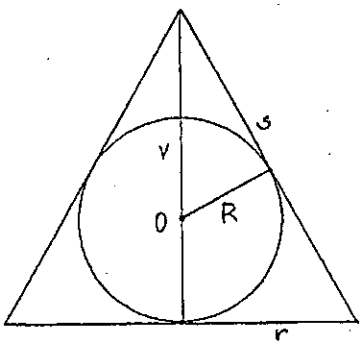
Výrazy uvnitř absolutních hodnot jsou kladné, proto $4S+16R^2\geq 4S\sqrt{3}$ a odtud $S\leq\frac{4R^2}{\sqrt{3}-1}=2R^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. Je tedy $S_{\max}=2R^2\left(1+\sqrt{3}\right)$ a po dosazení do původní kvadratické rovnice vypočítáme $x=R^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Odtud $a=R\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$,

$$h=\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

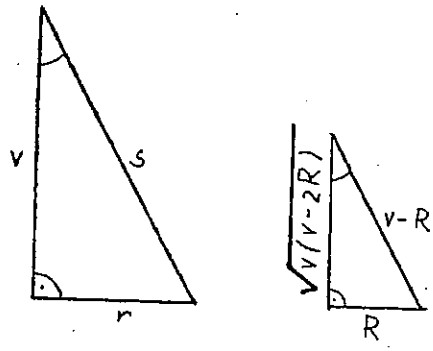
Do polokoule vepíšeme kvádr, jehož čtvercová podstava má délku strany $a=R\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$ a jehož výška je $h=\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

5.11 Dané kouli o poloměru R opište kužel s minimálním objemem.

Řešení:



obr.78



obr. 79

Pro objem kužele platí:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$$

Z podobnosti trojúhelníku (obr. 79) plyne:

$$\frac{v}{\sqrt{v(v-R)}} = \frac{r}{R}$$

$$v = -\frac{2Rr^2}{R^2 - r^2}$$

Po dosazení v do vzorce pro objem dostaneme:

$$V = -\frac{2}{3}\frac{\pi R r^4}{R^2 - r^2}$$

Po úpravě $\frac{2}{3}\pi R r^4 - V r^2 + V R^2 = 0$

Zvolme substituci $r^2 = x$ a dosaďme do rovnice, dostaneme kvadratickou rovnici s parametrem V a neznámou x:

$$\frac{2}{3}\pi R x^2 - V x + V R^2 = 0$$

Máli být řešením rovnice reálné číslo, musí být diskriminant D větší nebo roven nule, přičemž parametr V musí být minimální.

Odtud $V^2 \geq \frac{8}{3}\pi R^3 V$. Protože $V > 0$, dostáváme $V \geq \frac{8}{3}\pi R^3$.

Je proto $V_{\min} = \frac{8}{3}\pi R^3$. Pak po dosazení do kvadratické rovnice zjistíme

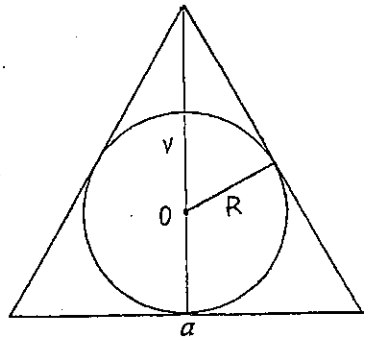
$x = 2R^2$

$r = R\sqrt{2}$ a $v = 4R$

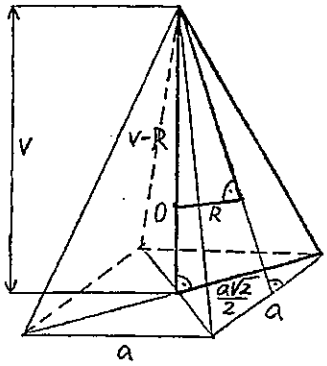
Kužel, který opisuje kouli má podstavu o poloměru $r = R\sqrt{2}$ a výšku $v = 4R$.

5.12 Dané kouli o poloměru R opište čtyřboký jehlan s minimálním objemem.

Řešení:



obr. 80



obr. 81

Pro objem jehlanu platí:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot v$$

Z podobnosti trojúhelníků (obr. 81) plyne:

$$\frac{v}{\sqrt{v(v-2R)}} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{R}$$

po úpravě je $v = \frac{2Ra^2}{a^2 - 2R^2}$. Po dosazení výšky do vzorce pro objem a úpravě dostáváme rovnici 4. stupně:

$$\frac{2}{3}Ra^4 - Va^2 + 2VR^2 = 0$$

Zvolme substituci $a^2 = x$, pak $\frac{2}{3}Rx^2 - Vx + 2VR^2 = 0$. Diskriminant D musí být větší nebo roven nule, přičemž V má být minimální: $V^2 \geq \frac{16}{3}R^3V$. Po vydělení kladným V máme $V \geq \frac{16}{3}R^3$. $V_{\min} = \frac{16}{3}R^3$

Dosazením do kvadratické rovnice vypočteme $x = 4R^2$ a $a = 2R$.

Pro výšku dostaneme zpětným dosazením $v = 4R$.

Dané kouli opíšeme jehlan s podstavou o straně $a = 2R$ a výšce $v = 4R$.

7. Seznam literatury

[1] Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky, SPN, Praha 1983

[2] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN, Praha 1985

[3] Černek, P.:A-G nerovnosť, Matematické obzory 30/1988

[4] Frýzek, M. - Müllerová, J.: Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy, SPN, Praha

[5] Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metody riešenia matematických úloh, SPN, Bratislava 1992

[6] Hroník, J.: úlohy o maximech a minimech funkcí, Mladá Fronta, Praha 1967

[7] Janeček, F.: Maturujeme připravujem se na přijímací zkoušky na VŠ, fiBlug, Praha

[8] Kufner, A.: Nerovnosti a odhady, Mladá Fronta, Praha 1989

[9] Larson, L.C.: Metody riešenia matematických problémov, ALFA, Bratislava 1990

[10] Maláč, J.: Sbírka náročnějších úloh z matematiky pro 6.-9. ročník základní devítileté školy, SPN, Praha 1969

[11] Mordkovič, A.G.: Extrémy polynomu třetího stupně, Kvant 11/1974

[12] Natanson, I.P.: Jednoduché úkoly na maxima a minima, Technicko-vědecké vydavatelství, 1952

[13] Novoveský, Křižalkovič, Lečko: Zábavná matematika, SPN, Praha 1975

[14] Perelman, J.I.: Zajímavá algebra, Nakladatelství technické literatury, 1985

[15] XVIII. ročník matematické olympiády, SPN, Praha

[16] Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 71, 4/1993

6. Závěr

V této práci jsem uvedla čtyři metody, kterými lze (za pomocí jednoduchých úprav) řešit úlohy, jež mají v dnešní době velký význam, neboť ve všech oborech lidské činnosti se řeší otázka: Jak naložit se svými prostředky, abychom dosáhli co možná největšího užitku? Součástí každé kapitoly jsou řešené úlohy, které jsou řazeny podle obtížnosti a mají sloužit jako materiál při práci v matematickém zájmovém kroužku (na SŠ nebo ZŠ) nebo pro žáky střední školy, kteří chtějí nabýt představ o povaze úloh, jimiž se zabývá vyšší matematika. Jelikož mnoho úloh je praktických, mohou být pro žáky vhodnou motivací k jejich dalšímu studiu.

Kromě uvedených metod existují ještě další způsoby řešení úloh na maxima a minima. Jednak postavené na znalostech vyšší matematiky, jednak elementární, například využívající vlastností geometrických útvarů. Vzhledem k rozsahu práce jsem se však zaměřila jen na metodu diskriminantu, A-G nerovnost, využití extrémů kvadratické funkce a kubické funkce.