Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

Konstrukční úlohy řešené pomocí Cabri geometrie

Miroslava Lutzová
Finanční matematika
2001-2004

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Pavel Leischner**
Most, 26. března 2004

Anotace

Název: Konstrukční úlohy řešené pomocí Cabri geometrie
Vypracovala: Miroslava Lutzová
Vedoucí práce: Mgr. Pavel Leischner

Klíčová slova: Cabri geometrie, planimetrie, Apolloniovy úlohy, Pappovy úlohy.

Cílem této práce je vyřešit Apolloniovy a Pappovy úlohy méně známými metodami (Gergonnova metoda, dilatace…) a řešení zpracovat jako interaktivní obrázky v Cabri geometrii.

Děkuji panu Mgr. Leischnerovi za pomoc při vypracování této bakalářské práce a za prohloubení vědomostí ohledně metod a důkazů v této bakalářské práci.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Českých Budějovicích 26. března 2004.

…………………………..

podpis

Obsah

1. Úvod 6
1.1 Apollonios z Pergy 6
1.2 Historičtí řešitelé Apolloniových úloh 6
1.3 Přehled všech Apolloniových a Pappových úloh 6

2. Přehled základních poznatků 8
2.1 Stejnolehlost 8
2.1.1 Stejnolehlost kružnic 8
2.1.2 Konstrukce středů stejnolehlosti 8
2.2 Mocnost bodu ke kružnici 9
2.2.1 Věty o mocnosti 9
2.2.2 Význam čísla m(M,k) v analytické geometrii 11
2.2.3 Věty o chordále 11
2.2.4 Jak sestrojit chordálu 12
2.2.5 Mongeova věta 13
2.3 Polární vlastnosti kružnice 15
2.3.1 Polarita v souvislosti s kruhovou inverzí 16
2.3.2 Důležité vlastnosti polarity 17
2.4 Dilatace 18
2.4.1 Užití dilatace při sestrojování tečen dvou kružnic 18
2.5 Gergonnovo řešení obecné Apolloniovy úlohy 19

3. Pappovy úlohy 21
3.1 Úloha typu „Bp_B" 21
3.2 Úloha typu „pp_B" 21
3.3 Úloha typu „kp_B" 22
3.4 Úloha typu „Bk_B" 24
3.5 Úloha typu „pk_B" 24
3.6 Úloha typu „kk_B" 25

4. Apolloniovy úlohy 26
4.1 Úloha bod-bod-bod 26
4.2 Úloha bod-bod-přímka 26
4.3 Úloha bod-bod-kružnice 27
4.4 Úloha bod-přímka-přímka 28
4.5 Úloha bod-přímka-kružnice 30
4.6 Úloha bod-kružnice-kružnice 31
4.7 Úloha přímka-přímka-přímka 35
4.8 Úloha přímka-přímka-kružnice 36
4.9 Úloha přímka-kružnice-kružnice 38
4.10 Úloha kružnice-kružnice-kružnice 42
4.10.1 Podrobnější konstrukce desáté Apolloniovy úlohy 47

Závěr 48

Seznam použité literatury 49

1. ÚVOD

1.1 Apollonios z Pergy

Apolloniovy úlohy se jmenují podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (kolem r. 200 př. Kr.). Apolloniova úloha spočívá v sestrojení kružnice, která se dotýká tří daných geometrických útvarů (bodů, přímek, kružnic). Apollonios formuloval znění těchto úloh pro tři zadané kružnice ve své knize *O dotycích (De tactionibus)*. Tento spis se bohužel nezachoval, takže není bezpečně známo, jaké řešení tento velký geometr provedl. Soudí se však, že podal řešení i pro obecný případ, a zdá se, že využil dilataci asi tak, jak to uveřejnil r. 1600 v Paříži francouzský matematik Viéte ve spise *Apollonius Gallus*.

1.2 Historičtí řešitelé Apolloniových úloh

Jedním z dalších řešitelů Apolloniovy úlohy byl Viétův vrstevník *Adrian van Roomen*. Ten řešil úlohu pomocí kuželoseček. Dalšími slavnými řešiteli byli *Fermat*, *Newton*, *Euler*, *Carnot*, později *Plücker*, *Casey* a jiní. Ti řešili úlohy cestou syntetickou i analytickou. Řešením zvláště jednoduchým a elegantním přispěl francouzský matematik *Gergonne*, pak *Gaultier* a později *Fouché*. Německý geometr *W. Fiedler* provedl řešení užitím cyklografie. Dalším řešitelem byl i český geometr *J. Sobotka*. Profesor karlínské reálky *F. Machovec* odvodil Gergonnovo řešení deskriptivní geometrií a *V. Jarolímek* geometrií projektivní, a to kolineací.

1.3 Přehled všech Apolloniových a Pappových úloh

Obecně lze Apolloniovu úlohu formulovat např. takto: „Jsou dány tři útvary k_1, k_2, k_3, které mohou být kruhové křivky (tj. kružnice nebo přímky) nebo body. Sestrojte kružnici k, která se těchto útvarů k_1, k_2, k_3 dotýká."

Je zřejmé, že vstupní objekty můžeme kombinovat, čímž získáme 10 typů zadání Apolloniových úloh označovaných podle vstupních objektů:

1. „*BBB*" tzn. bod, bod, bod
2. „*BBp*" tzn. bod, bod, přímka
3. „*BBk*" tzn. bod, bod, kružnice
4. „*Bpp*" tzn. bod, přímka, přímka
5. „*Bpk*" tzn. bod, přímka, kružnice
6. „*Bkk*" tzn. bod, kružnice, kružnice
7. „*ppp*" tzn. přímka, přímka, přímka
8. „*ppk*" tzn. přímka, přímka, kružnice
9. „*pkk*" tzn. přímka, kružnice, kružnice
10. „*kkk*" tzn. kružnice, kružnice, kružnice.

V současnosti se některé (ty nejjednodušší) typy Apolloniových úloh objevují již v učivu základních škol. S první Apolloniovou úlohou se žáci setkávají v šestém ročníku. Jde o úlohu „*bbb*", jejímž řešením je kružnice opsaná trojúhelníku. V učivu vyšších ročníků ZŠ bychom dále nalezli např. některé varianty úloh „*bkk*", „*ppp*" či „*pkk*". Všechny tyto úlohy žáci řeší pomocí metody množin bodů dané vlastnosti.

S dalšími typy, např. „*bpp*“ nebo „*ppk*“, se žáci setkávají na středních školách. Konkrétně řešení jmenovaných dvou úloh bývá pojímáno, jako cvičení na využití stejnolehlosti.

V souvislosti s Apolloniovými úlohami nemůžeme opomenou tzv. Pappovy úlohy. Jsou pojmenovány po řeckém matematikovi a filozofovi Pappovi z Alexandrie (přelom 3. a 4. století n. l.).

Pappovy úlohy jsou konkretizací úloh Apolloniových. Musí být zadán alespoň jeden bod a alespoň jedna křivka tak, že daný bod leží na křivce, které se má hledaná kružnice dotýkat. Těchto úloh existuje šest:

1. „Bp_B“ – tzn. bod, přímka na které leží bod
2. „pp_B“ – tzn. přímka, přímka na které leží bod
3. „kp_B“ – tzn. kružnice, přímka na které leží bod
4. „Bk_B“ – tzn. bod, kružnice na které leží bod
5. „pk_B“ – tzn. přímka, kružnice na které leží bod
6. „kk_B“ – tzn. kružnice, kružnice na které leží bod.

2. Přehled základních poznatků

V této kapitole je uveden přehled poznatků, které budeme potřebovat k řešení Apolloniových úloh v této práci. Věty, které jsou na středních školách obvykle uváděny, nedokazujeme. Při důkazech ostatních vět vycházíme ze znalosti středoškolského učiva.

2.1 Stejnolehlost

Definice stejnolehlosti

Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem stejnolehlosti $\kappa \neq 0$ je podobné zobrazení definované takto:

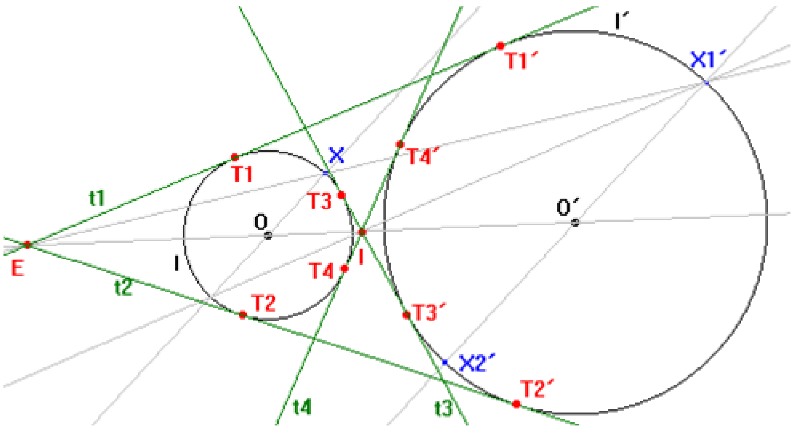
a) obrazem bodu S je bod $S' = S$

b) budu $X \neq S$ přiřazuje bod X' takový, že platí: $|SX'| = |\kappa|\ |SX|$, přičemž bod X' leží na polopřímce SX pro $\kappa > 0$, na polopřímce opačné k polopřímce SX pro $\kappa < 0$.

2.1.1 Stejnolehlost kružnic

Věta 1: Obrazem kružnice $k(O;r)$ ve stejnolehlosti H(S;κ), je kružnice o poloměru $r' = |\kappa| r$.

Věta 2: Každé dvě kružnice $k(O;r)$, $k'(O';r')$ s různými poloměry jsou *stejnolehlé právě dvěma způsoby* a to podle středů stejnolehlostí E (vnější střed stejnolehlosti) a I (vnitřní střed stejnolehlosti), které lze sestrojit podle obr. 2.1. Jsou-li kružnice soustředné, splývají středy obou stejnolehlostí se společným středem těchto kružnic (což, pokud máte elektronickou podobu této bakalářské práce, si můžete vyzkoušet tahem bodu O do bodu O' u obr. 2.1).

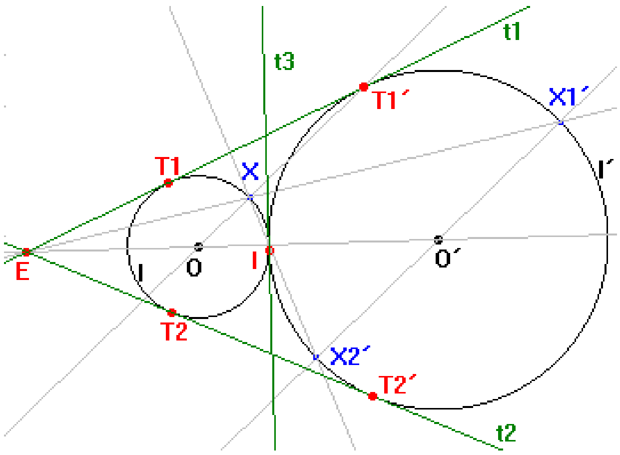


Obr. 2.1

2.1.2 Konstrukce středů stejnolehlosti

Máme v rovině dvě kružnice l, l' s různými středy O, O' (obr. 2.1). Jestliže existuje stejnolehlost zobrazující jednu z nich na druhou, leží střed stejnolehlosti na přímce OO'. Na první kružnici zvolíme libovolný bod X (neleží na přímce OO') a na druhé sestrojíme bod X' tak, aby byly přímky OX, $O'X'$ rovnoběžné. Střed hledané stejnolehlosti je průsečíkem přímek OO', XX'. K danému bodu X máme dvě možnosti volby konstrukce bodu $X´$. Proto takto narýsované kružnice mají dva středy stejnolehlosti E(vnější) a I(vnitřní).

Věta 3: Středy stejnolehlostí S_1 *a* S_2 leží na přímce procházející středy kružnic a koeficienty stejnolehlostí jsou $\kappa_1 = r´/r$, $\kappa_2 = - r´/r$.
Věta 4: Mají-li dvě kružnice *společné tečny*, pak tyto tečny procházejí příslušnými středy stejnolehlosti, jestliže se kružnice dotýkají, je jedním středem stejnolehlosti bod dotyku obou kružnic (obr. 2.2).
Věta 5: V případě dvou shodných kružnic existuje jen jedna stejnolehlost, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Jestliže dvě neshodné kružnice mají společné tečny, pak vnější tečny procházejí vnějším středem a vnitřní tečny procházejí jejich vnitřním středem stejnolehlosti.



Obr. 2.2

2.2 Mocnost bodu ke kružnici

2.2.1 Věty o mocnosti

Definice mocnosti

Mocností bodu M ke kružnici $k(O,r)$ nazýváme číslo $m = m(M,k) = d^2 - r^2$, kde $d = |OM|$.

Věta 6: Vedeme-li bodem M přímku, která je sečnou kružnice k pak **mocnost** $m(M,k)$ bodu M ke kružnici k platí: $m = |MA|.|MB|$, kde A, B jsou průsečíky sečny s kružnicí (pokud takto vedeme více sečen mocnost se nemění).
Vedeme-li bodem M navíc tečnu s bodem dotyku T, platí: $m = |MA|.|MB| = |MT|^2$.

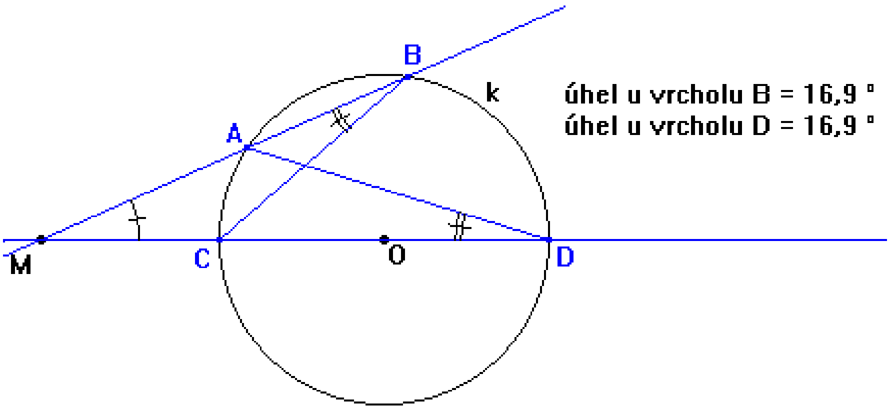
Důkaz:

Je dán bod M a kružnice $k(O,r)$.

a) M je vnější bod kružnice k

Tuto větu dokážeme pomocí obr. 2.3. Máme dvě sečny. Jedna prochází body M, A a B, druhá prochází body M, C a D. Máme dokázat, že platí rovnost $|MA|.|MB| = |MC|.|MD| = m$. Tuto rovnost dokážeme pomocí podobnosti trojúhelníků. Z věty o obvodových úhlech plyne, že úhel při vrcholu B má stejnou velikost jako úhel při vrcholu D. Jde o obvodové úhly příslušného oblouku AC. Poté podle věty *uu* dostáváme, že jsou podobné trojúhelníky AMC a

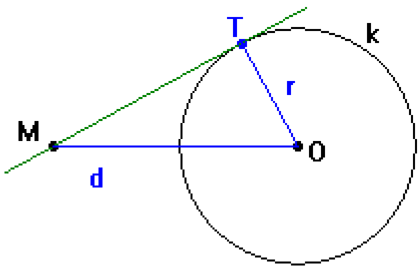
MDA, jelikož mají stejný ještě úhel při vrcholu *M*. Platí tedy tato rovnost: $|MB|/|MD| = |MC|/|MA|$, odtud $|MA|.|MB| = |MC|.|MD|$.



Obr. 2.3

Zavedeme-li, že úsečka *MO* má délku *d*, pak platí rovnost $|MA|.|MB| = (d - r).(d + r) = d^2 - r^2 = m\ (M,k)$ – mocnost bodu *M* ke kružnici *k*.

Podle obr. 2.4 máme dokázat, že platí $|MA|.|MB| = |MT|^2$. Důkaz provedeme pomocí Pythagorovy věty. Z obr. 2.4 je patrné, že platí $|MT|^2 = d^2 - r^2$, tzn. $|MA|.|MB| = |MT|^2$.

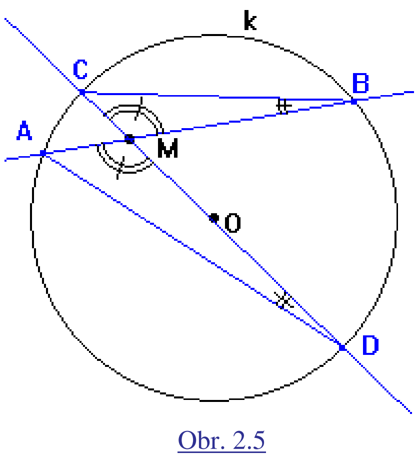


Obr. 2.4

Poznámka: Je-li *M* vně kružnice *k*, pak $m = m(M,k) > 0$.

b) *M* je uvnitř kružnice *k* (obr. 2.5)

Důkaz provedeme stejně jako jsme dokazovali první větu. Akorát se nám pak změní tato rovnost: $|MA|.|MB| = (r - d).(r + d) = r^2 - d^2 = -\ m\ (M,k)$.

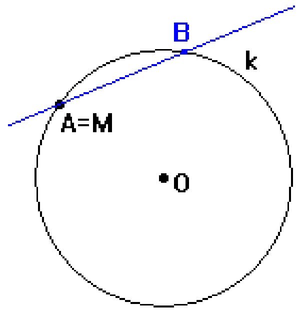


Obr. 2.5

Poznámka: Je-li bod *M* uvnitř kružnice *k*, pak $m = m(M,k) < 0$.

c) *M leží na kružnici k*

Důkaz je zřejmý z obr. 2.6. Vidíme, že $d = r$, proto $r^2 - d^2 = 0$. Platí tedy $m = m(M,k) = 0$.



Obr. 2.6

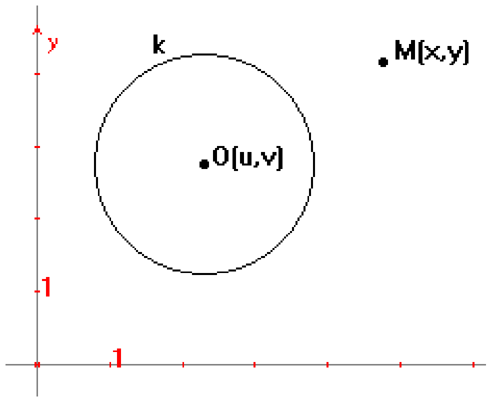
2.2.2 Význam čísla m(M,k) v analytické geometrii

Mocnost bodu ke kružnici úzce souvisí s analytickým vyjádřením kružnice. Víme, že $m(M,k) = |MO|^2 - r^2$. Délku úsečky MO analyticky vyjádříme takto: $|MO| = (x-u)^2 + (y-v)^2$ (obr. 2.7). Po dosazení získáme rovnici $m(M,k) = (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2$ a ta v rovnosti s nulou není nic jiného než rovnicí kružnice.

Pokud M leží na k ($m = 0$), pak platí $(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0$.

Pokud M je vnější bod k ($m > 0$), pak platí $(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 > 0$.

Pokud M je vnitřní bod k ($m < 0$), pak platí $(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 < 0$.



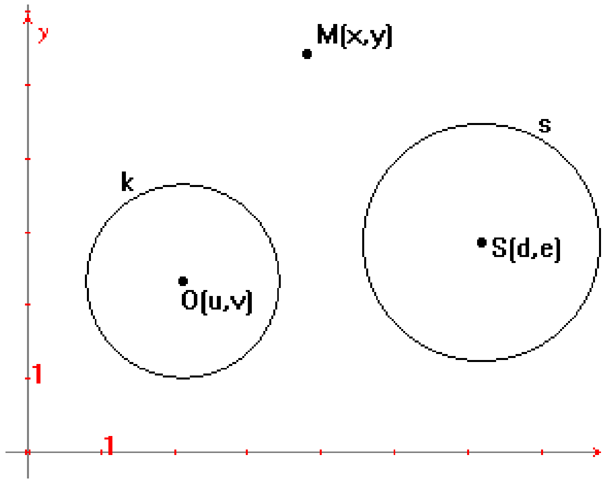
Obr. 2.7

2.2.3 Věty o chordále

Věta 7: Množinou všech bodů v rovině, které mají tutéž mocnost ke dvěma daným kružnicím k_1, k_2 je přímka kolmá na spojnici středů obou kružnic k_1, k_2. Nazývá se **chordála** kružnic k_1, k_2 a v tomto případě ji budeme označovat $ch(k_1, k_2)$.
Jsou-li dány tři kružnice k_1, k_2, k_3, pak chordály příslušné dvojicím (k_1, k_2), (k_2, k_3) a (k_1, k_3) jsou buď navzájem rovnoběžné, nebo se všechny tři protínají v jediném bodě (tzv. potenčním středu kružnic k_1, k_2, k_3).

Důkaz:

Hledáme množinu bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím k a s. Už víme, že $m(M,k) = (x-u)^2 + (y-v)^2 - r_1^2$ (viz. Význam čísla m(M,k) v analytické geometrii). Analogicky vyjádříme i $m(M,s)$, takže $m(M,s) = (x-d)^2 + (y-e)^2 - r_2^2$ (obr. 2.8). Jestliže množina bodů má mít stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, musí platit $(x-u)^2 + (y-v)^2 - r_1^2 = (x-d)^2 + (y-e)^2 - r_2^2$. Po upravení získáme rovnici $(d-u).x + (e-v).y + c = 0$. Položíme $(d-u) = a$ a $(e-v) = b$ a dostaneme rovnici přímky $a.x + b.y + c = 0$ (normálová rovnice chordály). Souřadnice (a,b) patří vektoru ***OS*** a zároveň jsou souřadnicemi normálového vektoru chordály, takže jsme zjistili, že chordála je **přímka** kolmá na přímku OS.



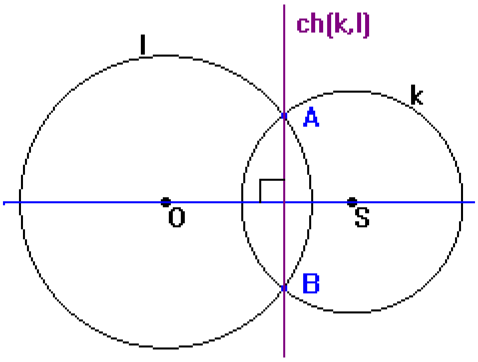
Obr. 2.8

Máme zadané kružnice $k(O,r_1)$, $s(S,r_2)$ a bod M.

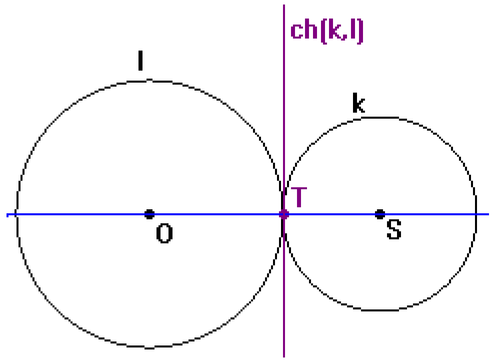
2.2.4 Jak sestrojit chordálu

Jsou dány dvě kružnice $k(S,r_1)$ a $l(O,r_2)$.

Jestliže se kružnice k, l protínají v bodech A, B, je jejich chordálou přímka AB, neboť body A, B mají k oběma kružnicím stejnou mocnost (nulovou). Tento případ můžete vidět na obr. 2.9. Dotýkají-li se kružnice k, l, je jejich chordálou jejich společná tečna t ve společném bodě T (obr. 2.10). Každý bod X přímky t má totiž k oběma kružnicím stejnou mocnost rovnající se číslu $|XT|^2$.

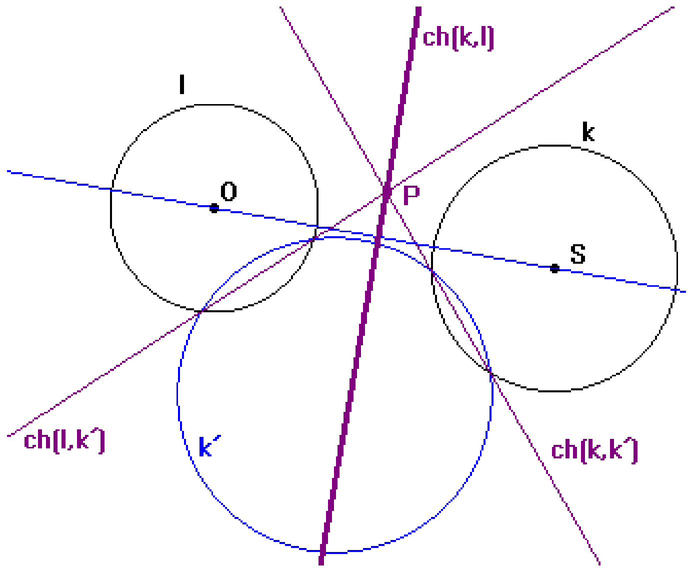


Obr. 2.9



Obr. 2.10

Pokud se kružnice k, l ani neprotínají, ani nedotýkají, musíme zvolit libovolnou kružnici $k´$, která obě kružnice k, l protíná (obr. 2.11). Průsečík chordály kružnic k, $k´$ a chordály l, $k´$ má pak stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k, l, m, a musí jím tedy procházet i chordála kružnic k, l. O této chordále víme, že je kolmá ke spojnici středů kružnic k, l, a můžeme jí tedy sestrojit. Střed pomocné kružnice $k´$ nesmíme zvolit na spojnici OS, jelikož by byla chordála kružnic k, $k´$ s chordálou kružnic l, $k´$ rovnoběžná.



Obr. 2.11
P…potenční bod.

2.2.5 *Mongeova věta*

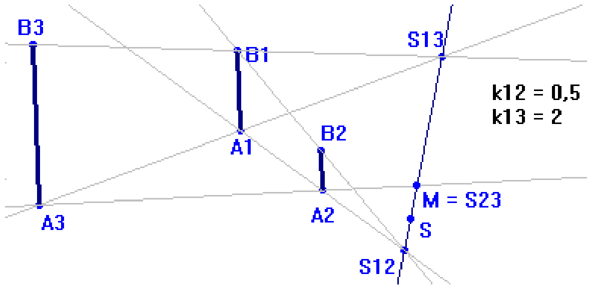
Věta 8 (Mongeova): Jsou-li dva útvary stejnolehlé s třetím, pak jsou stejnolehlé i mezi sebou. Přitom středy tří stejnolehlostí leží na téže přímce.

Důkaz:

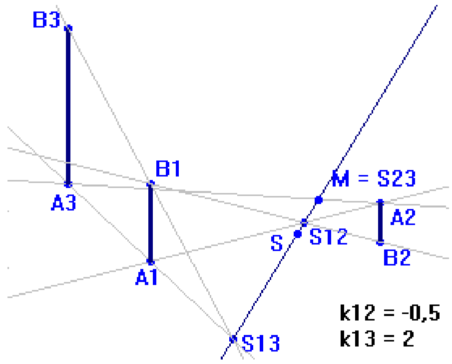
Nechť jsou útvary U_2, U_3 stejnolehlé s útvarem U_1. Označíme H_{ij} stejnolehlost, která převádí útvar Ui na útvar Uj, její střed pak S_{ij} a koeficient k_{ij}. V útvaru U_1 zvolme pevně bod A_1 tak, aby pro jeho obrazy A_2, A_3 ve stejnolehlostech H_{12}, H_{13} platilo $A_2 \neq A_3$. Na přímce A_2A_3 dále zvolme bod M tak, aby platilo $\boldsymbol{MA_3} = k_{13} / k_{12} \ . \ \boldsymbol{MA_2}$[1]. Snadno ověříme, že útvar U_3 je obrazem útvaru U_2 ve stejnolehlosti H_{23} se středem $S_{23} = M$ a koeficientem $k_{23} = k_{13} / k_{12}$. Jsou-li totiž B_2 a B_3 obrazy libovolného bodu B_1 útvaru U_1 ve stejnolehlostech H_{12} a H_{13}, je úsečka A_3B_3 rovnoběžná s A_2B_2, neboť jsou obě rovnoběžné s A_1B_1. Pro jejich délky platí $|A_3B_3| / |A_2B_2| = (|k_{13}| . |A_1B_1|) / (|k_{12}| . |A_1B_1|) = |k_{23}|$, a orientace je určena znaménkem koeficientu k_{23}, to je dáno znaménky koeficientů k_{12} a k_{13}. Mohou nastat právě 4 různé situace, jež jsou znázorněny na obr. 2.12 a, b, c, d. Pomocí těchto obrázků pak již snadno ověříme, že pro libovolný bod B_1 útvaru U_1 a jeho obrazy B_2, B_3 platí $\boldsymbol{S_{23}B_3} = k_{23} \ . \ \boldsymbol{S_{23}B_2}$. Je tedy B_3 obrazem B_2 ve stejnolehlosti H_{23}.

Zbývá dokázat, že S_{23} leží na přímce $S_{12}S_{13}$. Přidejme k útvaru U_2 bod S_{23}. Jeho obrazem ve stejnolehlosti H_{12} nechť je bod S. Protože je S_{23} samodružný ve stejnolehlosti H_{23}, je obrazem bodu S ve stejnolehlosti H_{13} opět bod S_{23}. To jsme chtěli dokázat.

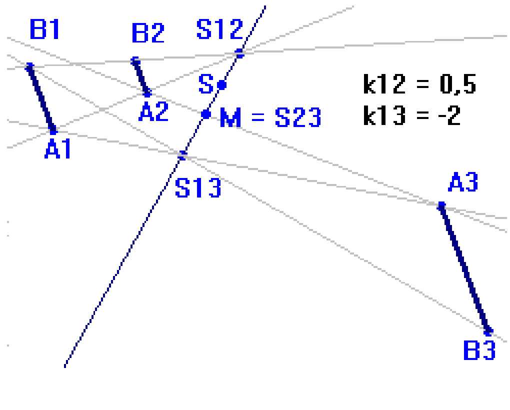
[1] Symbolem ***XY*** rozumíme orientovanou úsečku s počátečním bodem X a koncovým bodem Y.



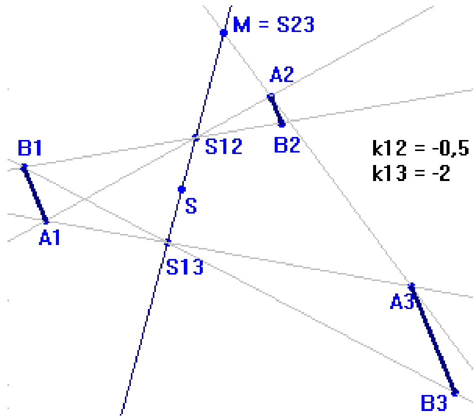
Obr. 2.12 a) $k_{12} > 0$, $k_{13} > 0$, pak $k_{23} > 0$



Obr. 2.12 b) $k_{12} < 0$, $k_{13} > 0$, pak $k_{23} < 0$



Obr. 2.12 c) $k_{12} > 0$, $k_{13} < 0$, pak $k_{23} < 0$

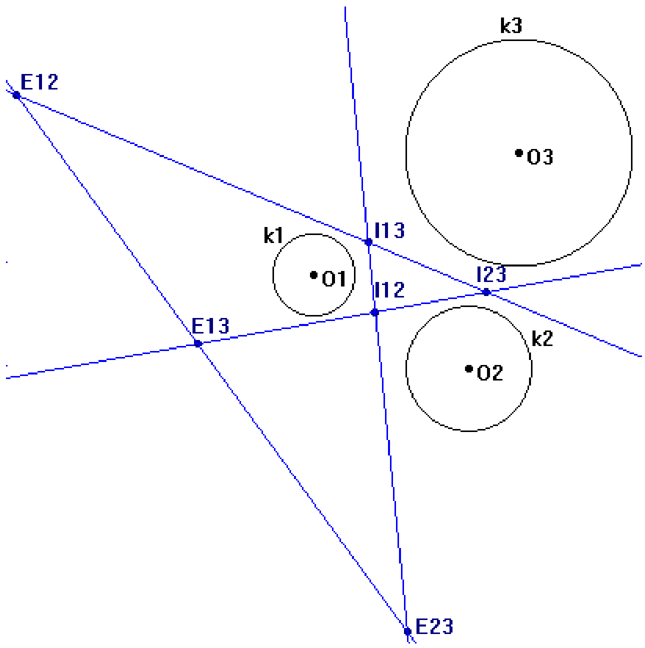


Obr. 2.12 d) $k_{12} < 0$, $k_{13} < 0$, pak $k_{23} > 0$

Důsledek věty 8:

Z důkazu věty 6 plyne, že koeficienty zmíněných stejnolehlostí H_{12}, H_{13} a H_{23} jsou buď všechny tři kladné, nebo jsou právě dva záporné a jeden kladný (obr. 2.13).

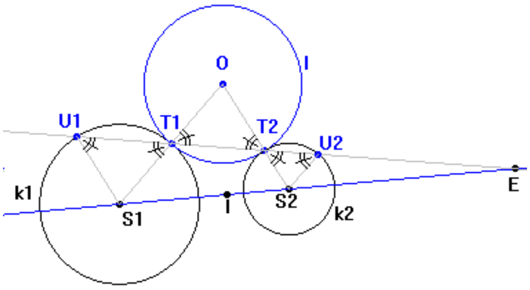
Každou ze čtyř přímek, na nichž leží některá z trojic středů stejnolehlostí (E_{12}, E_{13}, E_{23}), (E_{12}, I_{13}, I_{23}), (E_{23}, I_{12}, I_{13}) a (E_{13}, I_{13}, I_{12}) kružnic k_1, k_2, k_3 nazveme osou podobnosti kružnic k_1, k_2 a k_3 (viz. obr. 2.13).



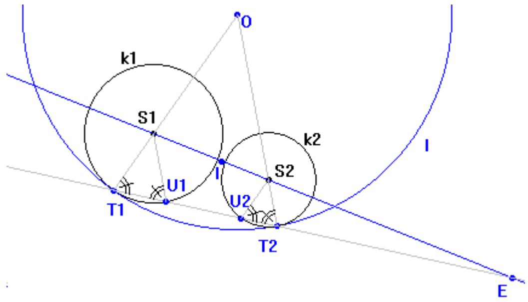
Obr. 2.13

Důsledkem věty 8 je i následující věta:

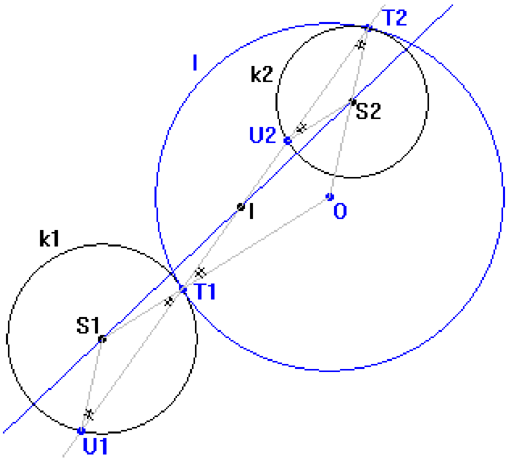
Věta 9: Nechť jsou dány kružnice k_1, k_2. Jejich středy stejnolehlosti označme E, I. Pak pro každou kružnici l, která se dotýká kružnic k_1, k_2 v bodech T_1, T_2 platí: Přímka T_1T_2 prochází právě jedním z bodů E, I (obr. 2.14).



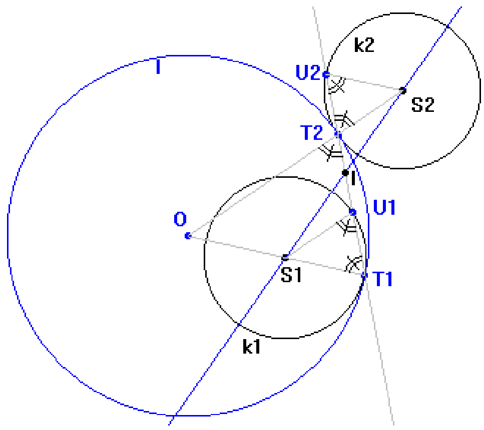
Obr. 2.14 a)



Obr. 2.14 b)



Obr. 2.14 c)



Obr. 2.14 d)

Věta 10: Střed stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 má stejnou mocnost ke každé kružnici dotýkající se kružnic k_1, k_2 tak, že body dotyku leží na stejné přímce jako tento střed.

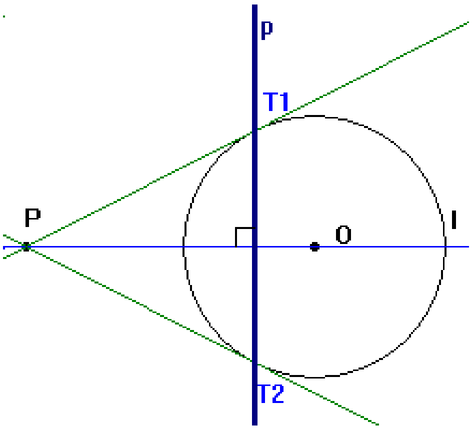
Důkaz:

V tomto důkazu využijeme podobnost stejnolehlých trojúhelníků EU_1S_1, ET_2S_2 a ES_1T_1, ES_2U_2 (obr. 2.14 a)). Vyjdeme z rovností $r_1/r_2 = U_1S_1/T_2S_2 = EU_1/ET_2$ a $r_1/r_2 = S_1T_1/S_2U_2 = ET_1/EU_2$, odtud vyjádříme $EU_1/ET_2 = ET_1/EU_2$ a poté $EU_1.EU_2 = ET_1.ET_2$. Když použijeme druhou mocninu $m(E,l)$ bude platit rovnost $m^2(E,l) = (ET_1.ET_2)^{2} = (ET_1.ET_2).(EU_1.EU_2) = (ET_1.EU_1).(ET_2.EU_2)$. Víme, že $ET_1.EU_1 = m(E,k_1)$ *a* $ET_2.EU_2 = m(E, k_2)$, a proto $m(E,l) = \sqrt{(m(E,k_1).\ m(E, k_2))}$. A tento vztah je vyjádřením geometrického průměru.

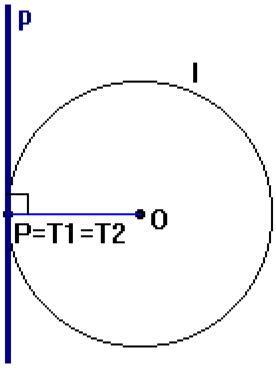
2.3 Polární vlastnosti kružnice

Mám zadaný bod P a kružnici $l(O,r)$. Pokud bod P leží vně kružnice l, lze vést ke kružnici dvě tečny, tím získáme dva body dotyku T_1 a T_2. Sečna procházející oběma body T_1 a T_2 se nazývá polára p bodu P vzhledem ke kružnici, bod P nazýváme pólem přímky p jdoucí body T_1 a T_2 (obr. 2.15 a)). Pokud bod P leží na kružnici l, pak zároveň leží i na své poláře p, která je tečnou vedenou bodem P ke kružnici l

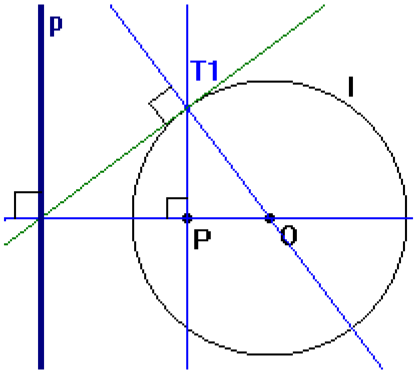
(obr. 2.15 b)). Nakonec pokud bod P leží uvnitř kružnice l, je jeho polárou přímka p, která je kolmá na přímku OP a procházející průsečíkem přímky OP a tečny vedené bodem T_1, kde pod T_1 je průsečík kolmice na OP vedené bodem P a kružnice l (obr. 2.15 c)).



Obr. 2.15 a) *P* vně kruhu



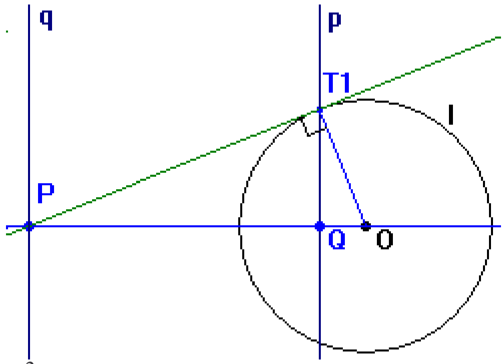
Obr. 2.15 b) *P* na kružnici



Obr. 2.15 c) *P* uvnitř kruhu

2.3.1 Polarita v souvislosti s kruhovou inverzí

Na obr. 2.16 vidíme sdružené póly P, Q a k nim sestrojené chordály p, q vzhledem ke kružnici $l(O,r)$. Pojmenujeme si délku úsečky PO písmenkem $x´$ a délku úsečky QO písmenkem x. Použijeme-li Euklidovu větu o odvěsně pro trojúhelník POT, vyjde nám vztah $x \,.\, x´ = r^2$, a odtud $x´ = r^2 / x$. Kruhová inverze vzhledem ke kružnici l je transformace, při níž vzor i obraz leží na téže polopřímce s počátečním bodem ve středu kružnice inverze, při čemž vzdálenosti těchto bodů od středu kružnice mají tu vlastnost, že jejich součin je roven čtverci poloměru inverze. A to je přesně náš vztah $x.x´ = r^2$.

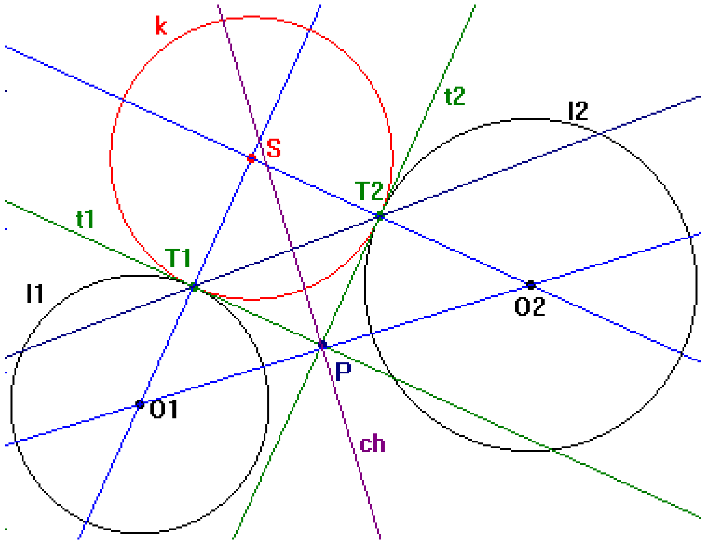


Obr. 2.16

Poznámka: Polárně sdružené body jsou vlastně vzor a obraz v kruhové inverzi.

2.3.2 Důležité vlastnosti polarity

Věta 11: Jestliže se kružnice k dotýká kružnic l_1 a l_2, pak pól P spojnice dotykových bodů vzhledem ke kružnici k leží na chordále kružnic l_1 a l_2 (obr. 2.17).



Obr. 2.17

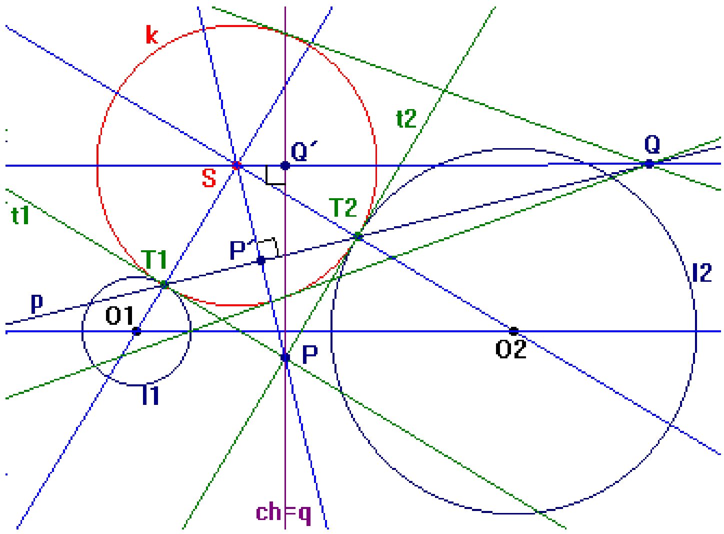
Důkaz:

Na obr. 2.17 vidíme, že bod P je průsečík tečen kružnice k vedených dotykovými body T_1 a T_2. Jeho polárou je přímka T_1T_2. Je známo, že délky tečen z vnějšího bodu ke kružnici se rovnají, tedy $|PT_1| = |PT_2|$ a to znamená, že bod P má stejnou mocnost $m = |PT_1|^2 = |PT_2|^2$ ke kružnicím l_1, l_2. Leží tedy na jejich chordále.

Věta 12: Pól Q chordály dvou kružnic l_1 a l_2 vzhledem ke kružnici k, která se prvých dvou dotýká, leží na spojnici dotykových bodů - polára pólu P (obr. 2.18).

Důkaz:

Takže máme dokázat, že bod Q leží na spojnici bodů T_1 a T_2, tato spojnice je polárou p pólu P. Vím že pól P leží na chordále q kružnic l_1 a l_2. S využitím vztahu $x.x' = r^2$ dostáváme: $|SQ'|.|SQ| = r^2 = |SP'|.|SP|$, odtud $|SQ|/|SP'| = |SP|/|SQ'|$. Všimněme si, že velikost úhlu QSP' je rovna velikosti úhlu PSQ', a proto tedy trojúhelníky $\Delta SQ'P$ a $\Delta SP'Q$ jsou podobné podle věty *sus*. Jsou tedy úhly $SQ'P$ a $SP'Q$ stejně velké a to znamená pravé, neboť úhel $SQ'P$ je pravý. Přímka QP' je proto kolmá na přímku SP', a tak Q leží na přímce $T_1T_2 = p$.



Obr. 2.18

2.4 Dilatace

Definice dilatace

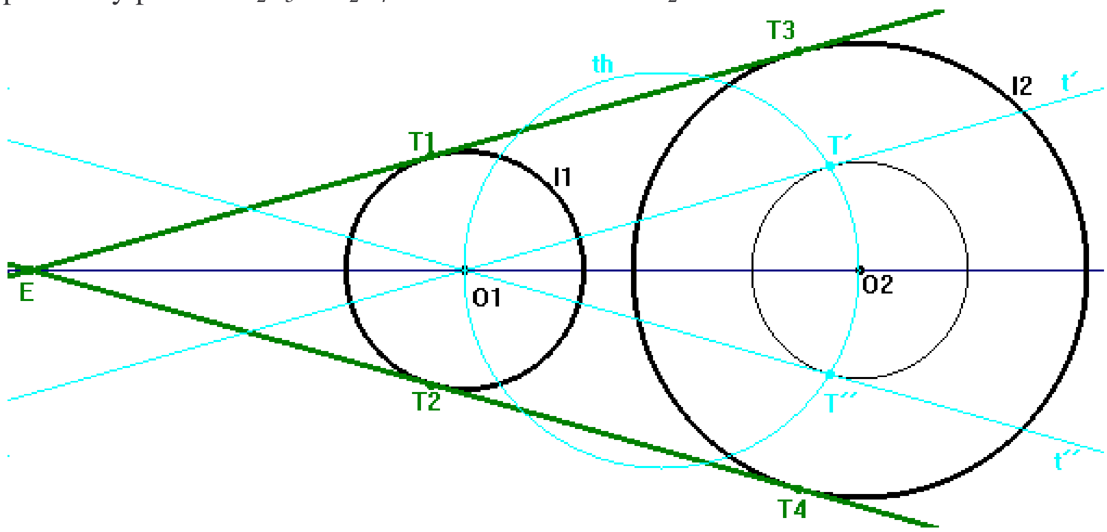
Dilatací rozumíme transformaci, při které se přímky posunují o danou délku λ ve směru k nim kolmém v přímky s původními rovnoběžné. Délku λ nazýváme *velikostí dilatace*. Kružnice o poloměru r se dilatací zobrazí na soustřednou kružnici o poloměru ($r + r$ nebo r - r).

Ve zvláštním případě může přejít dilatací kružnice v bod, nebo naopak bod v kružnici.

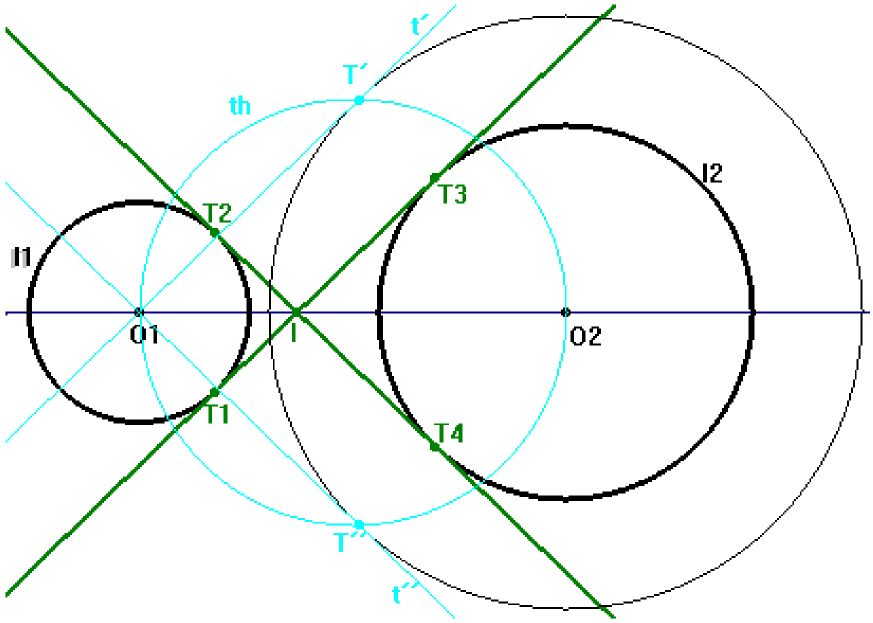
2.4.1 Užití dilatace při sestrojování tečen dvou kružnic

Zadání: Máme sestrojit k zadaným kružnicím $l_1(O_1,r_1)$ a $l_2(O_2,r_2)$ tečny.

Řešení: Při řešení tohoto úkolu dilatací použijeme transformaci kružnice l_1 do bodu O_1 (to znamená, že kružnici l_1 zmenšíme do bodu O_1 o její poloměr r_1). Tím pádem se nám poloměr r_2 druhé kružnice l_2 zvětší nebo zmenší o poloměr r_1 první kružnice l_1. Zmenšením poloměru r_2 kružnice l_2 o poloměr r_1 kružnice l_1 se zabývá obr. 2.19 a) a druhým případem obr. 2.19 b). V obou případech užitím dilatace převedeme úlohu nalezení tečen dvou kružnic na úlohu nalezení tečen vedených z bodu O_1 ke kružnici l_2. V tomto případě si sestrojíme Thaletovu kružnici *th* nad úsečkou O_1O_2, v průsečíku s transformovanou kružnicí l_2 nám vzniknou body dotyku $T´$ a $T´´$ a tudíž můžeme sestrojit pro tento případ tečny $t´$ a $t´´$ procházející body dotyku a bodem O_1. Toto řešení je na obrázcích znázorněno světle modrou barvou. Po návratu kružnic l_1 a l_2 do původního stavu se nám tečny $t´$ a $t´´$ posunou do přímek T_1T_3 a T_2T_4. Takže je zřejmé, že tečny T_1T_3 a T_2T_4 sestrojíme jako rovnoběžky k tečnám $t´$, $t´´$ procházející bodem T_3 a T_4. Body T_3 a T_4 sestrojím jako průsečíky přímek O_2T_3 a O_2T_4 se zadanou kružnicí l_2.



Obr. 2.19 a)



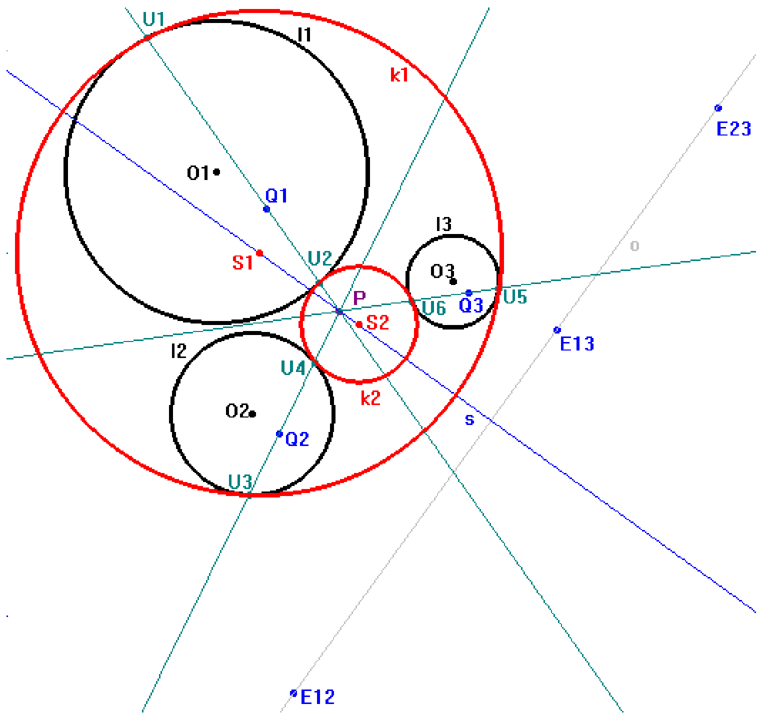
Obr. 2.19 b)

2.5 Gergonnovo řešení obecné Apolloniovy úlohy

Gergonnovo řešení je velice zajímavé a vychází z poznatků uvedených v kapitolách předešlých. Ukážeme si již zde toto řešení pro Apolloniovu úlohy typu *kkk*, protože je budeme potřebovat pro speciální případy Apolloniových úloh v kapitole 4.

Zadání: Jsou dány tři kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ a $l_3(O_3,r_3)$. Máme sestrojit kružnici *k*, která se dotýká všech tří kružnic.

Řešení: Tuto úlohu vyřeším jen pro jednu osu podobnosti a to pro tu, která protíná jen vnější středy podobnosti (obr 2.20). Z obr. 2.13 je patrné, že tři kružnice mají čtyři osy podobnosti. K jedné ose se dají nalézt dvě kružnice. To znamená, že pro všechny čtyři osy je dohromady osm řešení (takže úloha má osm řešení). Z *věty 10* plyne, že pokud se výsledné kružnice dotýkají kružnic zadaných, prochází chordála těchto kružnic středy podobnosti



Obr. 2.20

kružnic l_1, l_2, l_3, to znamená že je osou podobnosti o. Z *věty 10* také vyplývá, že střed podobnosti výsledných kružnic k_1, k_2 leží na chordále každé dvojice zadaných kružnic. To znamená, že tento střed je potenčním bodem P zadaných kružnic. Odtud také tedy plyne, že středy S_1 a S_2 leží na kolmici s spuštěné z potenčního středu P na jejich osu podobnosti o. Z *věty 12* vyplývá, že spojnice dotykových bodů výsledných kružnic s každou z kružnic l_1, l_2, l_3 prochází příslušným pólem Q_i osy podobnosti o (chordály výsledné kružnice k vzhledem k zadaným kružnicím). A z *věty 9* plyne, že stejná spojnice (spojnice dotykových bodů) prochází středem podobnosti výsledných kružnic, to znamená bodem P. Takže takto získáme body dotyku zadaných kružnic s výslednými kružnicemi. Z mého obrázku je patrné, že jsem nemusela sestrojovat přímku s, protože by stačilo sestrojit výsledné kružnice jako kružnice opsané trojúhelníkům $U_1U_3U_5$ a $U_2U_4U_6$ (našla jsem póly ke všem zadaným kružnicím).

3. Pappovy úlohy

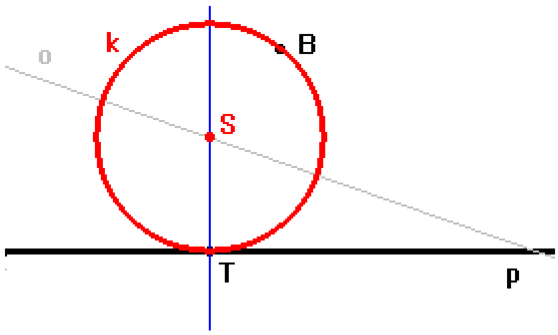
3.1 Úloha typu „Bp_B“

Zadání: Sestrojte kružnici k, která se dotýká dané přímky p v daném bodě T a prochází dalším daným bodem B.

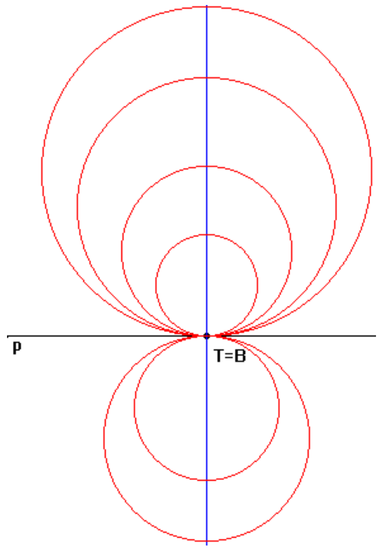
Řešení: Použijeme metodu množin bodů dané vlastnosti. Střed S hledané kružnice leží na kolmici, která prochází bodem T. Tato kolmice je množina středů všech kružnic dotýkajících se přímky p v bodě T. Pokud bod B neleží na přímce p, úsečka BT je tětivou hledané kružnice k a bod S tedy leží na ose o této úsečky (množina středů všech kružnic, jejichž tětivou je úsečka BT). Tím je střed S určen jednoznačně (obr. 3.1 a)).

Pokud by bod B ležel na přímce p a byl různý od T neměla by úloha žádné řešení.

Pokud by bod B ležel na přímce p a byl totožný s bodem T, měla by úloha nekonečně mnoho řešení (obr. 3.1 b)).



Obr. 3.1 a)



Obr. 3.1 b)

3.2 Úloha typu „pp_B“

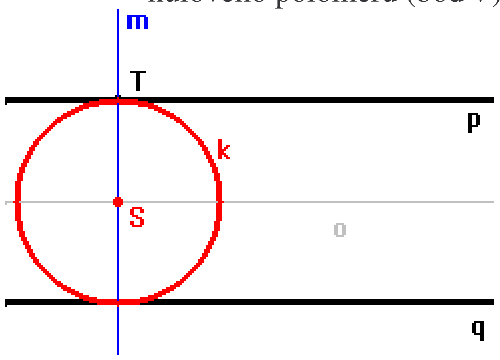
Zadání: Sestrojte kružnici k, která se dotýká dvou daných přímek p, q a prochází daným bodem T, který leží na jedné z přímek.

Řešení: Řešení provedeme metodou množin bodů dané vlastnosti. Střed S hledané kružnice k leží na přímce m kolmé k přímce p vedené bodem T (tato kolmice je množina středů všech kružnic dotýkajících se přímky p v bodě T) a zároveň na ose o souměrnosti daných dvou přímek. Platí tedy $S \in m \cap o$.

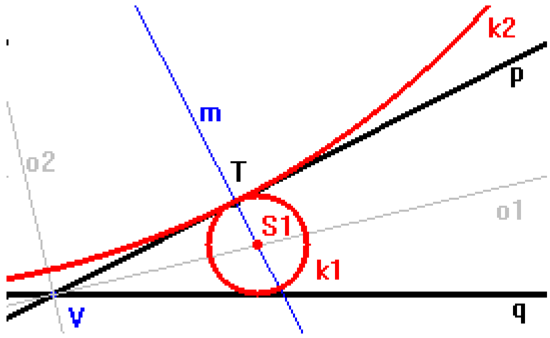
Rozlišíme dvě možnosti:

a) $\boldsymbol{p \parallel q}$, pak má úloha jediné řešení (obr. 3.2 a)).

b) Jsou-li $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ **různoběžky**, pak mají dvě osy souměrnosti (o_1 a o_2). Úloha má dvě řešení, pokud T neleží v průsečíku V přímek p, q, jak vidíme na obr. 3.2 b). Je-li $T = V$, splňuje podmínky úlohy pouze jediná kružnice nulového poloměru (bod V).



Obr. 3.2 a)



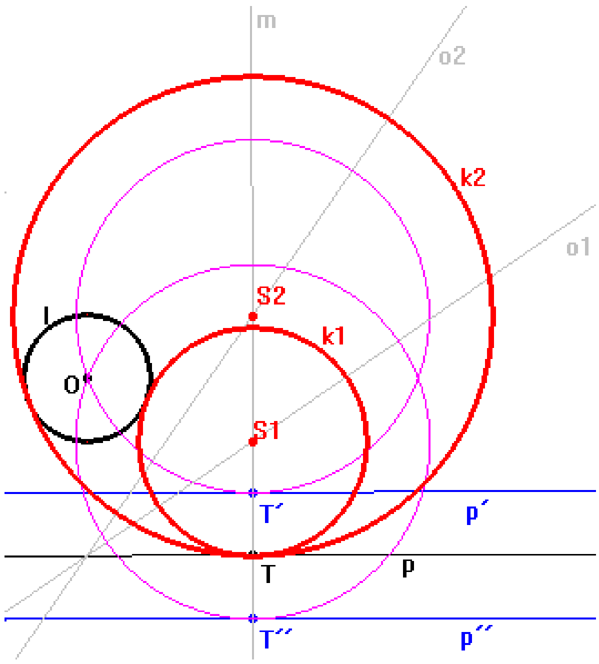
Obr. 3.2 b)

3.3 Úloha typu „kp_B“

Zadání: Sestrojte kružnici k, která se dotýká dané kružnice $l(O,r)$ a dané přímky p v daném bodě T.

Řešení 1: Řešení provedeme užitím dilatace (obr. 3.3 a)). Tuto úlohu převedu na úlohu typu Bp_B.

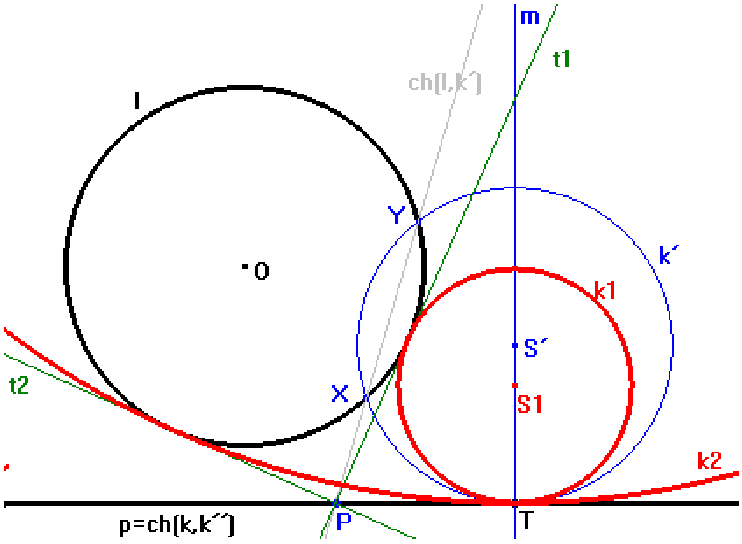
Narýsujeme si přímky p' a p'', ty jsou rovnoběžné s přímkou p a jsou od ní vzdáleny o poloměr r zadané kružnice l. Zadaná kružnice se mi zmenší o její poloměr r na bod O. Tím mi vzniknou dvě nové úlohy: $Op'_{B'}$ a $Op''_{B''}$ (Bp_B). Ty vyřeším metodou výše uvedenou (metoda množin bodů dané vlastnosti). Kružnice, které nám vyjdou, nakonec zmenšíme (resp. zvětšíme) opět o poloměr zadané kružnice.



Obr. 3.3 a)

Řešení 2: Druhé řešení provedu pomocí mocnosti bodu ke kružnici (obr. 3.3 b)).

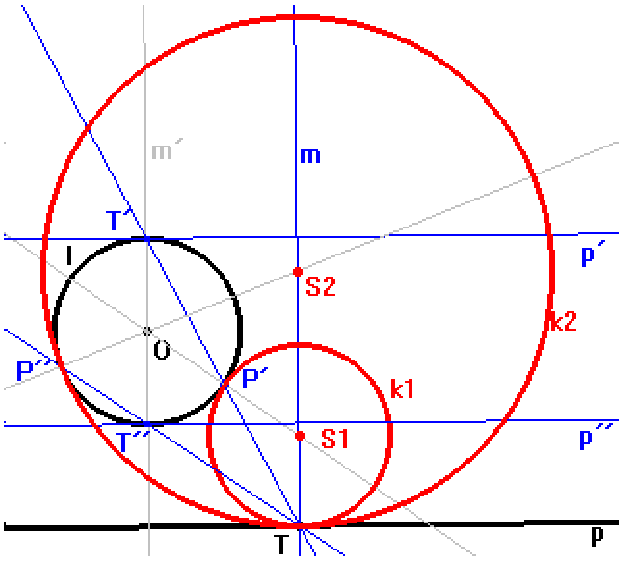
Nejprve si sestrojíme přímku m (množina středů kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě T), která je kolmá na přímku p v daném bodě T. Na této kolmici bude ležet střed S' pomocné kružnice k', která prochází zadanou kružnicí dvěma body X, Y a dotýká se přímky p v bodě T. Sestrojíme přímku XY, ta je chordálou kružnic $k´$, l. Tam, kde nám protne přímku p, leží potenční bod P kružnic k, l, $k´$, protože přímka p je chordálou kružnic $k´$, k. Bodem P povedeme tečny ke kružnici l, protože to jsou chordály ke kružnicím l, k. Středy hledaných kružnic jsou zřejmě průsečíkem přímky m a normál kružnice l v bodech dotyku sestrojených tečen.



Obr. 3.3 b)

Řešení 3: Tentokrát tuto úlohu vyřeším stejnolehlostí (obr. 3.3 c)).

Na obr. 3.3 c) je opět sestrojena kolmice m (množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky p v daném bodě T) kolmou na přímku p v bodě T. Hledané kružnice jsou při takovémto rozložení zadaných objektů dvě, a proto také budou dva středy stejnolehlosti $P´$, $P´´$ (body dotyku zadané kružnice l s hledanými kružnicemi k_1 a k_2). V těchto homotetiích se zobrazí hledané kružnice do kružnice l, přímka m do přímky $m´$ (ta je kolmá na přímku p a prochází bodem O) a přímka p do přímky $p´$ a $p´´$. Bod T se zobrazí do bodu $T´$ (ten leží na kružnici l tam, kde jí protíná přímka $p´$) a do bodu $T´´$ (leží na kružnici l tam, kde jí protíná přímka $p´´$). Protože ve stejnolehlosti leží vzor, střed a obraz na jedné přímce, sestrojíme bod $P´$ jako průnik kružnice l a přímky $TT´$ a bod $P´´$ jako průnik kružnice l a přímky $TT´´$. Středy S_1, S_2 hledaných kružnic k_1 a k_2 leží na přímkách $OP´$, $OP´´$ (množiny středů všech kružnic stejnolehlých ke kružnici l podle středů stejnolehlostí $P´$ a $P´´$) a zároveň na přímce m.



Obr. 3.3 c)

Pokud zadaná přímka p zadanou kružnici l neprotíná, má úloha dvě řešení.

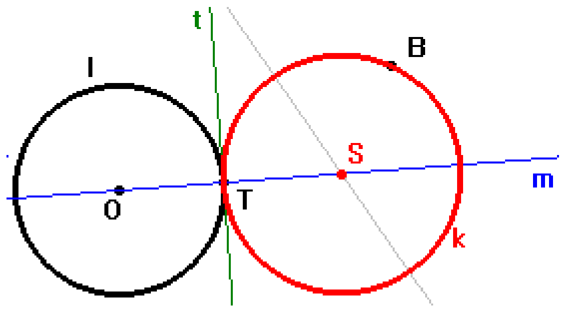
Pokud zadaná přímka p je tečnou zadané kružnice l a bod T neleží na kružnici l, má úloha jedno řešení a pro $T \in l$ nekonečně mnoho řešení.

Pokud zadaná přímka *p* zadanou kružnici *l* protíná ve dvou bodech, má úloha dvě řešení pokud $T \notin l \cap p$, a žádné řešení pro $T \in l \cap p$.

3.4 Úloha typu „Bk_B“

Zadání: *Sestrojte kružnici* k, *která se dotýká dané kružnice* l(O,r) *v daném bodě* T *a prochází dalším bodem* B.

Řešení: V této úloze povedeme daným bodem *T* zadané kružnice tečnu k této kružnici (obr. 3.4), převedeme úlohu na úlohu typu „Bp_B“. A vyřešíme metodou množin bodů dané vlastnosti.



Obr. 3.4

Pokud by bod *B* ležel uvnitř kružnice *l*, měla by úloha také jedno řešení.

Pokud by bod *B* ležel na kružnici *l*, byla by řešením daná kružnice *l* v případě $T \neq B$.

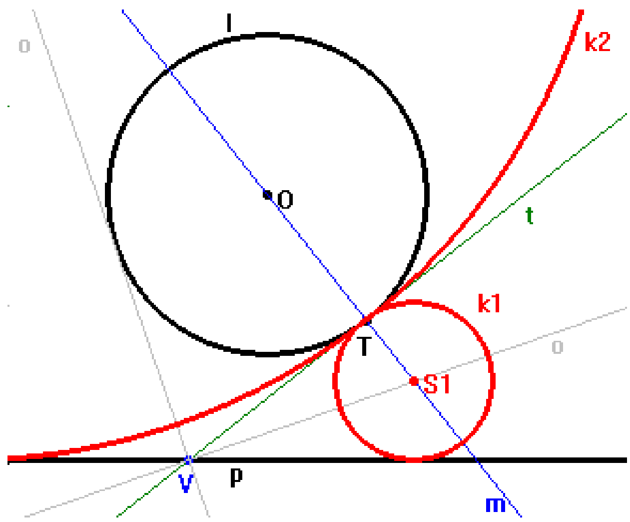
Pokud by bod *B* ležel na kružnici *l* v bodě *T*, měla by úloha nekonečně mnoho řešení.

3.5 Úloha typu „pk_B“

Zadání: Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká dané kružnice *l(O,r)* v daném bodě *T* a dané přímky *p*.

Řešení: Při řešení si tuto úlohu převedeme na úlohu typu „pp_B“ a vyřešíme jí pomocí metody množiny bodů dané vlastnosti.

Vedeme-li daným bodem *T* zadané kružnice tečnu *t* této kružnice (obr. 3.5), převedeme úlohu na úlohu typu „pp_B“.



Obr. 3.5

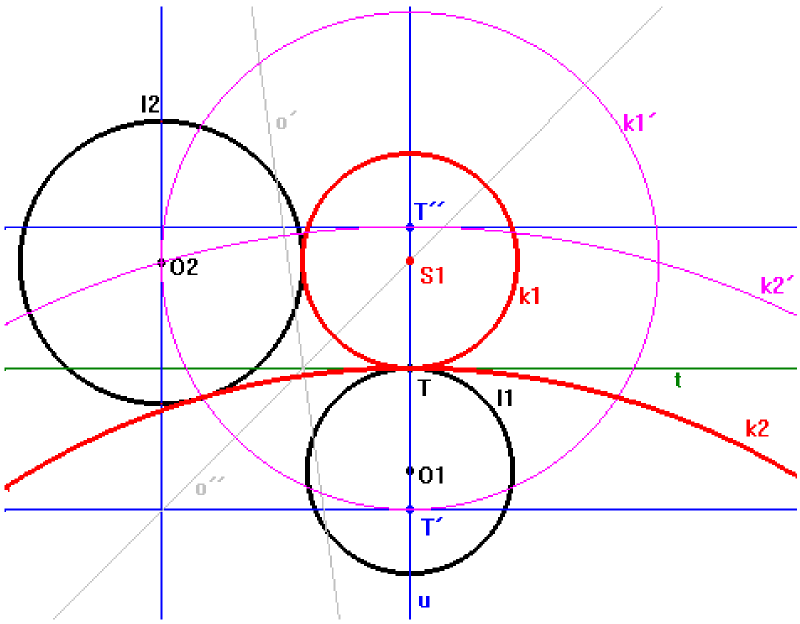
Pokud by přímka protínala kružnici ve dvou bodech (byla by její sečnou) a ani jeden z těch bodů by nebyl bod *T,* pak by úloha měla právě jedno řešení. Pokud by jeden s bodů byl bod *T,* pak by úloha neměla řešení.

Pokud by přímka *p* byla tečnou zadané kružnice a procházela by bodem *T*, pak má úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud by neprocházela bodem *T*, pak by úloha neměla žádné jiné řešení, než je zadaná kružnice.

3.6 Úloha typu „kk$_B$“

Zadání: Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká dvou daných kružnic $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ a prochází bodem *T*, který leží na jedné z kružnic.

Řešení: Tuto úlohu převedeme na úlohu „kp_B“ tak, že povedeme daným bodem *T* kružnice l_1 tečnu k této kružnici (obr. 3.6). Potom si můžete zvolit na další postup v řešení jednu z metod uvedenou v kapitole 3.3. Já jsem si pro další postup zvolila metodu dilatace.



Obr. 3.6

Pokud kružnice nemají společný bod, má úloha dvě řešení.

Pokud by zadané kružnice měly společný jeden bod, neměla by úloha řešení. Pokud by tím společným bodem byl bod *T,* měla by úloha nekonečně mnoho řešení.

Pokud by zadané kružnice měly společné dva body, měla by úloha dvě řešení. Pokud by jedním z těch bodů byl bod *T*, neměla by úloha žádné řešení.

Tato tvrzení platí i v případě, kdy kružnice jsou soustředné nebo jedna leží uvnitř druhé (nezáleží na pořadí).

4. Apolloniovy úlohy

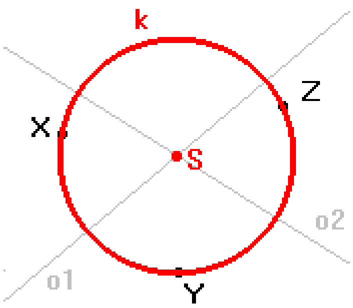
4.1 Úloha bod-bod-bod

Zadání: Jsou dány tři body X, Y, Z. Sestrojte kružnici, která těmito třemi body prochází.

Řešení: Řešení provedeme užitím metody množin bodů dané vlastnosti (obr. 4.1).

Střed S hledané kružnice k musí mít od všech tří daných bodů stejnou vzdálenost (r). Bod S náleží průniku přímek $o1$ a $o2$, kde $o1$ je osou úsečky XY (tzn. množina všech bodů, které mají od bodů X a Y stejnou vzdálenost) a $o2$ je osou úsečky YZ (tzn. množina všech bodů, které mají od bodů Y a Z stejnou vzdálenost). Jde o sestrojení kružnice opsané trojúhelníku XYZ.

Je patrné, že body X, Y, Z nesmí ležet na jedné přímce (úloha by neměla řešení).



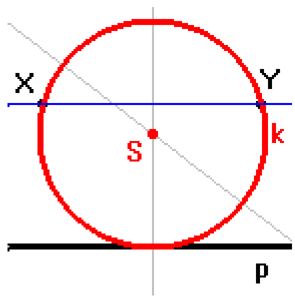
Obr. 4.1

4.2 Úloha bod-bod-přímka

Zadání: Jsou dány dva body X a Y a přímka p. Sestrojte kružnice, která těmito dvěma body X, Y prochází a dotýká se přímky p.

Řešení:
Rozlišíme následující situace:

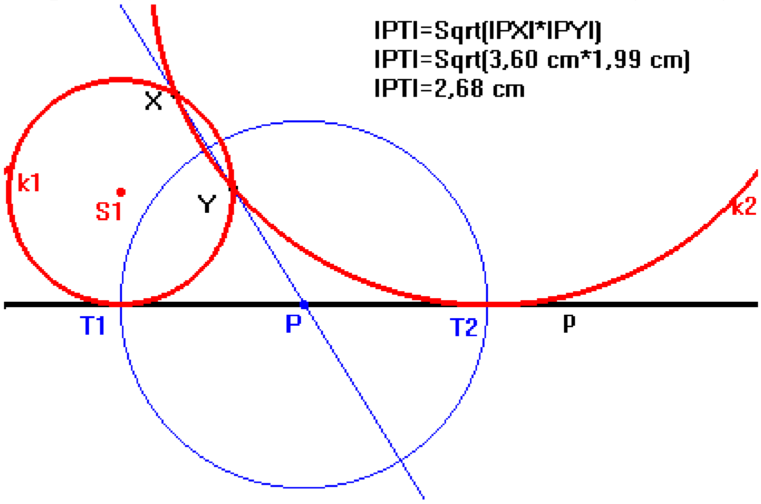
a) Body X, Y leží na přímce p. V tomto případě nemá úloha řešení.
b) Na přímce p leží právě jeden z bodů X, Y. Tím dostáváme zadání Pappovy úlohy typu „Bp_B“.
c) Žádný z bodů X, Y neleží na přímce p. Pro případ, kdy bod X leží v polorovině opačné k polorovině pY, nemá úloha řešení. Pro případ druhý, tzn. že oba body leží v téže polorovině, je nutno rozlišit dvě možnosti, a to jednak, že přímka XY je rovnoběžná s přímkou p (obr. 4.2 a)) a jednak, že přímky XY, p jsou různoběžné (obr. 4.2 b)). V případě prvním je řešením právě jedna kružnice k.



Obr. 4.2 a)

Případem, kdy jsou přímky XY, p různoběžné, se budeme zabývat nyní. Řešení provedeme s využitím algebraicko-geometrické metody.

Jestliže jsou přímky XY a p různoběžné, označme jejich průsečík P. Přímka p je tečnou kružnice k, z čehož vyplývá existence právě jednoho společného bodu T, který je neznámým pomocným bodem. Jelikož leží body X, Y na kružnici k,



Obr. 4.2 b)

lze mocnost bodu P ke kružnici vyjádřit vztahem: $m = |PX| \cdot |PY|$. Pro dotykový bod T přímky p a kružnice k potom platí: $|PT|^2 = |PX| \cdot |PY|$, a odtud $|PT| = \sqrt{(|PX| \cdot |PY|)}$. Pokud si sestrojíme kružnici se středem P a poloměrem $|PT|$ protne nám přímku p ve dvou bodech T_1, T_2, čímž vzniknou dva trojúhelníky XYT_1, XYT_2 a dvě kružnice k_1, k_2 jim opsané. Úloha má dvě řešení.

4.3 Úloha bod-bod-kružnice

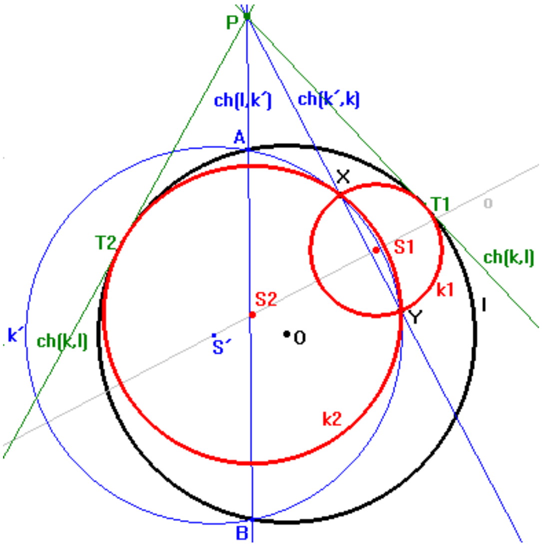
Zadání: Jsou dány body X, Y a kružnice $l(O;r)$. Sestrojte kružnici k, která prochází body X, Y a dotýká se kružnice l.

Řešení:

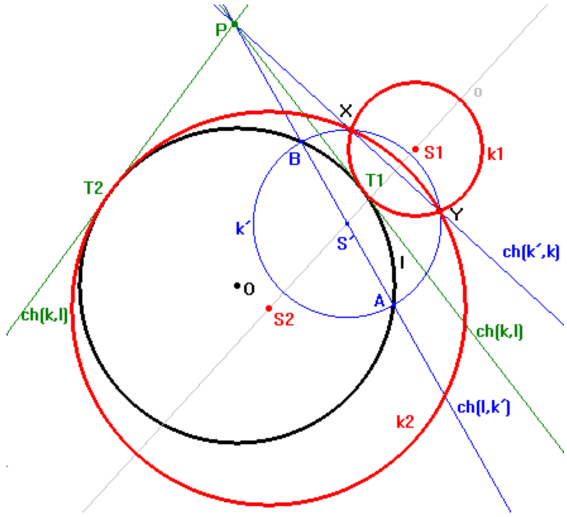
Rozlišíme následující situace:

a) Bod X nebo bod Y leží na kružnici l. V případě, že na kružnici l leží oba dané body X, Y, nemá úloha řešení. Pokud leží na kružnici l právě jeden z bodů X, Y, získáme Pappovu úlohu typu „Bk_B“.
b) Žádný z bodů X, Y neleží na kružnici l. Pro možnost, kdy jeden z bodů leží ve vnitřní oblasti kružnice a druhý ve vnější, nemá úloha opět řešení. Pro možnost druhou, tzn. že oba body jsou buď ve vnitřní nebo ve vnější oblasti kružnice, je úloha dále řešena (obr. 4.3 a, b).

K řešení využijeme mocnost bodu ke kružnici.



[Obr. 4.3 a)](#) body v kružnici

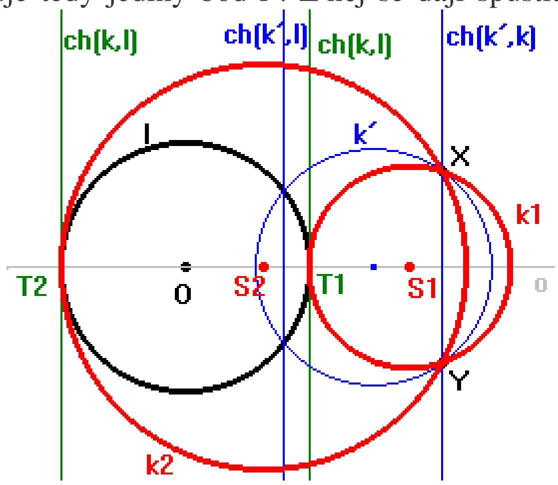


[Obr. 4.3 b)](#) body vně kružnice

Kružnice *k* prochází body *X, Y*, její střed *S* proto leží na ose *o* úsečky *XY*. Hledaná kružnice *k* se dotýká kružnice *l* v bodě *T*. Potom tečna kružnice *l* v bodě *T* je společnou tečnou kružnic *l* a *k* v bodě *T* a zároveň jejich chordálou.

Zvolme nyní libovolnou kružnici *k´*, která prochází body *X, Y* a protíná kružnici *l* ve dvou bodech *A, B*. Přímka *XY* je chordálou kružnic *k, k´*. Najdeme-li potenční střed *P* kružnic *k, k´*a *l*, pak chordála kružnic *k, l* (procházející potenčním středem *P*) je tečnou z bodu *P* ke kružnici *l*. Bod dotyku této chordály a kružnice *l* je hledaný pomocný bod *T*. Střed hledané kružnice *k* leží na přímce *OT* (tzn. na množině středů všech kružnic dotýkajících se v bodě *T* kružnice *l*).

V případě, že osa *o* úsečky *XY* neprochází středem *O* kružnice *l*, jsou chordály kružnic *l, k´* různoběžné přímky a existuje tedy jediný bod *P*. Z něj se dají spustit právě dvě tečny (chordály kružnic *k, l*) na kružnici *l*, čímž získáme dva dotykové body T_1, T_2. V případě, že osa *o* úsečky *XY* prochází středem *O* kružnice *l*, jsou chordály kružnic *l, k, k´* rovnoběžné přímky kolmé na osu *o* ([obr. 4.3 c)](#)). Neexistuje tedy potenční střed *P*. Společná tečna (a zároveň chordála) kružnic *k, l* je kolmá na střednou těchto kružnic a prochází průsečíkem osy *o* a kružnice *l*. Takové průsečíky existují právě dva (T_1, T_2). Úloha má vždy dvě řešení.



[Obr. 4.3 c)](#)

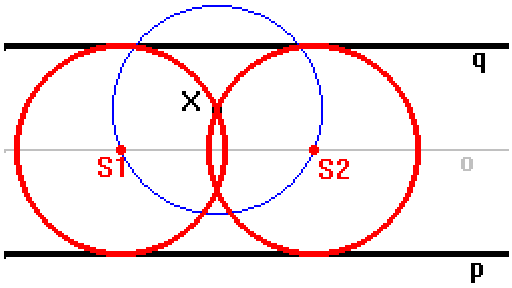
4.4 Úloha bod-přímka-přímka

Zadání: Je dán bod *X* a přímky *p, q*. Sestrojte kružnici *k*, která prochází bodem *X* a dotýká se přímek *p, q*.

Řešení:

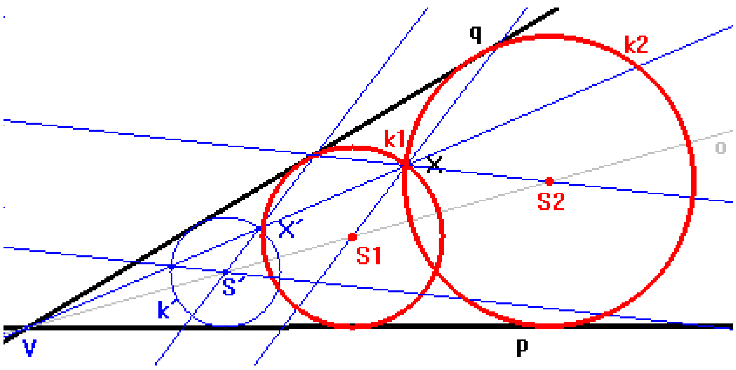
Rozlišíme dva případy polohy zadaných objektů:

a) Přímky *p, q* jsou rovnoběžné. V případě, že bod *X* leží na jedné z přímek *p* nebo *q*, získáme Pappovu úlohu typu „pp_B“. V případě, že bod *X* neleží v rovině vymezené přímkami *p, q,* nemá úloha žádné řešení. Pokud bod *X* leží v rovině vymezenému přímkami *p, q,* má úloha dvě řešení (obr. 4.4 a)). Úlohu vyřešíme metodou množin bodů dané vlastnosti. Sestrojíme si osu *o* rovinného pásu vymezeného přímkami *p, q* (je to množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky *p* a zároveň přímky *q*). Po té si sestrojíme kružnici se středem v bodě *X* a poloměrem určeným vzdáleností osy *o* od přímky *p*.



Obr. 4.4 a)

b) Přímky *p, q* jsou různoběžné. Je-li bod *X* průsečíkem přímek *p, q*, nemá úloha řešení. Leží-li bod *X* na jedné z přímek, dostáváme opět Pappovu úlohu „pp_B“. V poslední možnosti, kdy bod *X* neleží ani na přímce *p* ani na přímce *q*, má úloha dvě řešení (obr. 4.4 b)). K řešení použijeme metodu geometrického zobrazení, konkrétně využijeme stejnolehlosti. Omezíme se na úhel vymezený přímkami *p, q,* jehož prvkem je daný bod.



Obr. 4.4 b)

Hledáme střed *S* kružnice *k*. Přímky *p, q* jsou tečny vedené z jejich průsečíku *V* ke kružnici *k*. Sestrojíme libovolnou pomocnou kružnici *k´*, pro kterou platí, že přímky *p, q* jsou jejími tečnami. Hledaná kružnice *k* a pomocná kružnice *k´* jsou stejnolehlé. Protože bod *X* leží na kružnici *k*, bude na kružnici *k´* ležet s ním stejnolehlý bod *X´*. Střed, vzor a obraz leží v homotetii na jedné přímce, bod *X´* tedy nalezneme jako průsečík přímky *VX* a kružnice *k´*. Jelikož jsou ve stejnolehlosti všechny směry samodružné, budou přímky *SX, S´X´* rovnoběžné. Střed *S* hledané kružnice *k* leží na přímce vedené bodem *X* rovnoběžně s přímkou *S´X´* a zároveň na ose *o* úhlu vymezeného v rovině přímkami *p, q*.

Přímka *VX* protne kružnici *k´* ve dvou bodech *X´*, které určují dvě stejnolehlosti. Ty převedou kružnici *k´* na dvě kružnice *k*. Úloha má tedy dvě řešení.

4.5 Úloha bod-přímka-kružnice

Zadání: Je dán bod X, přímka p a kružnice l. Sestrojte kružnici k, která prochází bodem X a dotýká se přímky p a kružnice l.

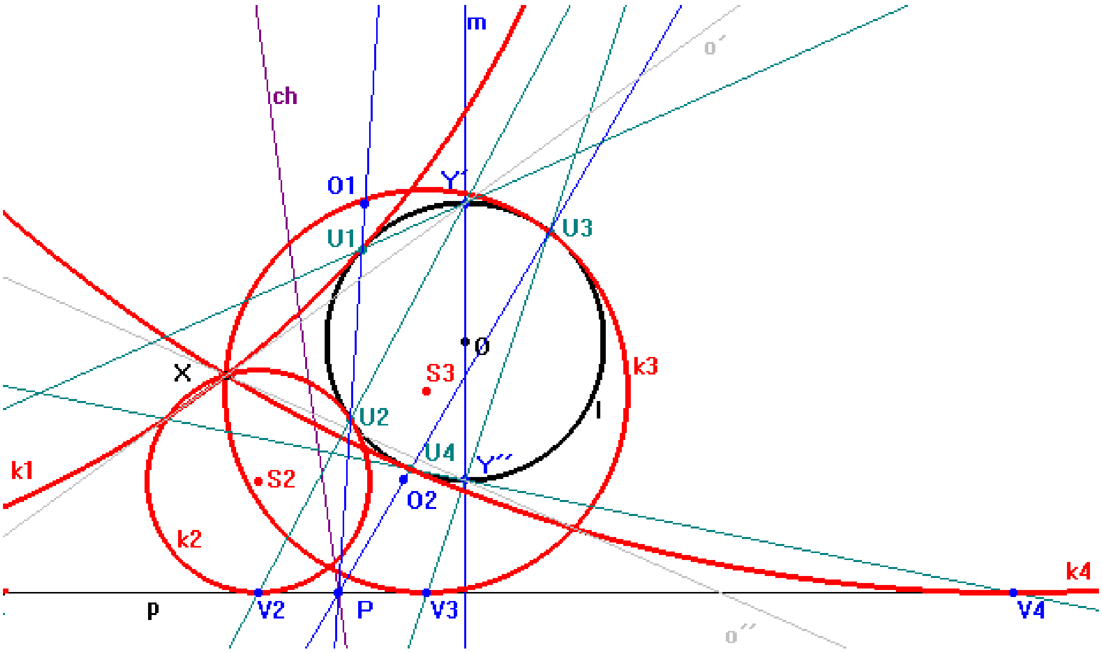
Řešení:

I u této úlohy rozlišíme více situací polohy vstupních objektů:

a) Pokud by bod X byl společný bod přímky p a kružnice l, navíc přímka p by byla sečnou kružnice l, nemá úloha řešení. Pokud by přímka p byla tečnou kružnice l, měla by tato úloha nekonečně mnoho řešení.

b) Pokud by bod X ležel na přímce p a neležel na kružnici l nebo by ležel na kružnici l a neležel na přímce p, dostáváme v obou případech zadání Pappovy úlohy (typu „kp_B“, resp. „pk_B“).

c) Pokud bod X neleží ani na přímce p ani na kružnici l, máme tři možnosti. První z nich je případ, kdy přímka p neprotíná kružnici l a kružnice l leží v polorovině opačné k polorovině pX. Při této poloze prvků nemá úloha řešení. Druhou možností je, že přímka p neprotíná kružnici l a bod X leží uvnitř kružnice l. Ani nyní nemá úloha řešení. Třetí možností (střed O kružnice l leží v polorovině pX) se budeme zabývat nyní (obr. 4.5).



Obr. 4.5

K vyřešení této úlohy jsem použila metodu odvozenou z Gergonnova řešení. Na obrázku vidíte přímku m, ta je kolmá na přímku p a prochází středem O zadané kružnice l. Body $Y´$, $Y´´$, které nám vzniknou protnutím přímky m s kružnicí l, jsou v tomto případě středy podobnosti kružnic l, p, jestliže si přímku p představíme jako kružnici s nekonečným poloměrem. Poněvadž bod X je také středem podobnosti kružnic l, X (kružnice s nulovým poloměrem), resp. X, p, spojením $XY´$ a $XY´´$ získáme osy podobnosti $o´$ a $o´´$. K těmto osám sestrojíme póly O_1, O_2 vzhledem ke kružnici l (viz. kapitola 2.3). Přímka ch je chordálou kružnic X, l a platí pro ni, že je kolmá na úsečku XO a půlí vzdálenost bodu X od jeho poláry vzhledem k dané kružnici. Chordálu *ch* jsme sestrojili proto, abychom našli potenční bod *P*, ten leží na této chordále *ch* a zároveň na zadané přímce *p*. Přímky PO_1 a PO_2 nám protnou zadanou kružnici *l* v bodech U_1, U_2 (vnější body dotyku hledaných kružnic s kružnicí *l*) a v bodech U_3, U_4 (vnitřní body dotyku hledaných kružnic s kružnicí *l*). Nakonec sestrojíme body dotyku hledaných kružnic s přímkou *p* V_1, V_2, V_3, V_4 tak, že k bodům U_1, U_2 sestrojíme body stejnolehlé V_1, V_2 se středem stejnolehlosti *Y´* (a víme, že musí ležet na přímce *p*) a k bodům U_3, U_4 sestrojíme body stejnolehlé V_3, V_4 se středem stejnolehlosti *Y´´* (také musí ležet na přímce *p*). Nakonec sestrojíme hledané kružnice *k* tak, že je opíšeme trojúhelníku *XUV*.

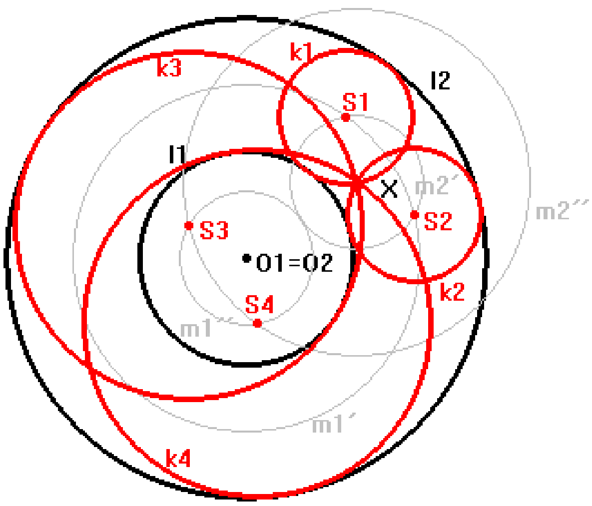
4.6 Úloha bod-kružnice-kružnice

Zadání: Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká daných kružnic $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ a prochází daným bodem *X*.

Řešení:

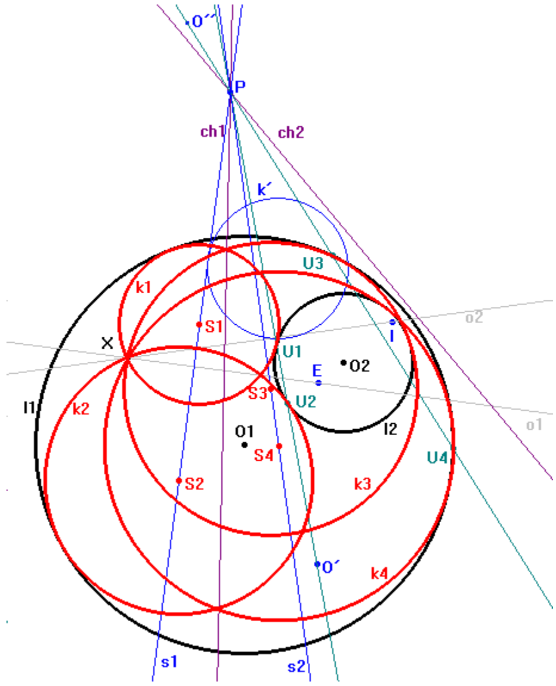
V této úloze už je mnoho způsobů rozložení vstupních objektů:

a) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ jsou soustředné.* Vezmeme v úvahu kdy $r_1 < r_2$. Pokud by bod *X* ležel vně kružnice l_2 nebo uvnitř kružnice l_1, neměla by úloha žádné řešení. Pokud by bod *X* ležel na jedné z kružnic l_1, l_2, získali bychom Pappovu úlohu „kk_B“. A nakonec pokud by bod *X* ležel v rovině ohraničené kružnicemi l_1, l_2, měla by úloha čtyři řešení (obr. 4.6 a)). Úlohu vyřešíme metodou množin bodů dané vlastnosti. První touto množinou jsou kružnice $m_1´$, $m_1´´$ (jsou to množiny středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice l_1 a zároveň kružnice l_2), jejich středem je střed O_1, resp. O_2. Velikost poloměru kružnice $m_1´$ $(r_1 + r_2)/2$ je a kružnice $m_1´´$ je $(r_2 - r_1)/2$. Druhou množinou bodů dané vlastnosti jsou kružnice $m_2´$, $m_2´´$, jejich středem je bod *X* a velikost poloměru kružnice $m_2´$ je $(r_2 - r_1)/2$ a kružnice $m_2´´$ je $(r_1 + r_2)/2$. Středy hledaných kružnic leží na průniku kružnic $m_1´$, $m_2´$ a $m_1´´$, $m_2´´$.



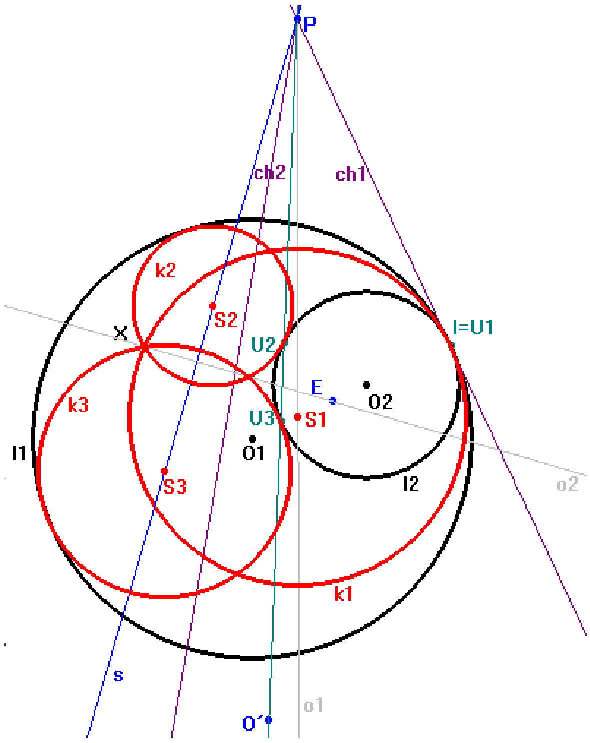
Obr. 4.6 a)

b) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ jsou nesoustředné, ale l_2 leží uvnitř l_1.* Pokud by bod *X* ležel uvnitř kružnice l_2 nebo vně kružnice l_1, neměla by úloha žádné řešení. Pokud by bod *X* ležel na jedné z kružnic, opět bychom získaly Pappovu úlohu „kk_B“. Pokud by bod *X* ležel v rovině ohraničené kružnicemi l_1, l_2, měla by úloha čtyři řešení (obr. 4.6 b)). Řešení této úlohy je podrobněji popsáno v bodě f) této kapitoly.



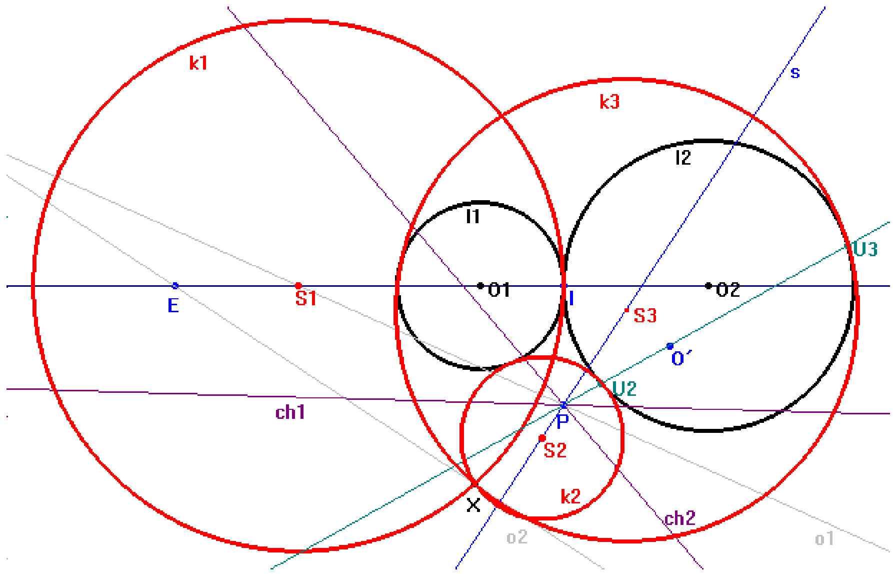
Obr. 4.6 b)

c) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ mají vnitřní dotyk a l_2 leží uvnitř l_1.* Pokud by byl bod X bodem dotyku kružnic l_1, l_2, měla by úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud by bod X ležel na jedné z kružnic l_1, l_2, získaly bychom Pappovu úlohu „kk_B“. Pokud by bod X ležel vně kružnice l_1, mohli bychom sestrojit tečnu vedenou bodem dotyku kružnic l_1, l_2 a úlohu řešit jako Pappovu úlohu „Bp_B“. A nakonec pokud by bod X ležel v rovině vymezené kružnicemi l_1, l_2, měla by úloha tři řešení (obr. 4.6 c)). Na tomto obrázku je vidět, že kružnice k_1 má střed S_1 na průniku přímek O_1O_2 a o (o je osa sečny XI, množina středů všech kružnic procházejících body X a I). Dále je úloha řešena analogicky jako úloha v bodě f) této kapitoly.



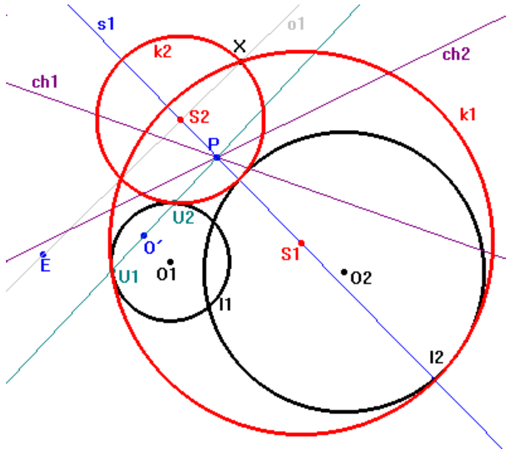
Obr. 4.6 c)

d) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ mají vnější dotyk*. Pokud by bod X ležel na jedné z kružnic l_1, l_2, získaly bychom Pappovu úlohu „kk_B“. Pokud tento bod X ležel v bodě dotyku kružnic l_1, l_2, měla tato Pappova úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud by bod X ležel uvnitř jedné z kružnic l_1, l_2, měla by úloha jedno řešení (střed S hledané kružnice k by ležel na průniku přímek O_1O_2 – množina středů všech kružnic které se dotýkají daných kružnic l_1, l_2 v bodě I a osy o – osa sečny XI, kde I je bod dotyku zadaných kružnic l_1, l_2, osa o je množina středů všech kružnic procházejících bodem X a zároveň bodem I). Nakonec pokud by bod X ležel vně kružnic l_1, l_2, měla by úloha tři řešení (obr. 4.6 d)). Na tomto obrázku vidíme, že kružnice k_1 má střed S_1 tam, kde se protíná přímka O_1O_2 (množina středů všech kružnic které se dotýkají daných kružnic l_1, l_2 v bodě I) s osou o_1 (sečna XI, množina středů všech kružnic procházejících bodem X a zároveň bodem I). Pro nalezení této kružnice k_1 bych mohla také použít Gergonnovu metodu, kterou využíváme při nalezení k_2, k_3, ale je to zbytečně zdlouhavé. Přeci jenom to tu trošku popíšu. Musela bych si sestrojit osu podobnosti XI a k této ose bych sestrojila pól např. vzhledem ke kružnici l_2. Spojením potenčního bodu P a tohoto pólu by nám vznikla přímka, která by zadanou kružnici protínala v bodě dotyku kružnic l a k. Naším bodem dotyku by ale nebyl žádný jiný než bod I (dotykový bod zadaných kružnic). Průnikem středné (kolmice na osu podobnosti procházející bodem P – v případě řešeném na obrázku je to osa o_1 sečny XI) a přímky O_1I (je totožná s přímkou O_1O_2) nám vznikne střed hledané kružnice S_1. Zbytek řešení je analogicky opět podrobněji popsán v bodě f) této kapitoly. Jde o řešení Gergonnovo.



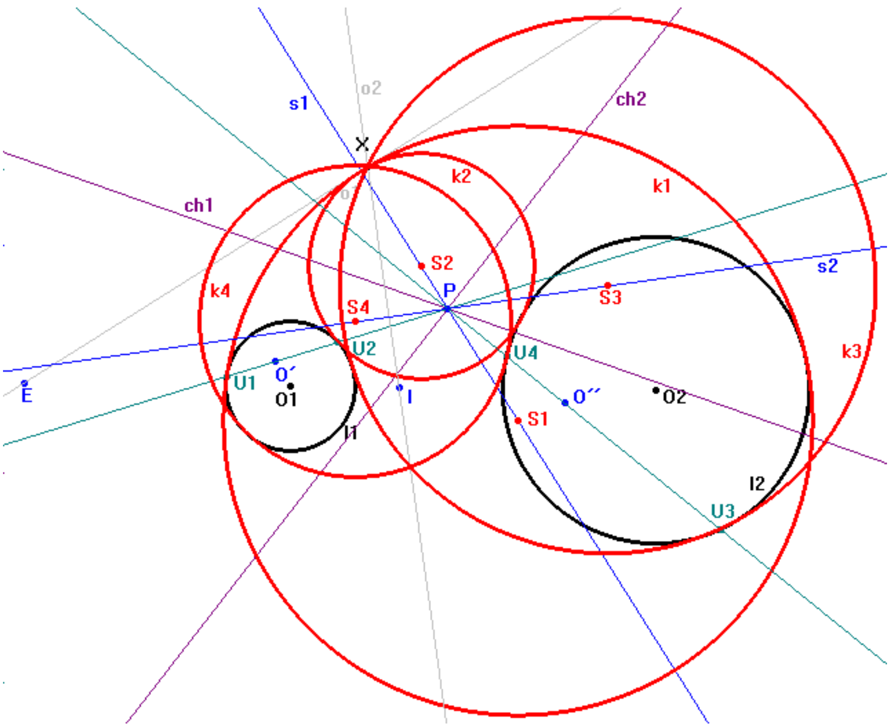
Obr. 4.6 d)

e) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ se protínají v bodech A, B*. Pokud by bod *X* ležel na jedné z kružnic l_1, l_2, získaly bychom Pappovu úlohu „kk_B“. Pokud by tento bod *X* ležel ještě ke všemu v bodě *A* nebo v bodě *B*, neměla by tato Pappova úloha žádné řešení. Pokud by bod *X* ležel uvnitř jedné z kružnic l_1, l_2, měla by úloha jedno řešení. A nakonec pokud by bod *X* ležel vně kružnic l_1, l_2, měla by úloha dvě řešení (obr. 4.6 e)). Řešení je opět analogické s řešením z bodu f) této kapitoly.



Obr. 4.6 e)

f) *Kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ se nijak neprotínají ani nedotýkají*. Pokud by bod *X* ležel uvnitř jedné ze zadaných kružnic l_1, l_2, neměla by úloha žádné řešení. Pokud by bod *X* ležel na jedné z kružnic l_1, l_2, získaly opět bychom Pappovu úlohu „kk_B“. A pokud by bod *X* ležel vně kružnic l_1, l_2, měla by úloha čtyři řešení (obr. 4.6 f)).



Obr. 4.6 f)

Gergonnovo řešení: Na obr. 4.6 f) vidíme body *E*, *I*, to jsou středy podobnosti (stejnolehlosti) zadaných kružnic l_1, l_2, a zadaný bod *X*, to je střed podobnosti vzhledem k zadaným kružnicím. Naším úkolem je najít póly *O´*, *O´´* (os podobnosti) vzhledem ke kružnici a potenční bod *P*. Osy podobnosti o_1, o_2 jsou přímky procházející body *X*, *E* a *X*, *I*. K ose o_1 jsem sestrojila pól

O´ vzhledem ke kružnici l_1 a k ose o_2 jsem sestrojila pól *O´´* vzhledem ke kružnici l_2 (viz. kapitola 2.3). Potenční bod *P* leží na průniku přímek ch_1 a ch_2, jsou to chordály kružnic *X* a l_1, popř. l_2 (kde *X* je kružnice s nulovým poloměrem). Chordála ch_1 prochází středem tečny (vedená z bodu *X* ke kružnici l_1) a je kolmá na střednou XO_1. Analogicky je sestrojena i chordála ch_2. Takže už máme potenční bod *P* a póly *O´* a *O´´*. Sestrojíme přímky *PO´* a *PO´´*. *PO´* nám protne kružnici l_1 v bodech U_1, U_2 (body dotyku zadané kružnice l_1 s hledanými kružnicemi *k*) a *PO´´* nám protne kružnici l_2 v bodech U_3, U_4 (body dotyku zadané kružnice l_2 s hledanými kružnicemi *k*). Středy hledaných kružnic leží na středných s_1 a s_2 (přímky kolmé na příslušnou osu podobnosti o_1, o_2 a procházející potenčním bodem *P*) v průniku s příslušnou přímkou vedenou bodem dotyku U_i a středem O_i zadané kružnice.

4.7 Úloha přímka-přímka-přímka

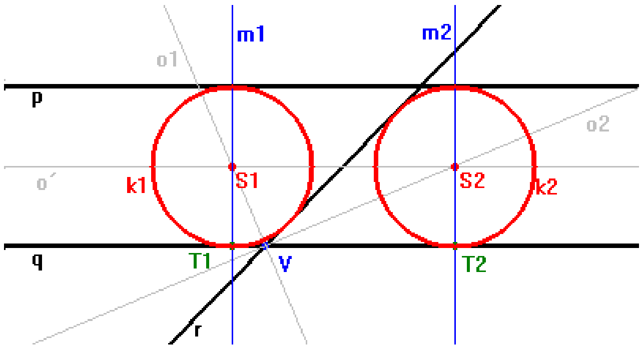
Zadání: Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká tří daných přímek *p*, *q*, *r*.

Řešení:

Podle vzájemné polohy daných přímek vznikají tyto situace:

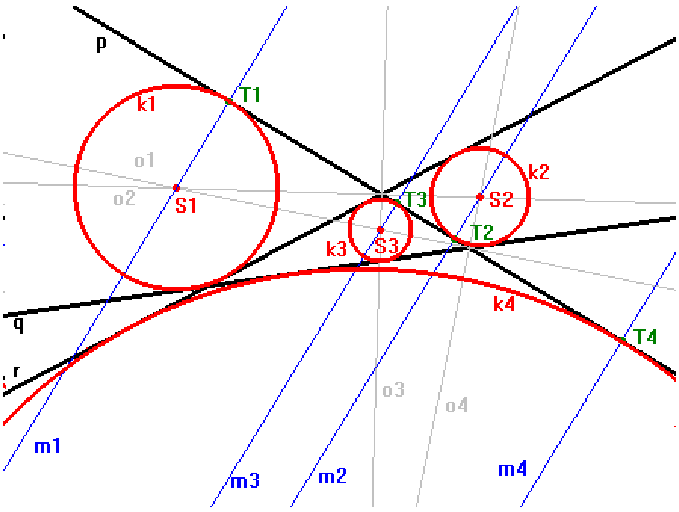
a) *Všechny tři přímky p, q, r jsou vzájemně rovnoběžné*. Pokud nastane tato situace, úloha nemá řešení.

b) *Dvě přímky p, q jsou rovnoběžné a třetí r je s nimi různoběžná*. V tomto případě má tato úloha dvě řešení (obr. 4.7 a)). Tuto situaci vyřešíme metodou množin bodů dané vlastnosti. První množinou bodů dané vlastnosti je osa *o´*, na této ose leží středy všech kružnic, které se dotýkají přímky *p* a zároveň přímky *q*. Druhou množinou bodů dané vlastnosti je osa úhlu při vrcholu *V*, z obr. 4.7 a) je patrné, že tyto osy jsou dvě, osa o_1 (množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky *q* a zároveň *r*) a osa o_2 (množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky *q* a zároveň *r*). Středy hledaných kružnic leží na průniku osy *o´*s o_1 a o_2, vidíme, že jsou dva S_1, S_2. Kolmice m_1 a m_2 (kolmé na přímku *p* a procházející body S_1, S_2) jsem si sestrojila, abych našla body dotyku hledaných kružnic k_1, k_2 se zadanými přímkami *p*, *q*.



Obr. 4.7 a)

c) *Žádná z přímek p, q, r není s žádnou jinou rovnoběžná*. Pokud by se tyto dané přímky protínaly v jednom bodě, neměla by úloha žádné řešení. Pokud by se přímky protínaly ve třech různých bodech, měla by úloha čtyři řešení (obr. 4.7 b)). Úlohu vyřešíme analogicky množinami bodů dané vlastnosti (osy úhlů) jako v předchozím bodě b) této kapitoly.



Obr. 4.7 b)

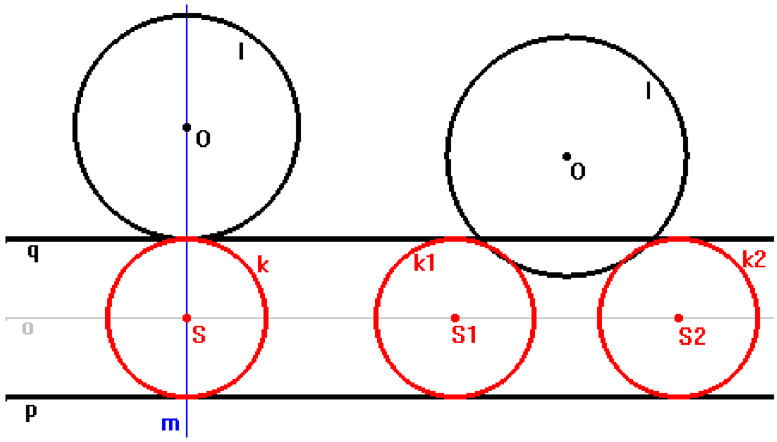
4.8 Úloha typu přímka-přímka-kružnice

Zadání: Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká přímek *p*, *q* a kružnice *l(O,r)*.

Řešení:

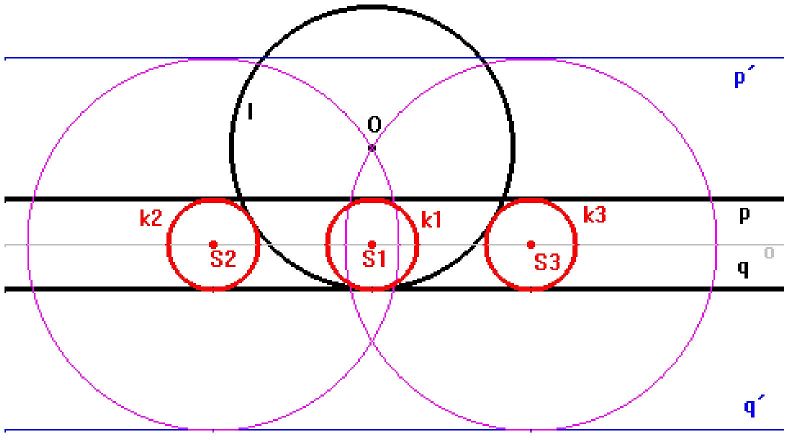
U takto zadané úlohy můžeme rozlišit následující situace polohy vstupních objektů:

a) *Přímky p, q jsou rovnoběžné*. Pokud kružnice *l* neleží v rovině vymezené přímkami *p*, *q*, nemá úloha žádné řešení. Pokud se kružnice *l* dotýká jedné z přímek *p*, *q*, ale neleží v rovině vymezené těmito přímkami, má úloha pouze jedno řešení (obr. 4.8 a)). Pokud se kružnice *l* dotýká jedné z přímek *p*, *q*, ale leží alespoň z části v rovině vymezené těmito přímkami, má úloha tři řešení (obr. 4.8 b)). Pokud kružnice *l* protíná jednu z přímek *p*, *q* ve dvou bodech, má úloha dvě řešení (obr. 4.8 a)). A nakonec pokud kružnice *l* protíná každou z přímek *p*, *q* ve dvou bodech, má úloha čtyři řešení (obr 4.8 c)). V případech, kdy má úloha tři nebo čtyři řešení, jsem použila dilataci. To znamená, že jsem zadanou kružnici *l* transformovala (zmenšila o její poloměr *r* do jejího středu *O*) a zadané přímky *p*, *q* posunula kolmo od nich právě o poloměr zadané kružnice *r*,

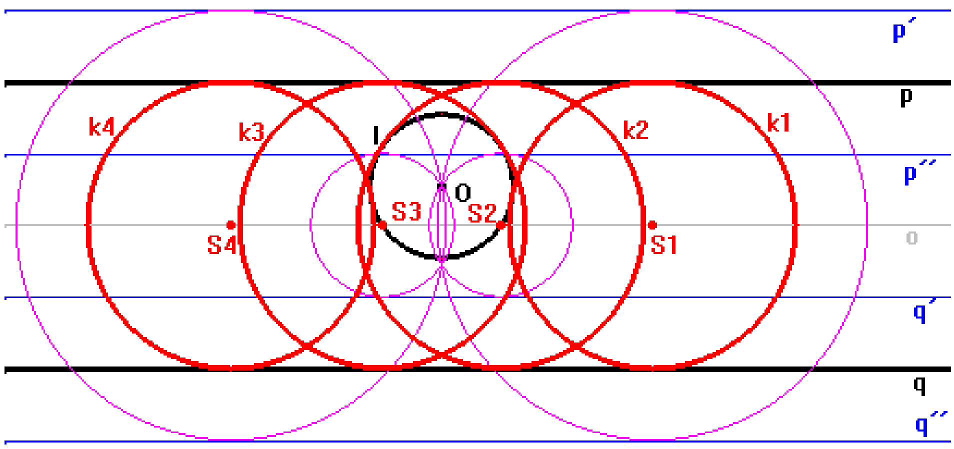


Obr. 4.8 a)

přičemž takto nově vzniklé přímky *p´*, *p´´*, *q´*, *q´´* jsou se zadanými přímkami *p*, *q* rovnoběžné. Tím nám vznikly dvě nové úlohy typu *"bpp"* (v těchto případech *"q´p´O"* a *"q´´p´´O"*), které jsou vyřešeny v kapitole 4.4. Nakonec kružnice (na obrázkách jsou znázorněny růžovou barvou) které nám vyjdou vyřešením této úlohy *"bpp"*, transformujeme je nazpátek o poloměr *r* kružnice *l*.

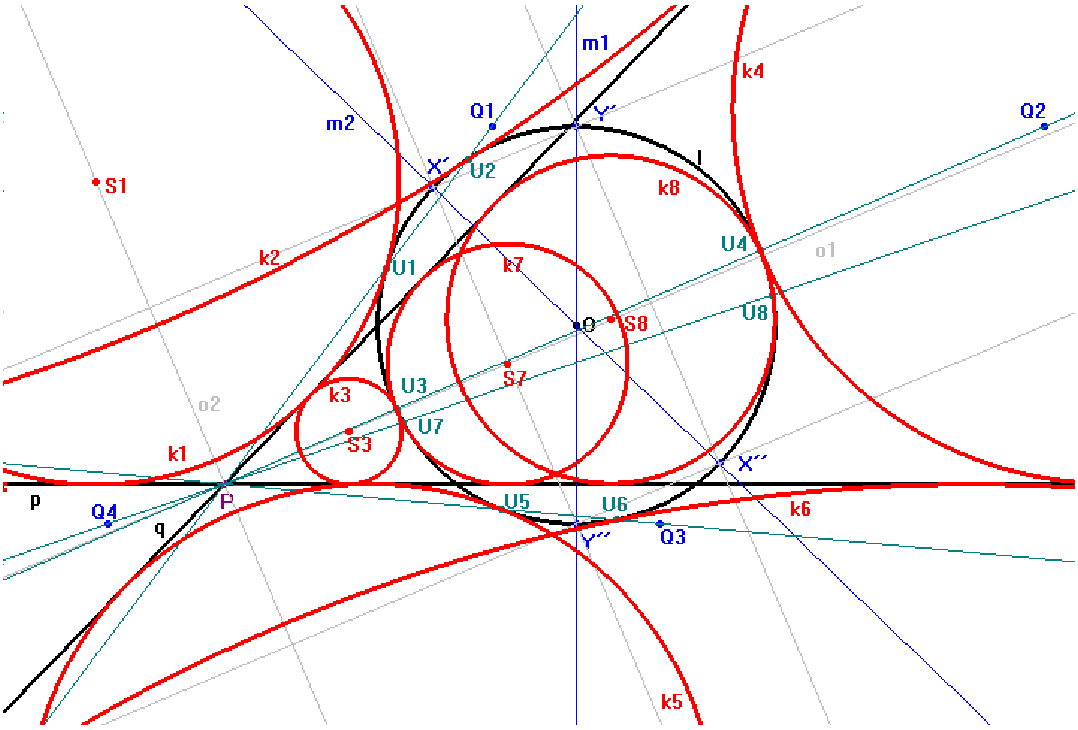


Obr. 4.8 b)



Obr. 4.8 c)

b) *Přímky p, q jsou různoběžné*. Pokud by zadaná kružnice *l* měla s jednou z přímek *p*, *q* společný bod měla by úloha tři řešení. Pokud by kružnice *l* měla s jednou z přímek *p*, *q* společný bod a druhou přímku by protínala ve dvou bodech a navíc pokud by společný bod *P* zadaných přímek ležel vně kružnice *l*, měla by úloha šest řešení. Pokud by tím společným bodem byl bod *P* (průsečík zadaných přímek *p*, *q*), měla by úloha čtyři řešení. Pokud by kružnice *l* neměla s žádnou z přímek *p*, *q* společný bod, úloha by měla čtyři řešení. Pokud by kružnice *l* měla s jednou ze zadaných přímek společné dva body, měla by úloha čtyři řešení. Pokud by kružnice *l* měla s každou ze zadaných přímek dva body dotyku a bod *P* by ležel vně kružnice *l*, měla by úloha osm řešení (obr. 4.8 d)). Pokud by kružnice *l* protínala zadané přímky *p*, *q* ve čtyřech bodech a bod *P* by ležel uvnitř kružnice l, měla by úloha také osm řešení. Pokud máte elektronickou podobu této bakalářské práce, můžete všechny polohy vstupních objektů vyzkoušet tahem za střed O zadané kružnice l, použijte k tomu obr. 4.8 d)). Úloha na obr. 4.8 d) je řešena Gergonnovo metodou. Takže aby jsme našli středy podobnosti, musíme sestrojit kolmice m_1 (kolmá na přímku p a vedená bodem O) a m_2 (kolmá na přímku q vedená bodem O). Tím získáme středy podobnosti X', X'', Y' a Y'' a osy podobnosti $X'Y'$, $X'Y''$, $X''Y'$ a $X''Y''$. K těmto osám sestrojíme póly Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 vzhledem ke kružnici l. Naším potenčním bodem nyní bude společný bod P zadaných přímek p, q (zadané přímky jsou chordály výsledných kružnic). Sestrojíme přímky PQ_i a tím nám vzniknou body dotyku U_1, …, U_8 kružnice l s výslednými kružnicemi k_1, …, k_8. Středy výsledných kružnic leží na osách o_1, o_2 úhlů, které svírají zadané přímky p, q, protože jsou to středné, které jsou kolmé na příslušné osy podobnosti vedené bodem P. A zároveň středy výsledných kružnic leží na přímkách OU_1, …, OU_8.



Obr. 4.8 d)

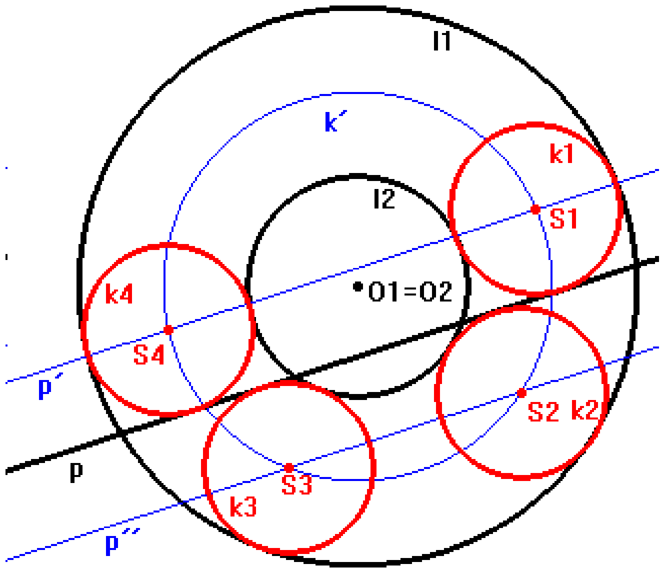
4.9 Úloha typu přímka-kružnice-kružnice

Zadání: Jsou dány kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ a přímka p. Máme sestrojit kružnici $k(S,d)$ tak, aby se dotýkala daných kružnic a dané přímky p.

Řešení:

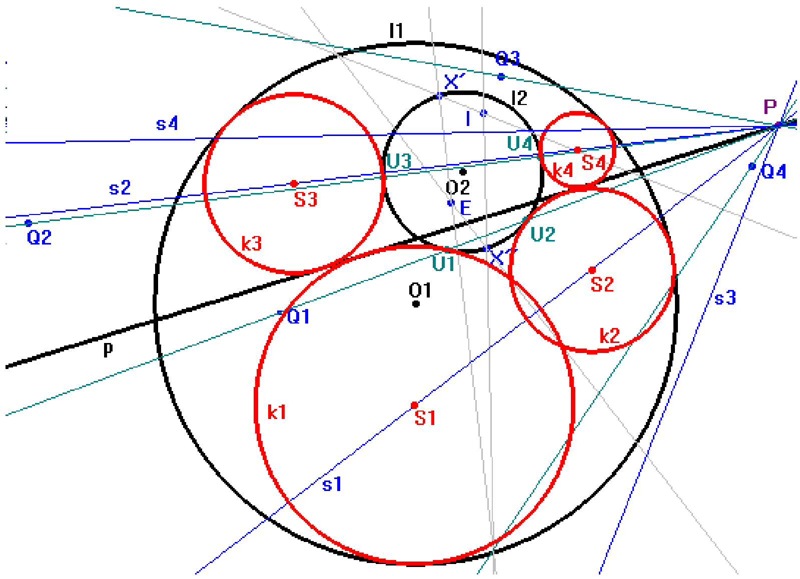
Opět mohou nastat tyto možnosti vzájemné polohy vstupních objektů:

a) *Kružnice l_1, l_2 jsou soustředné.* Kružnice l_2 leží uvnitř kružnice l_1, takže $r_1 > r_2$. Pokud přímka p neprotíná ani jednu ze zadaných kružnic l_1, l_2, nemá úloha žádné řešení. Pokud přímka p protíná alespoň jednu ze zadaných l_1, l_2, má úloha čtyři řešení (obr. 4.9 a)). Pokud přímka p je tečnou kružnice l_1, má úloha jedno řešení. Pokud je přímka p tečnou kružnice l_2, má úloha tři řešení. Úloha na obr. 4.9 a) je řešena metodou množin bodů dané vlastnosti. Jednou množinou je kružnice $k´$ (množina středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice l_1 a zároveň kružnice l_2), která půlí vzdálenost bodů kružnice l_1 od bodů kružnice l_2, a druhou množinou bodů jsou přímky $p´$ a $p´´$, které jsou rovnoběžné s p a vzdálené od přímky p tak jako třeba kružnice $k´$ od kružnice l_1 (množiny středů všech kružnic, které se dotýkají přímky p s daným poloměrem).



Obr. 4.9 a)

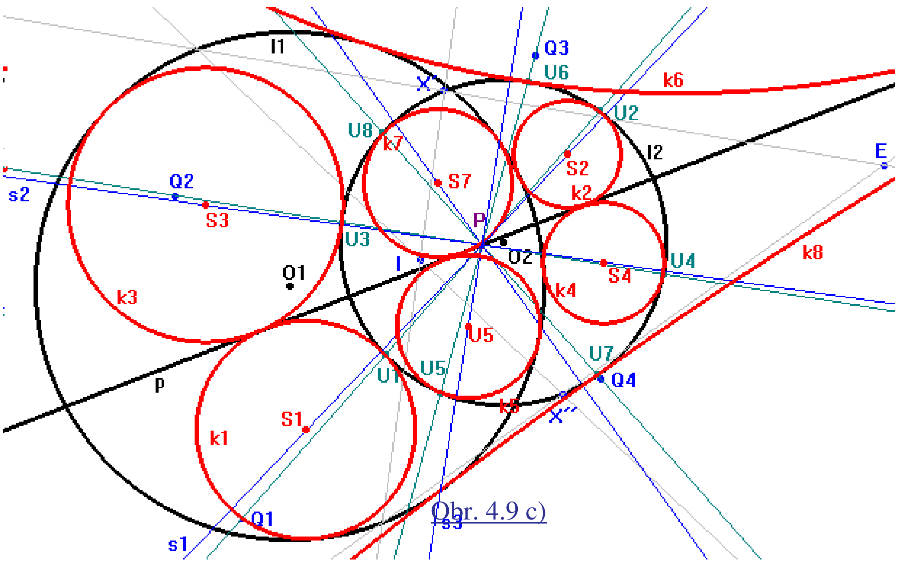
b) *Kružnice l_1, l_2 jsou nesoustředné, ale l_2 leží uvnitř kružnice l_1.* Takže opět $r_1 > r_2$. Pokud přímka p neprotíná ani jednu ze zadaných kružnic l_1, l_2, úloha nemá řešení. Pokud kružnice l_1, l_2 nemají žádný společný bod, a přímka p je tečnou kružnice l_1, má úloha dvě řešení. Pokud kružnice l_1, l_2 nemají žádný společný bod, a přímka p je tečnou kružnice l_2, má úloha čtyři řešení. Pokud kružnice l_1, l_2 nemají žádný



Obr. 4.9 b)

společný bod, a přímka p protíná alespoň jednu z kružnic l_1, l_2, má úloha čtyři řešení (obr. 4.9 b)). Opět na tomto obrázku můžete vyzkoušet všechny výše uvedené případy polohy vstupních objektů, pokud by se v krajních případech výsledná kružnice neobjevila, myslím, že si ji snadno v duchu představíte. Úloha na obr. 4.9 b) je řešena opět Gergonnovo metodou. V tomto případě jsme využily osy podobnosti $EX´$, $EX´´$, $IX´$ a $IX´´$. Středy podobnosti E, I patří zadaným kružnicím l_1, l_2 a středy podobnosti $X´$, $X´´$ patří zadané přímce p a kružnici l_2. Pak si opět sestrojíme póly Q_i k těmto osám, potenční bod P (průsečík přímky p, jakožto tečny - chordály výsledných kružnic, s chordálou zadaných kružnic l_1, l_2 - kapitolka 2.2.4) a spojením bodů P a Q_i pak body dotyku výsledných kružnic k_i s kružnicí l_2. Nakonec středy S_i výsledných kružnic k_i leží v průniku středných s_i (přímky kolmé na příslušnou osu podobnosti vedené bodem P) s přímkami O_2U_i.

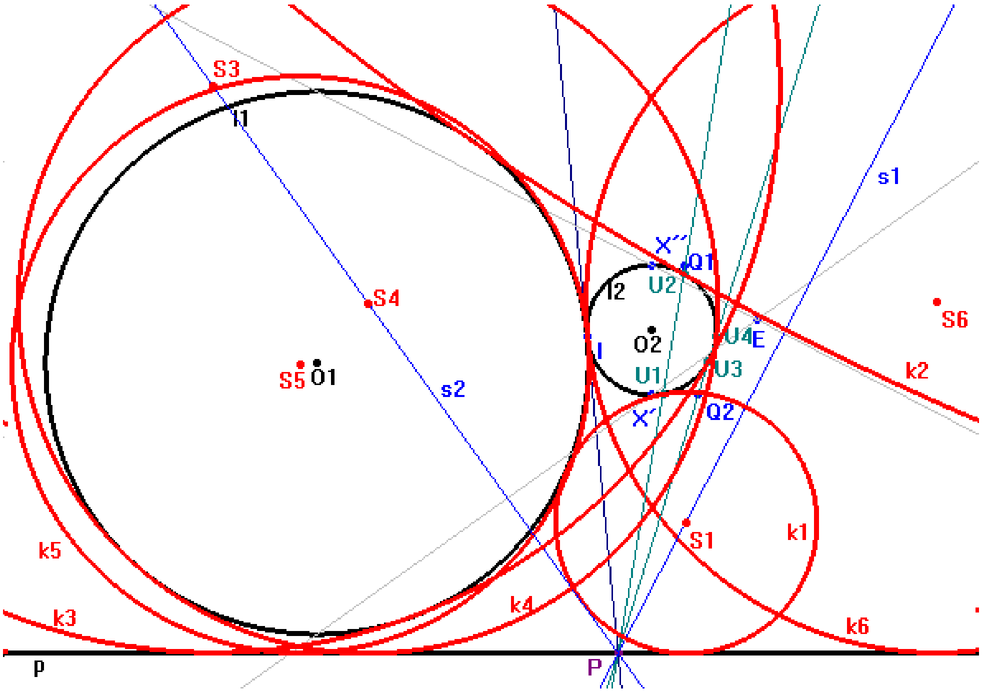
c) *Kružnice l_1, l_2 jsou nesoustředné, ale protínají se ve dvou bodech*. Pokud je přímka p tečna kružnice l_1 ($r_1>r_2$) a kružnici l_2 neprotíná, má úloha tři řešení. V tom samém případě, jen ale pokud přímka p bude protínat kružnici l_2, má úloha čtyři řešení. A naposled pokud by přímka p byla zároveň tečnou kružnice l_2, měla by úloha tři řešení. Pokud by přímka p protínala jen jednu ze zadaných kružnic l_1, l_2, měla by úloha čtyři řešení. A nakonec pokud by přímka p protínala obě dvě zadané kružnice l_1, l_2, měla by úloha osm řešení (obr. 4.9 c)). Obr. 4.9 c) je vytvořený z obr. 4.9 b) tahem za různé vstupní objekty (například středy O_1, O_2, přímkou p a podobně). To znamená, že tuto úlohy vyřešíme analogicky Gergonnovo metodou.



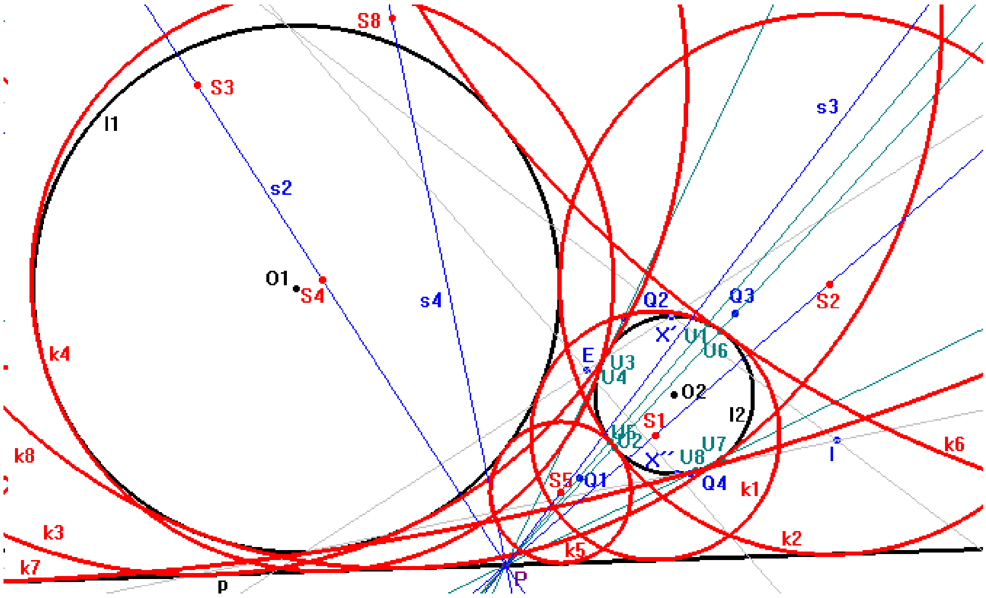
Obr. 4.9 c)

d) *Kružnice l_1, l_2,se protínají v jednom bodě*. Platí $r_1>r_2$. Pokud zadané kružnice mají společný jeden bod a navíc pokud přímka p je tečnou k těmto kružnicím v jejich společném bodě, má tato úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud tato přímka p je tečnou kružnice l_1 (a neprochází společným bodem zadaných kružnic), má úloha dvě řešení. Pokud je přímka p tečnou kružnice l_2 (a neprochází společným bodem zadaných kružnic), má úloha čtyři řešení. Pokud zadané kružnice mají společný jeden bod a přímka p protíná jen jednu z těchto kružnic, má úloha tři řešení. A pokud tato přímka p protíná obě kružnice l_1, l_2, má úloha šest řešení. Pokud přímka p leží vně zadaných kružnic l_1, l_2 a tyto kružnice mají vnější dotyk, má úloha šest řešení (obr. 4.9 d)). Pokud přímka p leží vně zadaných kružnic l_1, l_2 a tyto kružnice mají vnitřní dotyk, má úloha dvě řešení.

Obr. 4.9 d)



e) *Kružnice l_1, l_2 jsou nesoustředné a neprotínají se v žádném bodě*. Pokud by přímka p byla tečnou jedné z kružnic l_1, l_2 a druhou kružnici by tato přímka neprotínala, měla by úloha šest řešení (kružnice l_1, l_2 leží ve stejné polorovině; pokud by ve stejné polorovině neležely, měla by úloha jen dvě řešení). Pokud by ale druhou kružnici protínala, měla by úloha čtyři řešení. Pokud by přímka p byla tečnou oběma kružnicím l_1, l_2 (obě kružnice jsou ve stejné polorovině), měla by úloha čtyři řešení. Pokud by přímka p byla tečnou oběma kružnicím, ale každá kružnice by ležela v jiné polorovině, měla by úloha dvě řešení. Pokud by přímka p protínala alespoň jednu z kružnic l_1, l_2, měla by úloha čtyři řešení. A nakonec pokud by přímka p neprotínala žádnou ze zadaných kružnic l_1, l_2 (obě kružnice musí ležet ve stejné polorovině, jinak by úloha neměla žádné řešení), měla by úloha osm řešení (obr. 4.9 e)). Úloha je řešena Opět Gergonnovo metodou analogicky s předchozími úlohami. Já jsem použila obr. 4.9 b), akorát jsem změnila polohu vstupních objektů.

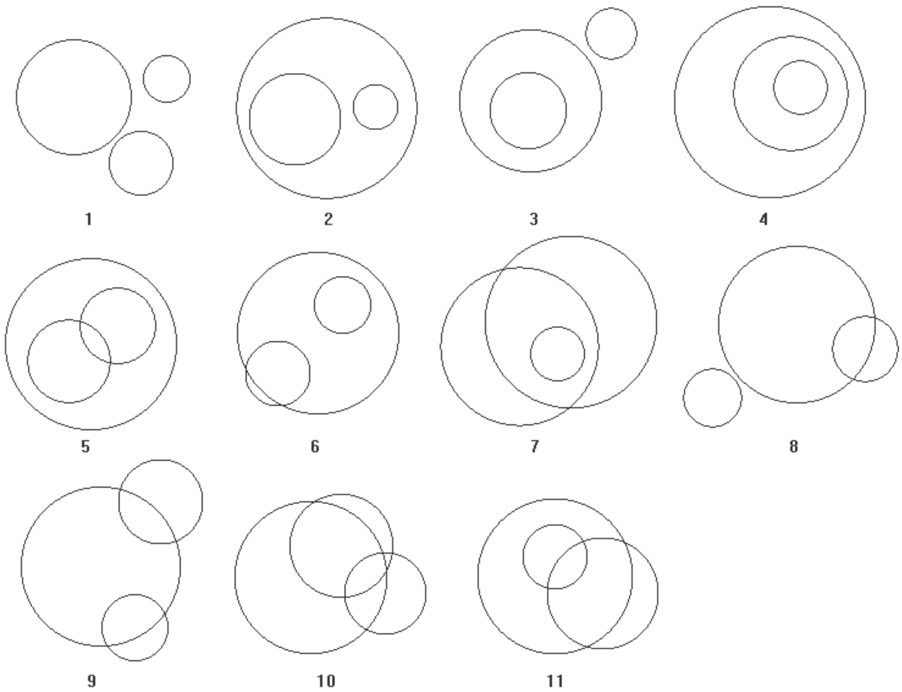


Obr. 4.9 e)

4.10 Úloha typu kružnice-kružnice-kružnice

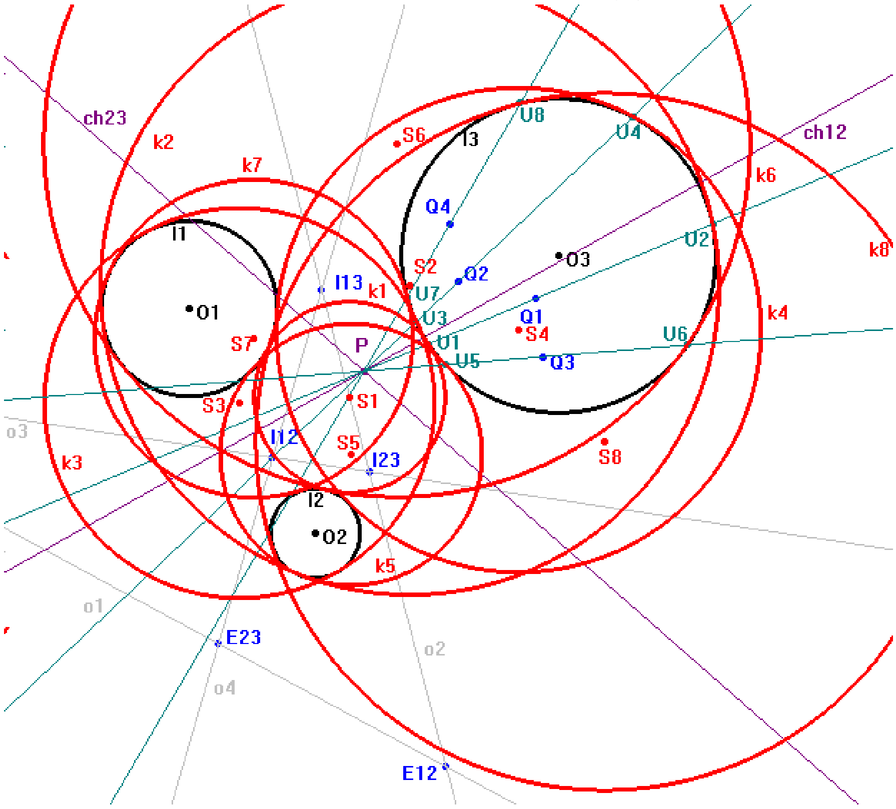
Zadání: Máme zadané tři kružnice $l_1(O_1,r_1)$, $l_2(O_2,r_2)$ a $l_3(O_3,r_3)$. Naším úkolem bude sestrojit kružnici k, která se bude dotýkat všech tří zadaných kružnic.

Řešení: V tomto případě je už opravdu mnoho možných variant rozložení vstupních objektů, a proto ty hlavní raději nakreslím (Obr. 4.10 a)):



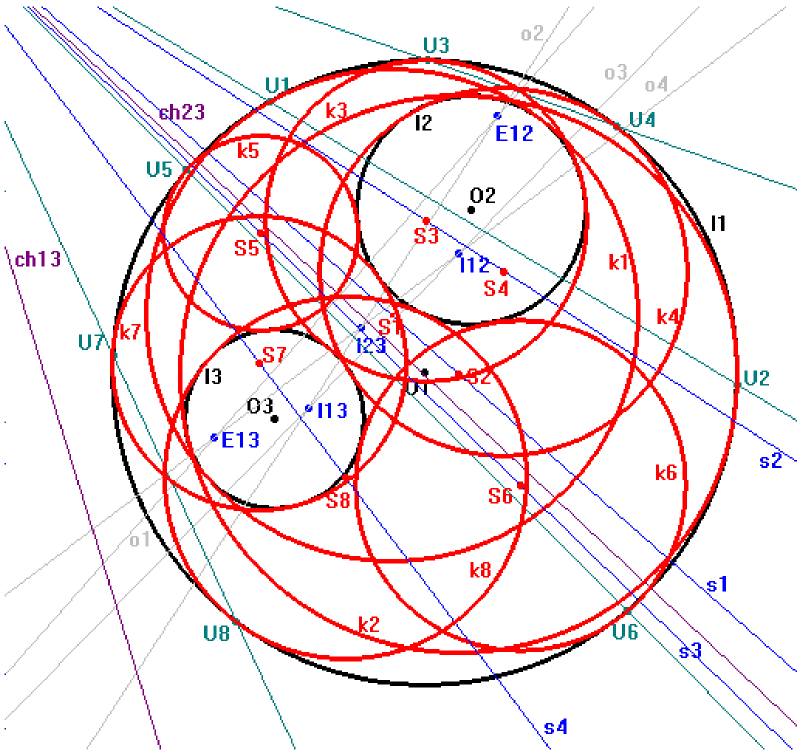
Obr. 4.10 a)

1) Takto zvolená úloha má osm řešení (obr. 4.10 b)). Pokud by jedna z kružnic měla společný jeden bod s druhou kružnicí, měla by úloha šest řešení. Pokud by měly dvě kružnice společný bod s třetí, měla by úloha čtyři řešení. A nakonec pokud by měly všechny tři společný dotyk navzájem, měla by úloha dvě řešení.



Obr. 4.10 b)

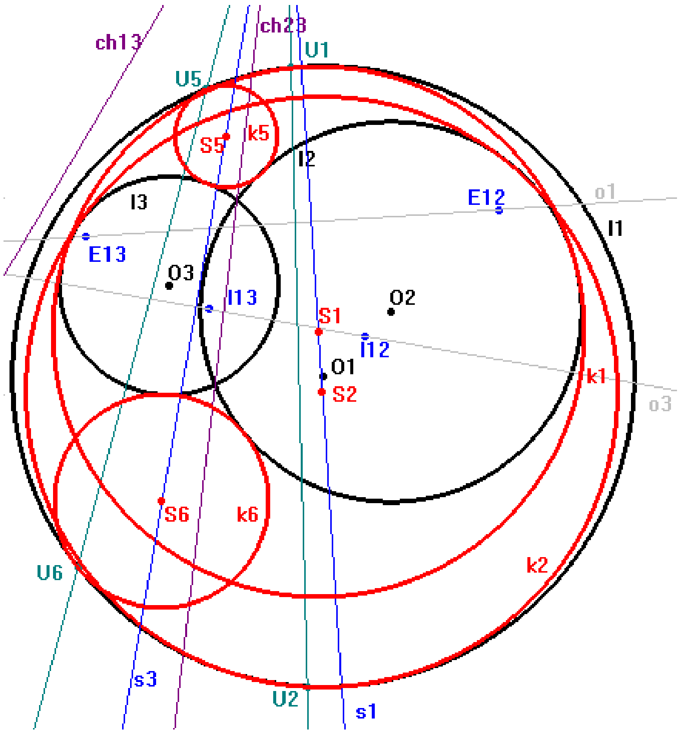
2) Takto zvolená úloha má také osm řešení (obr.4.10 c)). Pokud by ale měla jedna z vnitřních kružnic společný bod s kružnicí vnější, měla by úloha šest řešení. Pokud by obě vnitřní kružnice měly každá společný dotyk s kružnicí vnější, měla by úloha tři řešení. Pokud by měly vnitřní kružnice jeden společný bod a s vnější kružnicí žádný, měla by úloha šest řešení. Pokud by měly vnitřní kružnice jeden společný bod a s vnější by



Obr. 4.10 c)

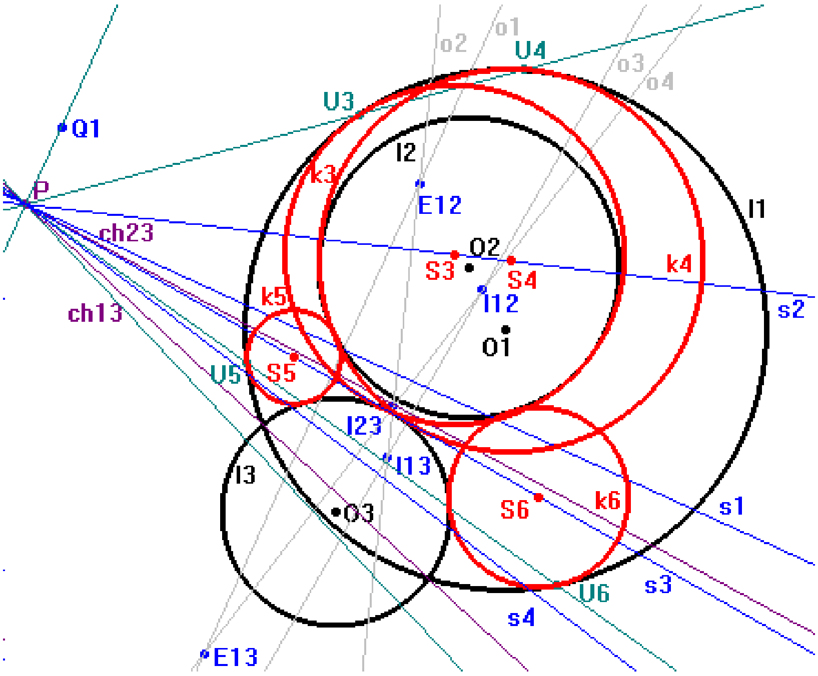
jedna z vnitřních kružnic měla společný bod, měla by úloha čtyři řešení. A nakonec pokud by vnitřní kružnice měly společný dotyk mezi sebou a každá z těchto kružnic měly ještě společný dotyk s vnější kružnicí, měla by úloha dvě řešení.

3) Takto zvolené rozložení vstupních objektů nemá žádné řešení. Pokud by se ale vnitřní kružnice dotýkala kružnice vnější, měla by úloha dvě řešení. Pokud by měly společný bod kružnice vnější, měla by úloha také dvě řešení. Pokud by se dotýkali všechny tři kružnice v jednom bodě, měla by úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud by se dotýkali všechny kružnice (ne ve stejném bodě), měla by úloha dvě řešení.
4) Tato situace také nemá žádné řešení. Pokud by se ale jedna z vnitřních kružnic dotýkala příslušné své vnější kružnice, měla by úloha dvě řešení. Pokud by se všechny tři kružnice dotýkaly ve stejném bodě, měla by úloha nekonečně mnoho řešení. Pokud by se každá z vnitřních kružnic dotýkala své příslušné vnější kružnice (bod dotyku by byl každý jiný), měla by úloha dvě řešení.
5) V tomto případě má úlohy čtyři řešení (obr. 4.10 d) - využila jsem obr. 4.10 c)). Pokud by se jedna z vnitřních kružnic dotýkala kružnice vnější, měla by úloha tři řešení. Pokud by se obě vnitřní kružnice dotýkaly kružnice vnější, měla by úloha dvě řešení.



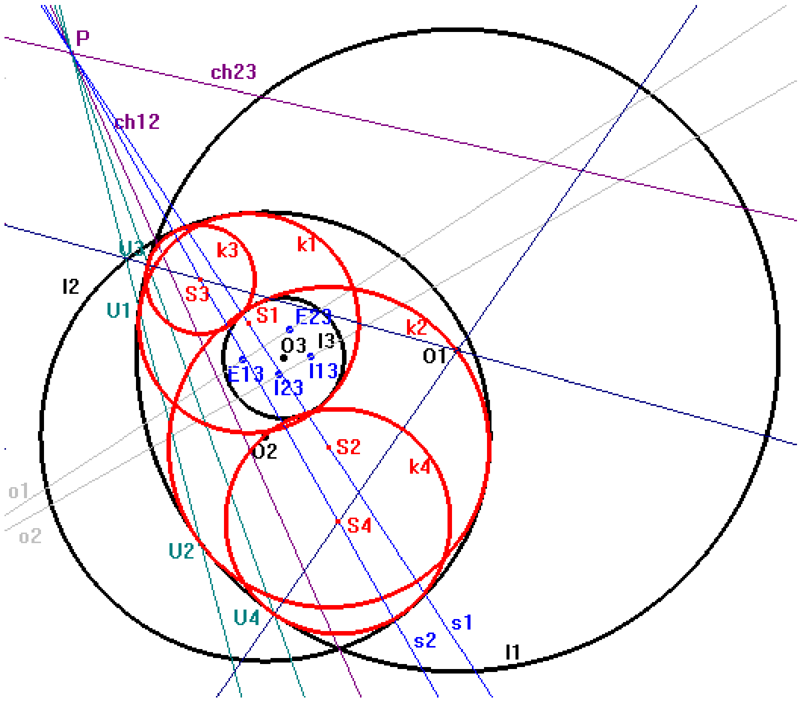
Obr. 4.10 d)

6) Takto zvolené vstupní objekty mají čtyři řešení (obr. 4.10 e) - opět jsem využila obr. 4.10 c)). Pokud by ta vnitřní kružnice měla společný bod s jednou z dvou druhých kružnic, měla by úloha tři řešení. Pokud by vnitřní kružnice měla společné body dotyku s oběmi kružnicemi, měla by úloha dvě řešení. Tolik řešení by měla i kdyby protínala naší napůl vnitřní kružnici ve dvou bodech a i v případě, že by měla s vnější kružnicí společný jeden bod.



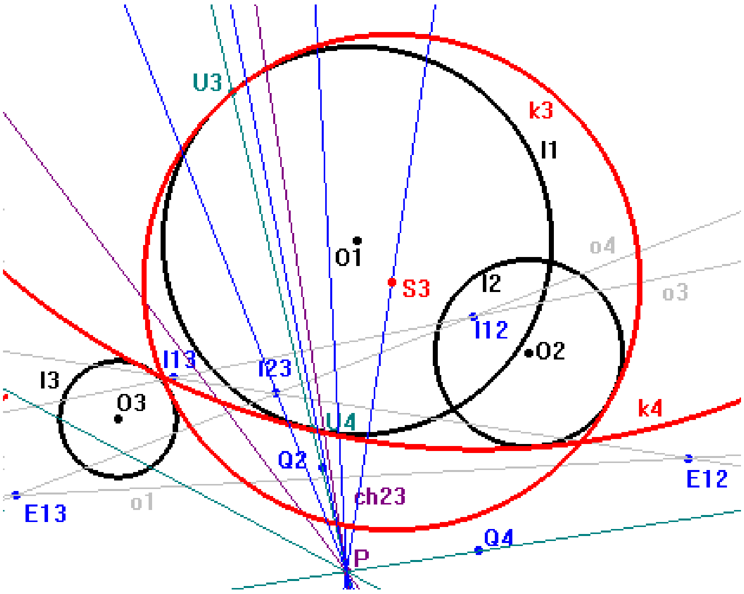
Obr. 4.10 e)

7) Kružnice s takovouto polohou mají čtyři řešení (obr. 4.10 f)). Pokud by se vnitřní kružnice dotýkala jedné z protínajících se kružnic, měla by úloha tři řešení. Pokud by se vnitřní kružnice dotýkala obou dvou protínajících se kružnic, měla by úloha dvě řešení.



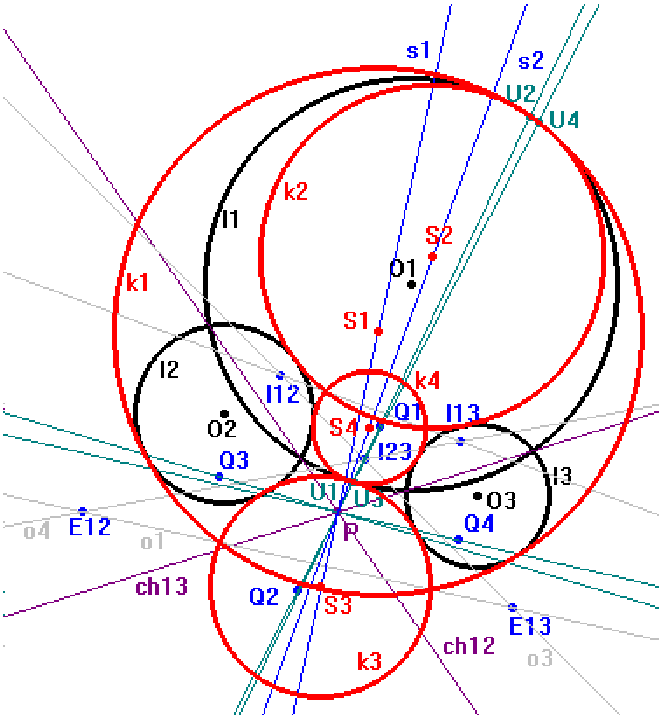
Obr. 4.10 f)

8) V tomto případě má úloha dvě řešení (obr. 4.10 g) - opět jsem použila obr 4.10 c)). Pokud by se kružnice l_3 dotýkala kružnice l_1, měla by úloha dvě řešení. Pokud by se kružnice l_3 dotýkala kružnice l_2, měla by úloha dvě řešení. A nakonec pokud by se kružnice l_3 dotýkala kružnice l_1 a zároveň kružnice l_2, měla by úloha tři řešení.



Obr. 4.10 g)

9) S takto rozmístěnými vstupními objekty bude mít úloha čtyři řešení (obr. 4.10 h)). Pokud by se kružnice l_2 a l_3 dotýkaly v jednom bodě, měla by úloha dvě řešení.

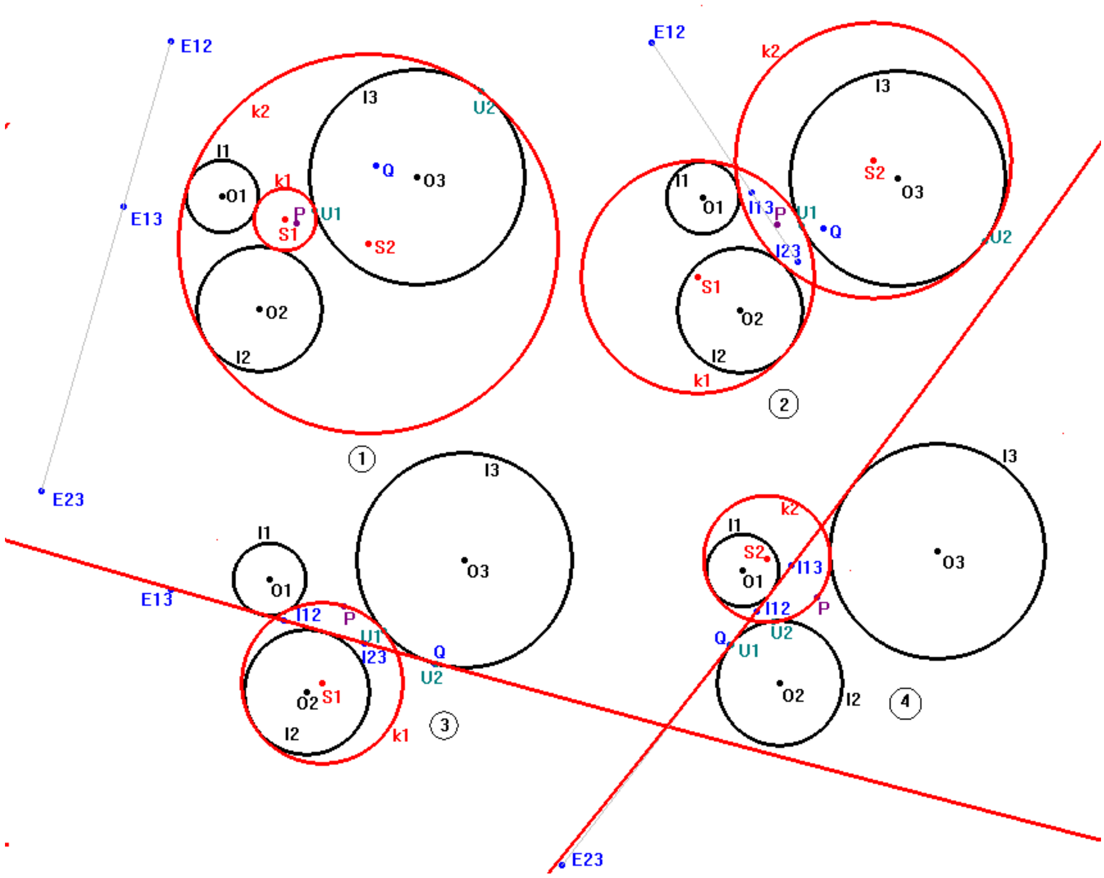


Obr. 4.10 h)

10) Takto zadané kružnice budou mít čtyři řešení (což si můžete vyzkoušet tahem za vstupní objekty u obr. 4.10 g).
11) A nakonec takto zadané kružnice budou mít dvě řešení (to si můžete vyzkoušet tahem za vstupní objekty u obr. 4.10 c)). Pokud by vnitřní kružnice měla společný jen jeden bod s kružnicí, která protíná kružnici vnější ve dvou bodech, měla by úloha tři řešení.

4.10.1 Podrobnější konstrukce desáté Apolloniovy úlohy

Na obr. 4.10 i) je znázorněn postup řešení pro každou osu podobnosti zvlášť. Jak už jsem napsala v kapitole 2.5 pro každou tuto osu podobnosti existují právě dvě řešení.



Obr. 4.10 i)

Závěr

Na závěr bych chtěla potvrdit, že program Cabri je opravdu výborný program. Hodně konstrukcí uvedených v této práci si neumím představit řešit pomocí kružítka a pravítka. Je výhodný i v tom, že můžete různě pohybovat se zadanými objekty a tím vyzkoušet plno možností rozestavění těchto vstupních objektů a zjistit pro různé tyto případy počet řešení. Myslím, že by tento program v dnešní době neměl chybět na základních a středních školách, je to velice dobrá pomůcka jak pro učitele tak pro děti.

Při řešení úloh v této bakalářské práci jsem postupně odstupovala od řešení dilatací a více přistupovala k Gergonnově metodě. Z počátku se mi totiž metoda dilatace líbila, ale pak jsem zjistila, že ve většině případů zjednoduším úlohu na takovou, co se poté řeší nejlépe stejnou metodou (stejnolehlost, metoda množin bodů dané vlastnosti…) jako úloha původní, což mi přišlo zbytečné pak zadanou úlohu zjednodušovat pomocí dilatace. Gergonnovo metodou se dají řešit všechny Apolloniovy metody, které mají v zadání alespoň jednu kružnici.

Seznam použité literatury

[1] Holubář, J.: *O methodách rovinných konstrukcí (Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné)*, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1949.

[2] Boček, L., Zhouf, J.: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha 1995.

[3] Niederle, A.: *Zajímavé dvojice trojúhelníků (Epizoda z planimetrie)*, ŠMM 47, ÚVMO v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1980.

[4] Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh (skriptum)*, MFF UK, SPN, Praha 1977.

[5] Beran, J.: *Apolloniovy úlohy řešené s využitím Cabri geometrie* (diplomová práce), ZČU, Plzeň, 2002.