

KLASICKÉ vs. POČÍTAČOVÉ METODY
PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH V GEOMETRII

Pavel PECH

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
2005

Recenzenti:

RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.

© Pavel Pech, 2005

ISBN 80-7040-805-7

Obsah

Předmluva	5
1 Úvod	7
2 Automatické dokazování vět	11
2.1 Historie	11
2.2 Základní pojmy z algebry	12
2.3 Automatické dokazování	15
2.4 Automatické odvozování	23
2.5 Automatické objevování	25
3 Zobecnění Heronova vzorce	33
3.1 Obsah mnohoúhelníka	34
3.1.1 Staudtova formule	34
3.1.2 Obsah pětiúhelníka a šestiúhelníka	37
3.2 Obsah tětiového mnohoúhelníka	39
3.2.1 Ptolemaiova formule	40
3.2.2 Heronův vzorec	45
3.2.3 Brahmaguptova formule pro čtyřúhelník	45
3.2.4 Obsah tětiového pětiúhelníka	50
3.2.5 Poloměr kružnice opsané tětiovému pětiúhelníku	53
3.2.6 Obsah tětiového šestiúhelníka	55
3.3 Závěrečné poznámky	56
4 Wallace - Simsonova věta	57
4.1 Zobecnění W. – S. věty podle Gergonne	61
4.2 Guzmánovo zobecnění W. – S. věty	63
4.3 Zobecnění W. – S. věty v prostoru	67
4.3.1 Zobecnění W.–S. věty na čtyřstěn	67
4.3.2 Zobecnění W. – S. věty na prostorový čtyřúhelník	72

5	Příčky v mnohoúhelníku	77
5.1	Ceova věta	78
5.1.1	Zobecnění Ceovy věty	83
5.2	Menelaova věta	86
5.2.1	Zobecnění Menelaovy věty	88
5.2.2	Zobecnění Menelaovy věty v prostoru	90
5.3	Eulerova věta	92
5.3.1	Prostorová analogie Eulerovy věty	96
5.4	Routhova věta	98
6	Petr-Douglas-Neumannova věta	103
6.1	Napoleonova věta	103
6.1.1	Kiepertova hyperbola	113
6.1.2	Finneyova věta	115
6.2	PDN věta pro čtyřúhelník	116
6.2.1	Thébaultova věta	117
6.2.2	Van Aubelova věta	118
6.3	PDN věta v prostoru	124
6.3.1	Douglasův pětiúhelník	124
7	Geometrické nerovnosti	127
7.1	Nerovnost mezi úhlopříčkami n -úhelníka	127
7.1.1	Rovnoběžníkové pravidlo	127
7.1.2	Nerovnost mezi úhlopříčkami čtyřúhelníka	132
7.1.3	Obecný případ	134
7.2	Eulerova nerovnost	135
8	Pravidelné mnohoúhelníky	139
8.1	Pravidelný pětiúhelník	140
8.2	Pravidelný sedmiúhelník	145
9	Různé	151
9.1	Neelementární konstrukční úloha	151
9.2	Množina bodů daných vlastností	153
9.3	Vivianiho věta	156
9.4	Gaussova přímka	158
	Závěr	161
	Literatura	163

Předmluva

Cíle publikace, která leží před Vámi, jsou v podstatě dva. Jedním z cílů je seznámit čtenáře s teorií automatického dokazování vět a aplikovat tuto teorii na příkladech. Druhým cílem je ukázat na zajímavá témata elementární geometrie, se kterými se autor setkal v průběhu let.

Obsah této knížky tvoří šest na sobě nezávislých geometrických příběhů, které jsou zaměřeny na určitou problematiku. Každým z těchto problémů se autor dříve samostatně hlouběji zabýval. Nyní byl učiněn pokus tato témata sdružit do jedné publikace.

Každý problém je nejprve řešen metodou automatického dokazování vět, ve druhém kroku je problém vyřešen klasicky - bez pomoci počítače (je-li to ovšem možné).

Snahou autora bylo, aby se čtenář nejen něco dozvěděl o nových počítačových metodách dokazování, odvozování a objevování vět, ale aby se také zamyslel nad vnitřní krásou klasických řešení a nad některými novými poznatky.

Můj dík patří oběma recenzentům – RNDr. J. Horovi, CSc. a RNDr. M. Lávičkovi, PhD. za pečlivé přečtení rukopisu a za poznámky a doporučení, které přispěly ke zkvalitnění textu.

V Českých Budějovicích 20. září 2005

Pavel Pech

Kapitola 1

Úvod

V poslední třetině dvacátého století byly vyvinuty účinné metody v automatickém dokazování vět elementární geometrie. Pomocí této teorie byly dokázány a dokonce objeveny stovky netriviálních vět.

V semináři, který jsem vedl v posledních letech na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity, jsme pomocí teorie automatického dokazování vět na počítači řešili řadu problémů elementární geometrie. Studenti, kteří tento volitelný seminář navštěvovali, byli většinou ve čtvrtém ročníku studia učitelství matematiky pro základní školy a pro školy střední, tj. měli znalosti základního kurzu geometrie. Pomocí počítače i klasickým způsobem jsme vyšetřovali řadu úloh – Heronovu formuli pro výpočet obsahu trojúhelníka a její zobecnění – Brahmaguptovu formuli pro výpočet obsahu tětívového čtyřúhelníka pomocí délek jeho stran, dále Staudtovu formuli, Wallace–Simsonovu větu a její zobecnění, Napoleonovu větu a další podobné problémy.

Klasická nebo též syntetická metoda dává lepší vhled do dané geometrické situace a tím umožňuje i lepší porozumění problému a více ukazuje krásu geometrie. Na druhé straně pomocí počítačové algebry můžeme řešit složité úlohy, které jsou klasickým způsobem obtížně řešitelné. Pomocí počítačové algebry lze provádět dokazování matematických vět (automatic theorem proving), odvozování (automatic derivation) a objevování (automatic discovery) nových vět. Zatímco pod automatickým odvozováním rozumíme nalezení tvrzení, které plyne z daných předpokladů, automatické objevování znamená hledání dodatečných podmínek, které je nutné přidat k předpokladům tak, aby se tvrzení, které obecně není pravdivé, stalo pravdivým. Automatické odvozování se někdy zahrnuje pod automatické objevování. Lze též provádět konstrukce, které není snadné sestrojít pomocí pravítka a kružítka, atd.

Tato kniha podává stručný přehled této teorie. Pokud je mi známo, v češtině literatura k této problematice neexistuje a tak zájemcům o hlubší studium do-

poručuji vynikající publikaci [15], viz též [38], [101]. Příklady jsou nakresleny pomocí dynamického softwaru Cabri II plus. Tento software poskytuje možnost *ověřit* čili *verifikovat* danou hypotézu. Jedná se o fyzické ověření daného faktu, které nelze v žádném případě zaměňovat s důkazem. Tento způsob lze využít na základních a středních školách tam, kde je přesný důkaz příliš obtížný. Všechny výpočty byly provedeny na počítači Intel Pentium 2.00GHz/1572MB RAM.

Knížka může rovněž sloužit všem zájemcům o geometrii. V několika kapitolách, které následují po výkladu nezbytné teorie k automatickému dokazování vět, jsou řešeny známé i méně známé problémy - nazval jsem je příběhy - se snahou popsat jejich řešení od počátku do současnosti.

V prvním příběhu "Zobecnění Heronova vzorce" se jedná o zobecnění Heronovy a Brahmaguptovy formule pro výpočet obsahu trojúhelníka a tětivového čtyřúhelníka pomocí délek stran, na tětivový pětiúhelník. Tento problém, který byl vyřešen v roce 1994 [83], je v této knize, na rozdíl od [83], řešen výhradně počítačovou metodou.

Ve druhém příběhu "Wallace–Simsonova věta" je tato věta rovinné geometrie zobecněna do třírozměrného prostoru. Nejprve jsou ukázána známá zobecnění Wallace – Simsonovy věty v rovině, z nichž zejména Guzmánovo zobecnění si zaslouhuje pozornost. Dále jsou ukázány dvě prostorové analogie této úlohy, které vedou na plochy třetího stupně s velmi zajímavými vlastnostmi.

Různá zobecnění Cevovy, Menelaovy a Eulerovy věty v rovině i v prostoru jsou předmětem kapitoly "Příčky v mnohoúhelníku". Zde je ukázána jednak síla počítačového přístupu, který spočívá v hledání nových formulí, jednak je tu ukázána síla tradiční a možná trochu opomíjené areální metody.

Napoleonova věta, její zobecnění Petrova věta a jejich rovinné a prostorové analogie jsou uvedeny v kapitole "Petr-Douglas-Neumannova věta". Jak plyne z názvu, je tato věta spjata se jménem významného českého matematika, profesora Karlovy univerzity, K. Petra, který větu jako první v roce 1905 publikoval.

V kapitole "Geometrické nerovnosti" je postupně zobecňována nerovnost mezi stranami a úhlopříčkami mnohoúhelníka v rovině i v prostoru. Základem je známá rovnost rovnoběžníka (z angl. parallelogram law), která sehrála důležitou roli ve třicátých letech minulého století, kdy bylo ukázáno, že Banachův prostor, v němž platí rovnost rovnoběžníka, je prostor Hilbertův. V této kapitole je též zkoumána známá Eulerova nerovnost mezi poloměry kružnice trojúhelníku opsané a vepsané.

Šestý příběh "Pravidelné mnohoúhelníky" je věnován problematice pravidelných mnohoúhelníků. Ačkoliv by se mohlo na první pohled zdát, že vše podstatné o pravidelných mnohoúhelnících je již známo, není tomu tak. V roce

1969 navštívili známého matematika dva chemici, s tím, že podle jejich výzkumů v organické chemii vychází, že rovnostranný a rovnoúhlý pětiúhelník v prostoru je nutně rovinný. Během krátké doby Van der Waerden a řada dalších matematiků dokázali, že pravidelný mnohoúhelník s lichým počtem vrcholů má vždy sudou dimenzi. V našem příběhu je tento problém řešen pomocí teorie automatického dokazování a objevování vět.

V poslední kapitole "Různé" jsou řešeny čtyři problémy. Jedním z nich je konstrukční úloha, kterou je obtížné řešit klasickými prostředky jako jsou kružítko a pravítko. S pomocí počítače jsme schopni řešit i takové úlohy, které byly dříve tabu, neboť byly považovány za (eukleidovsky) neřešitelné. Tato problematika by si zřejmě zasloužila zvláštní pojednání.

U všech úloh jsou většinou uváděna i klasická řešení. Pokud klasické řešení chybí, je to pravděpodobně způsobeno tím, že autor klasické řešení neznal.

Kapitola 2

Automatické dokazování vět

2.1 Historie

Teorie automatického dokazování vět v sobě zahrnuje automatické dokazování, automatické odvozování a automatické objevování matematických vět, tj. dokazování, odvozování a objevování vět pomocí počítače. Nejedná se tedy pouze o dokazování vět, jak napovídá název. Mezinárodně se však tento název vžil, neboť tato teorie byla nejprve použita k dokazování vět. Pokud se bude jednat o automatické odvozování či objevování, raději tuto skutečnost zdůrazníme.

Když v roce 1987 vyšla základní kniha čínského matematika S. Ch. Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving* [39], napsal americký matematik Larry Woss v předmluvě k této knížce: "Když byly počítače nejprve vymyšleny, potom navrženy a posléze realizovány, málo lidí (pokud vůbec) se domnívalo, že v roce 1987 budou existovat počítačové programy schopné dokazovat věty z různých oblastí matematiky. Dokonce, pokud by člověk v počátcích počítačového věku vážně předpověděl, že počítačové programy budou příležitostně používány na zodpovězení otevřených otázek z matematiky, potom by se mu dostalo nanejvýš zdvořilého úsměvu." Myslím, že tato slova velmi dobře vystihují pohled většiny lidí na počítače dokonce i dnes, téměř o dvacet let později. Výsledky matematické logiky a práce A. Tarského [96] z 30. let dvacátého století předznamenal další vývoj v teorii automatického dokazování vět. Základní práce čínského matematika W. Wu [105] z roku 1978 je založena na operaci pseudodělení a triangulaci polynomických rovnic. Na myšlenky Wu navázal další čínský matematik S. Ch. Chou. Nejznámější se stala jeho kniha [39], ve které je vyřešeno 500 příkladů z elementární geometrie.

V sedmdesátých letech se objevuje ještě jiná metoda, která je založena na pojmu Gröbnerova báze ideálu [13]. Tuto metodu rozvinul D. Kapur [42], který následně porovnal obě základní metody – metodu Wu a metodu založe-

nou na Gröbnerových bázích.

V této knize budeme používat metodu, která vychází z teorie Gröbnerových bází ideálu a teorie eliminace, viz např. [15], [101].

2.2 Základní pojmy z algebry

Tato kapitola obsahuje pojmy z algebry, které jsou základními kameny v teorii automatického dokazování vět. Výčet pojmů z algebry není úplný, spíše slouží jako vodítko pro orientaci v dané teorii. Pro naše účely je však tento výčet postačující. Pro hlubší studium doporučujeme [15], [39].

Písmenem K budeme značit komutativní těleso a $K[x_1, \dots, x_n]$ bude okruh polynomů n neurčitých s koeficienty z tělesa K . Za K budeme většinou uvažovat těleso reálných čísel \mathbb{R} nebo komplexních čísel \mathbb{C} .

Definice: *Nechť h_1, \dots, h_r jsou polynomy z $K[x_1, \dots, x_n]$. Potom se množina bodů $V(h_1, \dots, h_r)$, kde*

$$V(h_1, \dots, h_r) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n; h_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pro } 1 \leq i \leq r\} \quad (2.1)$$

nazývá algebraická nebo též afinní varieta definovaná pomocí h_1, \dots, h_r .

Také říkáme, že algebraická varieta je nulová množina polynomů h_1, \dots, h_r . Položme $K = \mathbb{R}$, kde \mathbb{R} je množina reálných čísel a uvažujme body v rovině \mathbb{R}^2 . Potom $V(x^2 - y)$ je parabola, $V(x^2 - y, x - y)$ tvoří průnik paraboly $x^2 - y = 0$ a přímky $x - y = 0$, tj. body $[0, 0], [1, 1]$ atd. V prostoru \mathbb{R}^3 je příkladem variety $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ kulová plocha o poloměru 1.

Dalším důležitým pojmem je pojem ideálu.

Definice: *Množina $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ se nazývá ideál, jestliže splňuje*

- 1) $0 \in I$.
- 2) *Jestliže $f, g \in I$, potom $f + g \in I$.*
- 3) *Jestliže $f \in I$ a $c \in K[x_1, \dots, x_n]$, potom $cf \in I$.*

Ideál je tedy množina polynomů, která je uzavřená vzhledem k operaci sčítání a násobení libovolným prvkem z okruhu polynomů $K[x_1, \dots, x_n]$. Platí věta:

Věta: *Nechť h_1, \dots, h_r jsou polynomy z $K[x_1, \dots, x_n]$. Potom množina (h_1, \dots, h_r) , kde*

$$(h_1, \dots, h_r) = \{g_1 h_1 + \dots + g_r h_r; g_1, \dots, g_r \in K[x_1, \dots, x_n]\} \quad (2.2)$$

je ideál. Tento ideál nazýváme ideál generovaný polynomy h_1, \dots, h_r .

Ideál I je *konečně generovaný*, jestliže existují $h_1, \dots, h_r \in K[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $I = (h_1, \dots, h_r)$. Potom říkáme, že h_1, \dots, h_r tvoří *bázi* ideálu I . Ideál I může mít mnoho bází. Jeden typ těchto bází má velmi speciální vlastnosti – takovou bázi budeme nazývat *Gröbnerova báze*. O vlastnostech Gröbnerovy báze ideálu budeme hovořit později. V našich úvahách ji budeme využívat, viz [20].

Ideál (h_1, \dots, h_r) tedy obsahuje všechny lineární kombinace $g_1 h_1 + \dots + g_r h_r$ polynomů h_1, \dots, h_r , přičemž koeficienty této lineární kombinace jsou polynomy $g_1, \dots, g_r \in K[x_1, \dots, x_n]$. Situace nápadně připomíná vektorový prostor, generovaný vektory h_1, \dots, h_r . Potom libovolný vektor vektorového prostoru, který je generován vektory h_1, \dots, h_r , lze vyjádřit jako lineární kombinaci $g_1 h_1 + \dots + g_r h_r$, kde g_1, \dots, g_r jsou prvky z nějakého tělesa K .

Jeden z hlavních problémů algebraické geometrie vyjadřuje tzv. Ideal Membership Problem, tj. problém, jak poznat, že polynom h patří do ideálu, který je generován polynomy h_1, \dots, h_r . Tento problém byl vyřešen v poslední třetině dvacátého století pomocí Gröbnerovy báze ideálu, viz [13], [15].

Jak již bylo řečeno, Gröbnerova báze ideálu I je báze, která má specifické vlastnosti. Jednu z hlavních vlastností Gröbnerovy báze popisuje následující věta:

Věta: *Nechť $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ a nechť $h \in K[x_1, \dots, x_n]$. Potom $h \in I$, právě když zbytek r při dělení polynomu h polynomy z G je roven 0.*

Pokud bychom vzali bázi, která není Gröbnerovu bázi ideálu I , dostali bychom při dělení polynomu $h \in I$ prvky této báze různé zbytky v závislosti na pořadí dělitelů. Pouze Gröbnerova báze má tu vlastnost, že při libovolném pořadí dělitelů dostaneme vždy zbytek nula. Výpočet Gröbnerovy báze ideálu je možný pomocí tzv. *Buchbergerova algoritmu*, který je implementován ve většině matematických programů, např. v CoCoA stačí zadat `GBasis(I)`.

Při zkoumání, zda polynom h patří do ideálu I , tedy stačí vypočítat Gröbnerovu bázi ideálu I a zjistit zbytek r při dělení polynomu h prvky Gröbnerovy báze. Je-li zbytek r roven nule, potom $h \in I$, je-li zbytek r různý od nuly, potom polynom h nepatří do ideálu I . Zbytek r je často nazýván *normální formou*. Algoritmus pro výpočet normální formy polynomu h vzhledem k ideálu I je implementován ve většině matematických programů. Např. v programu CoCoA má tento příkaz tvar `NF(h, I)`.

Při řešení soustavy algebraických rovnic postupně eliminujeme proměnné, viz např. Gaussova eliminace pro soustavy lineárních rovnic. Při eliminaci pro-

měnných v ideálu dostaneme podle následující definice tzv. *eliminační ideál*:

Definice: Je dán ideál $I = (h_1, \dots, h_s) \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Potom **r-tý eliminační ideál** I_r je ideál

$$I_r = I \cap K[x_{r+1}, \dots, x_n].$$

Pro Gröbnerovu bázi eliminačního ideálu I_r platí věta:

Věta: Necht $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ je ideál a necht G je Gröbnerova báze ideálu I vzhledem k lexikografickému uspořádání $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Potom pro každé $0 \leq r \leq n$ je

$$G_r = G \cap K[x_{r+1}, \dots, x_n]$$

Gröbnerova báze eliminačního ideálu I_r .

Výpočet Gröbnerovy báze eliminačního ideálu je přístupný příkazem `Elim` nebo jeho analogiemi, který je obsažen ve většině matematických programů. Tento příkaz je často využíván při řešení soustavy algebraických rovnic.

Definice: Necht $V \subset K^n$ je algebraická varieta. Potom se množina $I(V)$, kde

$$I(V) = \{h \in K[x_1, \dots, x_n]; h(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pro všechna } (a_1, \dots, a_n) \in V\} \quad (2.3)$$

nazývá **ideál variety** V .

Snadno se ověří, že ideál $I(V)$ variety V je ideál. Zavedme ještě další potřebný pojem.

Definice: Necht $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ je ideál. Množina $V(I)$

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n; h(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pro všechna } h \in I\} \quad (2.4)$$

se nazývá **varieta ideálu** I .

Tedy, jestliže $I = (h_1, \dots, h_r)$, potom $V(I) = V(h_1, \dots, h_r)$. Poslední definice je důsledkem Hilbertovy věty o bázi, která říká, že každý ideál $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ má konečnou množinu generátorů.

Podle posledních definic a vět tedy můžeme každému ideálu I přiřadit varietu $V(I)$ ideálu I

$$I \rightarrow V(I)$$

a také naopak, každé varietě V umíme přiřadit ideál $I(V)$ variety V

$$V \rightarrow I(V).$$

Platí věta:

Věta: *Nechť $I_1 \subset I_2$ jsou ideály, potom $V(I_1) \supset V(I_2)$. Podobně, jestliže $V_1 \subset V_2$ jsou variety, potom $I(V_1) \supset I(V_2)$. Dále pro každou varietu V platí $V(I(V)) = V$.*

Je-li dán ideál I , potom mu umíme přiřadit jeho nulovou množinu - varietu $V(I)$. Této nulové množině $V(I)$ přiřadíme její ideál $I(V(I))$. Otázkou je, jak tento ideál vypadá?

Odpověď na tuto otázku dává slavná "Hilbertova věta o nulách", *Nullstellensatz*. Než tuto větu vyslovíme, uvedeme definici radikálu ideálu.

Definice: *Nechť $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ je ideál. Potom se množina \sqrt{I} , kde*

$$\sqrt{I} = \{f; f^m \in I \text{ pro nějaké celé } m \geq 1\},$$

nazývá radikál ideálu I .

Zřejmě je $I \subset \sqrt{I}$, protože z $f \in I$ plyne $f^1 \in I$ a odtud $f \in \sqrt{I}$. Radikál \sqrt{I} tedy obsahuje ideál I . Je zajímavé, že radikál \sqrt{I} ideálu I je opět ideál:

Věta: *Nechť I je ideál v $K[x_1, \dots, x_n]$. Potom radikál \sqrt{I} ideálu I je ideál v $K[x_1, \dots, x_n]$.*

A nyní slíbená Hilbertova věta:

Věta (Nullstellensatz): *Nechť I je ideál v $K[x_1, \dots, x_n]$, kde K je algebraicky uzavřené těleso. Potom platí*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}. \quad (2.5)$$

Následující věta říká, jakým způsobem můžeme zjistit, zda polynom h patří do radikálu \sqrt{I} ideálu I .

Věta: *Nechť K je libovolné těleso a nechť $I = (h_1, \dots, h_r) \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Potom $h \in \sqrt{I}$ právě když konstantní polynom 1 je prvkem ideálu $J = (h_1, \dots, h_r, ht - 1) \subset K[x_1, \dots, x_n, t]$.*

2.3 Automatické dokazování

Nechť K je těleso charakteristiky 0, např. těleso racionálních čísel \mathbb{Q} , a L algebraicky uzavřené těleso obsahující K , např. těleso komplexních čísel \mathbb{C} . Označme dále $K[x_1, \dots, x_n]$ okruh polynomů n neurčitých $x = (x_1, \dots, x_n)$ s koeficienty z tělesa K .

Automatické dokazování vět se zabývá geometrickými tvrzeními, která mají tvar $H \Rightarrow C$, kde H je množina předpokladů a C je závěr.

Základní kroky automatického dokazování vět jsou:

- 1) Zavedení soustavy souřadnic.
- 2) Algebraická formulace problému.
- 3) Důkaz tvrzení.
- 4) Hledání dodatečných podmínek v případě, že se důkaz nepodařil.

Jednotlivé kroky podrobněji popíšeme.

Podle povahy problému *zavedeme soustavu souřadnic* v rovině, v prostoru nebo ve vyšší dimenzi (kartézskou nebo afinní či jinou). Vhodná volba soustavy souřadnic je velmi důležitá. Vždy se snažíme, aby příslušné algebraické rovnice byly co nejjednodušší. Různé volby soustavy souřadnic vedou na různou složitost při řešení problému.

Po zavedení soustavy souřadnic provedeme *algebraickou formulaci* problému. Geometrické vlastnosti objektů přeložíme do algebraických relací. Tato fáze je charakterizována sestavením množiny předpokladů H , které mají tvar algebraických rovnic (tj. vyjádřených ve tvaru polynomů)

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = 0, h_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, h_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

a závěru C , který je vyjádřen rovnicí

$$c(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

kde $h_1, \dots, h_r, c \in K[x_1, \dots, x_n]$.¹

Tedy výsledkem druhého kroku je algebraický tvar tvrzení

$$\forall x \in L^n, \quad h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = 0. \quad (2.6)$$

Algebraická formulace problému má na výsledek vyšetřování velký vliv. Protože pracujeme v oboru komplexních čísel, nemůžeme používat nerovnice. Těleso komplexních čísel totiž nelze uspořádat. Veškeré geometrické vlastnosti objektů je nutné vyjadřovat pomocí rovnic. To často činí potíže u problémů, které jsou definovány pomocí orientace, např. při určení vnitřních nebo vnějších bodů útvarů (např. vnitřní bod trojúhelníka). Dochází tak k nejednoznačnosti a k řadě z toho vyplývajících problémů při dokazování.

Dále dbáme, aby příslušné algebraické rovnice byly jednoduché, tj. aby stupeň polynomů a počet proměnných byl co nejnižší. Např. se můžeme rozhodnout, zda při vyjádření poměru vzdáleností bodu úsečky od jejích krajních bodů, použijeme dělicí poměr nebo klasickou vzdálenost.

Velkou pozornost je také nutné věnovat přesnému popisu geometrických vlastností při jejich překladu do algebraických rovnic [53]. Při nepřesném překladu

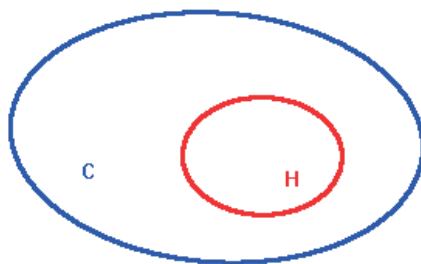
¹Pokud se závěr C skládá z více rovnic $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$, potom vyšetřujeme každou rovnici samostatně.

vznikají při důkazu např. problémy s určením dodatečných podmínek apod.

Třetím krokem automatického dokazování vět je *důkaz tvrzení* (2.6).

Definice: Označme $I = (h_1, \dots, h_r)$. Tvrzení (2.6) je **obecně pravdivé**, jestliže varieta předpokladů $H(I)$ je podmnožinou variety závěru C , obr. 2.1, tj.

$$H(I) \subset C. \quad (2.7)$$



Obrázek 2.1: $H \Rightarrow C \Leftrightarrow H \subset C$

Připomeňme, že varieta předpokladů H je množina všech řešení soustavy rovnic $h_1 = 0, \dots, h_r = 0$, tj.

$$H = \{x \in L^n; h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0\}. \quad (2.8)$$

Tedy H je nulová množina polynomů $h_1 = 0, \dots, h_r = 0$. V souladu s předchozí teorií můžeme místo H psát $H(I)$, kde $I = (h_1, \dots, h_r)$. Varieta závěru C je množina všech řešení rovnice $c = 0$, tj.

$$C = \{x; c(x) = 0\}. \quad (2.9)$$

Následující věta dává návod, jak ukázat platnost (2.7). Platí věta:

Věta: *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- a) *Tvrzení (2.6) je obecně pravdivé.*
- b) $c \in \sqrt{(h_1, \dots, h_r)}$.
- c) $1 \in (h_1, \dots, h_r, ct - 1) \subset K[x_1, \dots, x_n]$.

Stačí tedy např. ukázat, že konstantní polynom 1 je prvkem ideálu

$$J = (h_1, \dots, h_r, ct - 1),$$

kde t je pomocná proměnná.

Podle předcházejících vět zjistíme normální formu 1 vzhledem k ideálu $J =$

$(h_1, \dots, h_r, ct - 1)$. V programu CoCoA použijeme příkaz $\text{NF}(1, J)$. Pokud je odpověď 0, znamená to, že $1 \in J$ a tvrzení (2.6) je obecně pravdivé. Pokud odpověď není nula, potom tvrzení (2.6) není obecně pravdivé a je nutno hledat dodatečné podmínky, viz dále.

Poznámka:

V praxi většinou stačí ukázat, že polynom závěru c je prvkem ideálu $I = (h_1, \dots, h_r)$. Normální formu polynomu c vzhledem k ideálu I vyšetříme příkazem $\text{NF}(c, I)$. Pokud dostaneme odpověď 0, je tvrzení obecně pravdivé. Pokud nula nevyjde, potom je nutné užít předchozí silnější kritérium a zjistit, zda 1 je prvkem ideálu $J = I \cup \{ct - 1\}$.

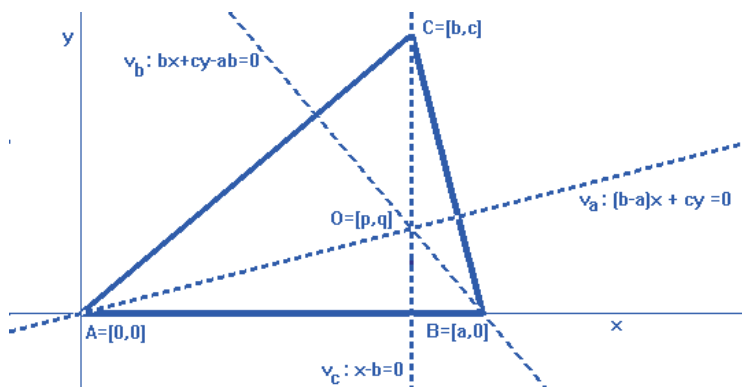
V kapitole "Pravidelné mnohoúhelníky" uvedeme případ, kdy $I \subsetneq \sqrt{I}$ a kdy c není prvkem ideálu I , ale je prvkem jeho radikálu \sqrt{I} . \square

Nejjednodušší způsob, jak ukázat podstatu automatického dokazování vět, je demonstrace na příkladu. Budeme řešit následující příklad.

Příklad:

Dokažte, že se výšky trojúhelníka protínají v jediném bodě.

Nejprve zvolíme vhodnou soustavu souřadnic, tj. takovou, aby vztahy, kterými budeme analyticky popisovat geometrickou situaci, byly co nejjednodušší, obr. 2.2. Označme $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [b, c]$ vrcholy trojúhelníka ABC . Nyní



Obrázek 2.2: Výšky trojúhelníka ABC procházejí jedním bodem – počítačový důkaz

vyjádříme rovnice výšek v_a, v_b, v_c :

$$v_a : (b - a)x + cy = 0, \quad v_b : bx + cy - ab = 0, \quad v_c : x - b = 0.$$

Předpokládejme, že se výšky v_b a v_c protínají v bodě $O = [p, q]$, tj. že platí

$$O \in v_b \Leftrightarrow h_1 : bp + cq - ab = 0,$$

$$O \in v_c \Leftrightarrow h_2 : p - b = 0.$$

Chceme ukázat, že platí závěr: výška v_a obsahuje bod O , tj.

$$O \in v_a \Leftrightarrow z : (b - a)p + cq = 0.$$

Tedy máme dokázat následující tvrzení:

$$\forall p, q, \quad bp + cq - ab = 0, p - b = 0 \quad \Rightarrow \quad (b - a)p + cq = 0. \quad (2.10)$$

V tomto velmi jednoduchém případě jsme schopni ukázat, že tvrzení (2.14) je pravdivé, dokonce ručně – bez užití počítače. Uvědomme si totiž, že platí

$$(b - a)p + cq = 1 \cdot (bp + cq - ab) - a \cdot (p - b). \quad (2.11)$$

Vyjádřili jsme polynom závěru $(b - a)p + cq$ jako lineární kombinaci polynomů předpokladů $bp + cq - ab$ a $p - b$. Z platnosti rovnic $bp + cq - ab = 0$, $p - b = 0$ plyne z (2.11) platnost rovnice $(b - a)p + cq = 0$.

Ukázali jsme, že polynom $(b - a)p + cq$ náleží ideálu $I = (bp + cq - ab, p - b)$. V programu CoCoA² napíšeme

```
Use R := Q[abcpq];
I := Ideal(bp+cq-ab, p-b);
NF((b-a)p+cq, I);
```

a dostaneme odpověď 0, tj. $NF((b - a)p + cq, I) = 0$ a tvrzení (2.14) je obecně pravdivé. "Počítačový" důkaz je hotov. \square

Zpravidla situace tak jednoduchá není. Ve většině případů je nutno k předpokladům přidat tzv. podmínky nedegenerace.

Ve čtvrtém kroku automatického dokazování vět se soustředíme na *hledání dodatečných podmínek*.

Pokud se nám nepodaří dokázat, že tvrzení (2.6) je obecně pravdivé, ještě to neznamená, že toto tvrzení neplatí. Může se stát, že tvrzení není obecně pravdivé, protože chybí *podmínky nedegenerace*, které zahrnujeme mezi tzv. *dodatečné podmínky*. Tento krok je charakterizován hledáním takových podmínek, za kterých tvrzení ztrácí význam, např. trojúhelník je úsečkou, úsečka je dvojice splývajících bodů, kružnice má nulový poloměr atd. Tyto situace je nutné vyloučit. Podmínky nedegenerace mají tvar nerovností

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \neq 0, \dots, g_s(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \quad (2.12)$$

²Software CoCoA je zdarma k dispozici na adrese <http://cocoa.dima.unige.it>

a závisí pouze na proměnných, které jsou nezávislé, tj. těch proměnných, které nezávisí na jiných proměnných. Označme je např. x_1, \dots, x_m a nazveme je *nezávislé* proměnné. Zbývající proměnné x_{m+1}, \dots, x_n jsou *závislé* proměnné, protože závisí na nezávislých proměnných. Pomocí nezávislých proměnných zadáváme např. základní body útvaru atd.

Podmínky nedegenerace (2.12) můžeme vyhledat následujícím způsobem. V ideálu $J = I \cup \{ct - 1\}$ eliminujeme pomocnou proměnnou t a všechny *závislé* proměnné. Ve vzniklém eliminačním ideálu jsou obsaženy podmínky degenerace $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$ (pokud existují). Eliminaci proměnných provedeme v CoCoA prostřednictvím příkazu `Elim`. Zahrneme-li podmínky (2.12) do tvrzení (2.6), dostaneme

$$\forall x \in L^n, h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0, g_1(x) \neq 0, \dots, g_s(x) \neq 0 \Rightarrow c(x) = 0. \quad (2.13)$$

Abychom dokázali tvrzení ve tvaru (2.13), stačí ukázat, že konstantní polynom 1 je prvkem ideálu

$$I' = (h_1, \dots, h_r, g_1 t_1 - 1, \dots, g_s t_s - 1, ct - 1),$$

kde t_1, \dots, t_s, t jsou pomocné proměnné. Zde si povšimněme algebraického překladače např. nerovnice $g_1 \neq 0$, který je $g_1 t_1 - 1 = 0$. Pokud by totiž nastalo $g_1 = 0$, potom $1 = 0$ a nulová množina ideálu I' by byla množina prázdná.

Definice: Pokud je normální forma 1 vzhledem k ideálu I' rovna nule, potom říkáme, že tvrzení (2.6) je **genericky pravdivé**.

Většina tvrzení je genericky pravdivých. Předpoklady o degeneraci vyšetřovaných obrazců nejsou v tvrzeních většinou obsažena. Mlčky totiž předpokládáme, že trojúhelník je trojúhelník a ne úsečka, že úsečka je úsečka a ne dvojice splývajících bodů, že kružnice má nenulový poloměr apod. Takové útvary nazýváme generické. V případech, kdy útvary nejsou generické, věta často neplatí nebo nemá význam.

Ukažme si použití podmínek nedegenerace na příkladu, kterým jsme se již zabývali. Máme dokázat, že se výšky trojúhelníka protínají v jediném bodě.

Oproti předchozímu příkladu nyní předpokládejme, že místo výšek v_b a v_c se v bodě $O = [p, q]$ protínají výšky v_a a v_b . Chceme dokázat, že bodem O prochází i výška v_c . Tj. předpokládáme, že z platnosti rovnic $(b - a)p + cq = 0$ a $bp + cq - ab = 0$ plyne závěr $p - b = 0$. Naše tvrzení má tvar

$$\forall p, q, \quad (b - a)p + cq = 0, bp + cq - ab = 0 \quad \Rightarrow \quad p - b = 0. \quad (2.14)$$

Vyšetříme normální formu polynomu závěru $p - b$ vzhledem k ideálu $I = ((b - a)p + cq, bp + cq - ab)$. V CoCoA napíšeme

```
Use R:=Q[abcpq];
I:=Ideal((b-a)p+cq,bp+cq-ab);
NF(p-b,I);
```

Odpověď $p - b$ znamená, že polynom $p - b$ není prvkem ideálu I . Použijeme proto silnější metodu, abychom vyšetřili, zda polynom $p - b$ je prvkem radikálu \sqrt{I} ideálu I . Dostaneme

```
Use R:=Q[abcpqt];
I:=Ideal((b-a)p+cq,bp+cq-ab,(p-b)t-1);
NF(1,I);
```

odpověď 1, která znamená, že tvrzení není obecně pravdivé.

Určíme dodatečné podmínky, kterými jsou většinou podmínky nedegenerace. Abychom tyto podmínky našli, přidáme k ideálu $I = ((b-a)p+cq, bp+cq-ab)$ negaci závěru $(p-b)t-1$ a obdržíme ideál $J = ((b-a)p+cq, bp+cq-ab, (p-b)t-1)$, kde t je pomocná proměnná. Přidáním polynomu $(p-b)t-1$ k ideálu I předpokládáme, že závěr neplatí, zatímco všechny ostatní předpoklady jsou zachovány (podobně jako u důkazu sporem). Vlastně se tímto ptáme "Co je příčinou neplatnosti závěru?" Eliminací proměnných p, q, t v ideálu J eliminujeme *závislé* proměnné p, q, t v ideálu J . Vzniklý eliminační ideál obsahuje pouze zbývající *nezávislé* proměnné a, b, c . Zadáme

```
Use R:=Q[abcpqt];
J:=Ideal((b-a)p+cq,bp+cq-ab,(p-b)t-1);
Elim(p..t,J);
```

a dostaneme jedinou podmínku $a = 0$. Geometricky to znamená, že vrcholy A a B trojúhelníka ABC splývají. Tento případ vyloučíme přidáním podmínky nedegenerace $at - 1 = 0$ k ideálu I . Dostaneme tak ideál $I' = I \cup \{at - 1\}$. Nyní celý postup opakujeme s tím, že místo ideálu I vyšetřujeme ideál I' .

```
Use R:=Q[abcpqt];
I':=Ideal((b-a)p+cq,bp+cq-ab,at-1);
NF(p-b,I');
```

Odpověď 0 znamená, že tvrzení je genericky pravdivé. □

Proč bylo nutné vyloučit případ $a = 0$, můžeme nahlédnout z rovnosti

$$p - b = -\frac{1}{a}((b - a)p + cq) + \frac{1}{a}(bp + cq - ab),$$

kde je polynom $p - b$ vyjádřen jako lineární kombinace polynomů $(b - a)p + cq$ a $bp + cq - ab$ s jedinou výjimkou, totiž $a = 0$.

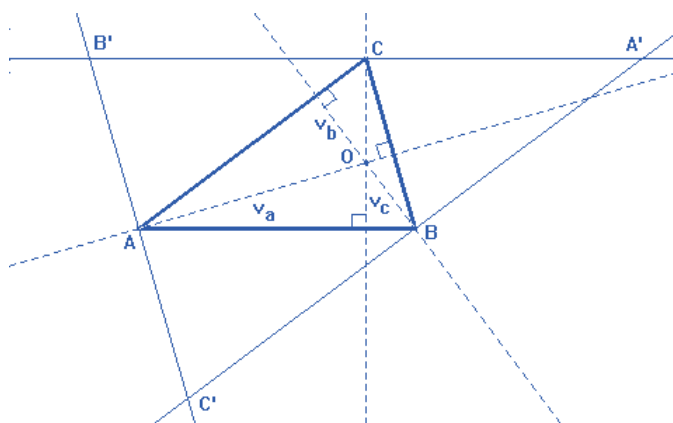
Poznámky:

1) Viděli jsme dvě téměř totožná řešení stejného problému. Při prvním způsobu řešení jsme nepotřebovali vyšetřovat podmínky nedegenerace, zatímco při druhém řešení ano. Proto je nutné si uvědomit, jakou roli hraje při řešení úlohy strategie řešení a volba soustavy souřadnic, viz bod 2) této poznámky.

2) Vzniklé problémy můžeme odstranit volbou souřadnic vrcholů trojúhelníka $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [b, c]$, kde jsme položili $a = 1$. Jednotku délky totiž můžeme zvolit. Při této volbě soustavy souřadnic vedou oba nahoře zmíněné postupy k obecné pravdivosti tvrzení. \square

Protože se v celé knížce budeme při řešení problémů setkávat s počítačovými i klasickými důkazy, uvedeme klasický důkaz tvrzení, že se výšky trojúhelníka protínají v jednom bodě.

Vrcholy A, B, C trojúhelníka vedeme rovnoběžky s protějšími stranami BC, AC, AB . Dostaneme nový trojúhelník $A'B'C'$, v němž výšky v_a, v_b, v_c trojúhelníka ABC tvoří osy stran, obr. 2.3. Stačí ukázat, že se osy stran trojúhel-



Obrázek 2.3: Výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě – klasický důkaz

níka $A'B'C'$ protínají v jednom bodě, což je snadné neboť z $|A'O| = |B'O|$ a $|B'O| = |C'O|$ plyne $|A'O| = |C'O|$. \square

K důkazu tvrzení jsme např. mohli použít Cevovu větu, viz kapitola "Příčky v mnohoúhelníku", apod.

Klasický důkaz, který jsme právě ukázali, měl kromě řady kladů jeden podstatný nedostatek – potřebovali jsme mít *klíčový nápad*, který vede k řešení problému. Někdy se však může stát, že žádný klíčový nápad nedostaneme...

2.4 Automatické odvozování

V další části se zaměříme na *automatické odvozování vět*, které většinou odlišujeme od automatického objevování vět, o kterém budeme hovořit v další kapitole. Pod automatickým odvozováním vět rozumíme hledání geometrických tvrzení předepsaných vlastností, která plynou z daných předpokladů.

Předpokládejme, že rovnice $h_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, h_r(x_1, \dots, x_n) = 0$ vyjadřují geometrické vlastnosti nějakého útvaru. Necht' x_1, \dots, x_m , jsou nezávislé proměnné a x_{m+1}, \dots, x_n jsou závislé proměnné. Eliminací proměnných (závislých nebo nezávislých) dostaneme eliminační ideál, který obsahuje pouze polynomy v proměnných, které jsme neeliminovali. Zpravidla eliminujeme nezávislé proměnné x_1, \dots, x_m a případně i některé závislé proměnné x_{m+1}, \dots, x_p , $m \leq p \leq n$ tak, abychom dostali nějaké geometrické tvrzení, vyjádřené rovností $c(x_{p+1}, \dots, x_n) = 0$, které takto plyne z předpokladů $h_1, \dots, h_r = 0$. Platí věta:

Věta: Necht' $I = (h_1, \dots, h_r) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ a necht' $c \in I \cap K[x_{p+1}, \dots, x_n]$, pro $p \leq n$. Potom platí

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, h_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow c(x_{p+1}, \dots, x_n) = 0. \quad (2.15)$$

Důkaz: Plyne okamžitě z inkluze $H \cap C \subseteq C$, kde H je varieta předpokladů $h_1 = 0, \dots, h_r = 0$ a C je varieta závěru $c = 0$. \square

Metodu automatického odvozování ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad:

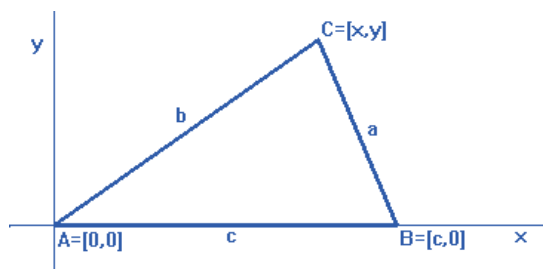
Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c . Vyjádřete obsah p trojúhelníka ABC pomocí a, b, c .

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že pro souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC platí $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$, $C = [x, y]$, obr. 2.4. Chceme vyjádřit obsah p trojúhelníka ABC pomocí délek jeho stran $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Je zřejmé, že:

$$\begin{aligned} b = |AC| &\Leftrightarrow h_1 : x^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ a = |BC| &\Leftrightarrow h_2 : (x - c)^2 + y^2 - a^2 = 0, \\ p = \text{obsah } \triangle ABC &\Leftrightarrow h_3 : p - \frac{1}{2}cy = 0. \end{aligned}$$

V okruhu polynomů $K[a, b, c, x, y, p]$ uvažujme ideál $I = (x^2 + y^2 - b^2, (x - c)^2 + y^2 - a^2, p - \frac{1}{2}cy)$. Hledáme takovou formuli, která vyjadřuje vztah mezi délkami stran a, b, c trojúhelníka ABC a jeho obsahem p . Takový polynom náleží do eliminačního ideálu $I \cap K[a, b, c, p]$. Eliminací proměnných x, y v ideálu I

Use R ::= Q[xyabcp];



Obrázek 2.4:

$I := \text{Ideal}(x^2 + y^2 - b^2, (x - c)^2 + y^2 - a^2, 2p - cy);$
 $\text{Elim}(x, y, I);$

obdržíme jedinou rovnici tvaru

$$16p^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2, \quad (2.16)$$

která má po faktorizaci tvar

$$16p^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c). \quad (2.17)$$

Snadno vidíme, že poslední vztah je totéž jako

$$p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \quad (2.18)$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Odvodili jsme známý Heronův vzorec. □

Pro srovnání uveďme "klasický" důkaz Heronovy formule. Pro obsah trojúhelníka označeného podle obr. 2.5 platí

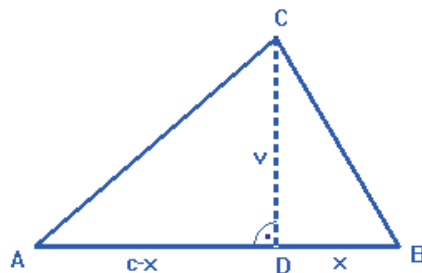
$$p = \frac{1}{2}cv. \quad (2.19)$$

Je tedy nutno vyjádřit výšku v pomocí a, b, c . Z pravoúhlých trojúhelníků ADC a CDB plyne po řadě podle Pythagorovy věty

$$v^2 = b^2 - (c - x)^2, \quad v^2 = a^2 - x^2. \quad (2.20)$$

Z rovnosti levých stran plyne rovnost pravých stran $b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$ a odtud $2cx = a^2 - b^2 + c^2$. Dosazením za x do (2.20) dostaneme

$$4c^2v^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2. \quad (2.21)$$



Obrázek 2.5:

Konečně dosazením za v z (2.21) do (2.19) dostaneme

$$16p^2 = 4c^2v^2 \Leftrightarrow 16p^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 \Leftrightarrow 16p^2 = (2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 + b^2 - c^2) \Leftrightarrow 16p^2 = ((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2) \Leftrightarrow 16p^2 = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c),$$

což je vztah (2.16). □

Oba způsoby důkazu, "počítačový" i klasický, se značně liší. Pokud to situace jenom trochu dovoluje, měli bychom ve školské matematice uvádět klasický důkaz společně s "počítačovým" důkazem. Při řešení složitějších úloh studenti sami uvidí, že s klasickou metodou mnohdy nevystačí. Obě metody mají své přednosti, ale i slabá místa.

Hlavní přednost "klasické" metody spočívá v pochopení geometrické podstaty problému. S ní souvisí poznání krásy geometrie a je s ní spojena též motivace. Naproti tomu hlavní předností "počítačové" metody je její síla, schopnost dokazovat a objevovat poznatky, na které "klasická" metoda nestačí.

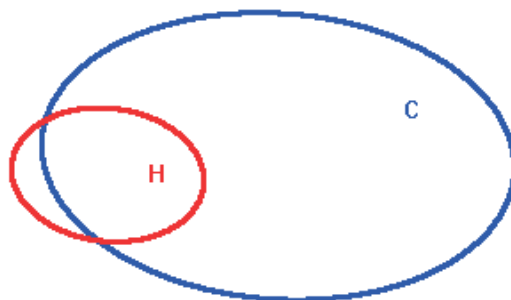
2.5 Automatické objevování

V předchozích částech jsme se zabývali důkazem tvrzení

$$\forall x \in L^n, \quad h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = 0. \quad (2.22)$$

Tvrzení (2.22) může být obecně pravdivé nebo, po přidání podmínek nede-generace, genericky pravdivé. Může se však stát, že ani po přidání podmínek nede-generace nebude tvrzení (2.22) (genericky) pravdivé. Potom nastává situ-ace na obr. 2.6.

Na tuto situaci můžeme reagovat dvojím způsobem. Aby se tvrzení (2.22) stalo pravdivým, můžeme



Obrázek 2.6: Implikace $H \Rightarrow C$ neplatí, neboť $H \not\subseteq C$

- A) buď "zmenšit" varietu předpokladů H nebo
 B) "zvětšit" varietu závěru C .

V literatuře se obvykle věnuje prostor pouze případu A. V praxi se však vyskytnou případy, které lze vyřešit postupem B, když metoda A selhává. Nejprve se budeme věnovat metodě A.

Zmenšení variety předpokladů H dosáhneme tak, že k předpokladům $H(h_1, \dots, h_r)$ přidáme dodatečné předpoklady $H'(h'_1, \dots, h'_p)$, takže nyní je varieta předpokladů ve tvaru průniku $H \cap H'$. Určitě platí $H \cap H' \subseteq H$. Naším cílem je nalezení takové množiny dodatečných předpokladů, aby platilo $H \cap H' \subset C$. Jak dodatečné předpoklady nalézt? Budeme postupovat následujícím způsobem.

K ideálu $I = (h_1, \dots, h_r)$ přidáme polynom závěru c . Dostaneme ideál $J = I \cup \{c\} = (h_1, \dots, h_r, c)$. V ideálu J budeme eliminovat závislé proměnné x_{m+1}, \dots, x_n . Dostaneme tak eliminační ideál

$$(h_1, \dots, h_r, c) \cap K[x_1, \dots, x_m].$$

Označme (h'_1, \dots, h'_p) polynomy, které eliminační ideál obsahuje. To by mohly být hledané dodatečné podmínky, které je nutno přidat k předpokladům tvrzení. V tomto případě obdržíme "menší" varietu předpokladů danou ideálem $(h_1, \dots, h_r, h'_1, \dots, h'_p)$, která bude s velkou pravděpodobností obsažena ve varietě závěru c . Získali jsme tvrzení ve tvaru

$$\forall x \in L^n, \quad h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0, h'_1(x), \dots, h'_p(x) \Rightarrow c(x) = 0. \quad (2.23)$$

Nyní se celý postup automatického dokazování vět opakuje s tím, že místo tvrzení (2.22) dokazujeme tvrzení (2.23). Podstatu automatického objevování

si objasníme na příkladu:

Tvrzení 1: *Uvažujme trojúhelník ABC . Označme K, L, M po řadě paty kolmic spuštěných z libovolného bodu P na strany BC, AC, AB trojúhelníka ABC . Potom jsou body K, L, M kolineární.*

Abychom dokázali Tvrzení 1, zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [a, 0], B = [b, c], C = [0, 0], P = [p, q], K = [m, n], L = [k, 0], M = [r, s]$, viz obr. 2.7. Předpoklady jsou následující:

$$\begin{aligned} PL \perp AC &\Leftrightarrow p - k = 0, \\ K \in BC &\Leftrightarrow cm - bn = 0, \\ PK \perp BC &\Leftrightarrow (p - m)b + (q - n)c = 0, \\ M \in AB &\Leftrightarrow (b - a)s - (r - a)c = 0, \\ PM \perp AB &\Leftrightarrow (p - r)(b - a) + (q - s)c = 0. \end{aligned}$$

Závěr tvrzení je vyjádřen rovnicí

$$K, L, M \text{ jsou kolineární} \Leftrightarrow (m - k)s - (r - k)n = 0.$$

V CoCoA napíšeme

```
Use R ::= Q[abcpqkmrst];
I := Ideal(p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+
(q-s)c, ((m-k)s-(r-k)n)t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď je 1, tedy normální forma není rovna nule a Tvrzení 1 není obecně pravdivé.

Nyní budeme hledat podmínky nedegenerace. V ideálu I budeme eliminovat pomocnou proměnnou t a závislé proměnné k, m, n, r, s . Dostaneme

```
Use R ::= Q[abcpqkmrst];
I := Ideal(p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+
(q-s)c, ((m-k)s-(r-k)n)t-1);
Elim(k..t,I);
```

odpověď $\text{Ideal}(0)$, která nedává žádné podmínky nedegenerace.

V dalším kroku se pokusíme nalézt dodatečné podmínky, které je nutné přidat k předpokladům tak, aby se Tvrzení 1 stalo pravdivým.

Polynom závěru $(m - k)s - (r - k)n$ přidáme do ideálu I a v nově vzniklém ideálu $J = I \cup \{(m - k)s - (r - k)n\}$ budeme eliminovat závislé proměnné k, m, n, r, s . Tj. eliminační ideál bude obsahovat pouze polynomy s nezávislými proměnnými a, b, c, p, q . Napíšeme

```
Use R ::= Q[abcpqkmrs];
```

```
J:=Ideal(p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+(q-s)c,
(m-k)s-(r-k)n);
Elim(k..s, J);
```

a jako odpověď dostaneme jediný polynom ve tvaru $ac^2(-acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2)$. Rovnice $a = 0$ nebo $c = 0$ znamenají, že vrcholy trojúhelníka splývají nebo leží na jedné přímce, což můžeme vyloučit. Zbývající vztah

$$-acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2 = 0 \quad (2.24)$$

je podmínka pro to, aby bod P ležel na kružnici opsané trojúhelníku ABC . To můžeme nahlédnout z toho, že budeme-li uvažovat body A, B, C jako pevné a bod P jako proměnný, potom je rovnice (2.24) rovnicí kružnice opsané trojúhelníku ABC , jak snadno zjistíme přímým dosazením.

Rovnice (2.24) by tedy mohla být ona dodatečná podmínka, kterou je nutné přidat k předpokladům Tvrzení 1, aby se toto tvrzení stalo pravdivým.

Podmínku (2.24) přidáme k předpokladům Tvrzení 1. Nyní budeme vyšetřovat následující "objevené" Tvrzení 2:

Tvrzení 2: *Uvažujme trojúhelník ABC . Označme K, L, M po řadě paty kolmic spuštěných z bodu P , který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , na strany BC, AC, AB trojúhelníka ABC . Potom jsou body K, L, M kolineární.*

Provedeme důkaz Tvrzení 2. Vyšetříme normální formu 1 vzhledem k ideálu K . Dostaneme

```
Use R:= Q[abcpqkmrst];
K:=Ideal(p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+(q-s)c,
ac^2(-acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2), ((m-k)s-(r-k)n)t-1);
NF(1, K);
```

odpověď 1. Tedy Tvrzení 2 není obecně pravdivé.

Nyní vyšetříme podmínky nedegenerace. V ideálu K budeme eliminovat pomocnou proměnnou t a závisle proměnné p, q, k, m, n, r, s . Pozor, nyní mezi závisle proměnné budeme počítat i proměnné p, q , které vyhovují rovnici kružnice (2.24). Někdy se takové proměnné nazývají *polozávislé* (z angl. semidependent). Napíšeme

```
Use R:= Q[abcpqkmrst];
K:=Ideal(p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+(q-s)c,
ac^2(-acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2), ((m-k)s-(r-k)n)t-1);
Elim(p..t, K);
```

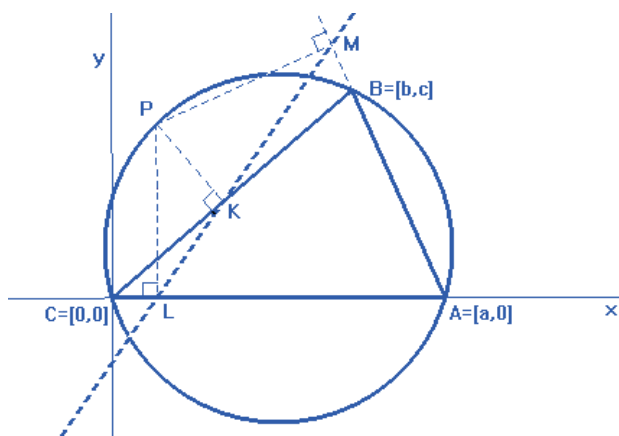
Odpovědí je jediný polynom, který vede na rovnici $(b^2 + c^2)(a^2 - 2ab + b^2 + c^2) = 0$. Nejprve je nutné zjistit, co tato podmínka znamená geometricky. Toto je, zvláště pro studenty, velmi obtížné místo. Překlad z algebry zpět do geometrie se neprovádí snadno. Podmínku upravíme na tvar $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2) = 0$, odkud je vidět, že pro vrcholy trojúhelníka je buď $A = C$, což vyjadřuje rovnost $b^2 + c^2 = 0$ nebo $B = C$, což je dáno rovností $(a - b)^2 + c^2 = 0$. Tyto případy degenerace je nutno vyloučit. Budeme tedy předpokládat, že $A \neq C, B \neq C$ a podmínku nedegenerace $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)v - 1 = 0$, kde v je pomocná proměnná, přidáme do ideálu K . Dostaneme

```
Use R ::= Q[abcpqkmrsvt];
L := Ideal (p-k, cm-bn, (p-m)b+(q-n)c, (b-a)s-(r-a)c, (b-a)(p-r)+(q-s)c,
ac^2(-acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2), (b^2+c^2)((a-b)^2+c^2)v-1,
((m-k)s-(r-k)n)t-1);
NF(1,L);
```

výsledek 0, který znamená, že Tvrzení 2 je genericky pravdivé. \square

K Tvrzení 2 jsme dospěli tak, že jsme k Tvrzení 1 přidali dodatečnou podmínku "bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC ". Mnozí čtenáři jistě poznali v Tvrzení 2 známou Wallace-Simsonovu větu [16], kterou jsme takto znovuobjevili, obr. 2.7.

Nyní se vrátíme zpět k začátku kapitoly "Automatické objevování".



Obrázek 2.7: Paty kolmic K, L, M spuštěných z bodu P kružnice trojúhelníku opsané na strany trojúhelníka ABC leží na přímce

Budeme se zabývat druhou možností úpravy tvrzení (2.25)

$$\forall x \in L^n, \quad h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = 0 \quad (2.25)$$

tak, aby se toto tvrzení stalo pravdivým. Použijeme metodu B, která spočívá ve *zvětšení* variety závěru c , na rozdíl od metody A, která byla založena na *zmenšení* variety předpokladů H .

Zvětšení variety závěru C dosáhneme tak, že k závěru $c = 0$ přidáme dodatečné možnosti, které mohou za daných předpokladů nastat. Jsou-li tyto dodatečné možnosti vyjádřené rovnicemi $c_1 = 0, \dots, c_p = 0$, potom nová varieta závěru má tvar *sjednocení* $C \cup C'$, kde $C' = \{c'_1 = 0\} \cup \dots \cup \{c'_p = 0\}$. Jistě platí $C \subseteq C \cup C'$; varieta nového závěru je tedy větší. Naším cílem je nalezení takové množiny dodatečných možností C' , aby po jejich přidání k závěru C platilo $H \subset C \cup C'$. Jak dodatečné možnosti nalézt? Budeme postupovat následujícím způsobem.

K ideálu $I = (h_1, \dots, h_r)$ přidáme negaci $ct - 1$ polynomu závěru c , kde t je pomocná proměnná. Dostaneme ideál $J = I \cup \{ct - 1\} = (h_1, \dots, h_r, ct - 1)$. V ideálu J budeme, na rozdíl od dřívějšího postupu, eliminovat *nezávislé* proměnné x_1, \dots, x_m . Dostaneme eliminační ideál

$$(h_1, \dots, h_r, ct - 1) \cap K[x_{m+1}, \dots, x_n],$$

ve kterém budou s velkou pravděpodobností obsaženy hledané dodatečné možnosti c'_1, \dots, c'_p . Tyto polynomy přidáme k závěru c a vytvoříme *součin* $c \cdot c'_1 \cdot \dots \cdot c'_p$. Místo (2.25) dostaneme nové tvrzení, které má tvar

$$\forall x \in L^n, \quad h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \cdot c'_1 \cdot \dots \cdot c'_p(x) = 0. \quad (2.26)$$

Celý postup automatického dokazování se nyní opakuje s tím, že místo tvrzení (2.25) dokazujeme tvrzení (2.26). Podstatu automatického objevování podle metody B si opět objasníme na příkladu:

Tvrzení 3:

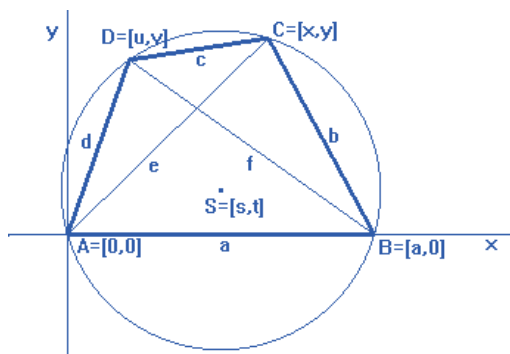
Nechť je dán tětívový čtyřúhelník se stranami délek a, b, c, d a úhlopříčkami délek e, f . Potom platí $ac + bd = ef$.

Tvrzení 3 je známé ze školské geometrie jako Ptolemaiova věta. Pokusme se tvrzení dokázat.

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník se stranami $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$ a úhlopříčkami $e = |BD|$, $f = |AC|$, jehož vrcholy leží na kružnici se středem v bodě S a poloměrem r .

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby platilo $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$, $S = [s, t]$, obr. 2.8. Pro předpoklady platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} r = |AS| &\Leftrightarrow h_1 : s^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |BS| &\Leftrightarrow h_2 : (a - s)^2 + t^2 - r^2 = 0, \end{aligned}$$

Obrázek 2.8: Ptolemaiova věta: $ac + bd = ef$

$$\begin{aligned}
 r = |CS| &\Leftrightarrow h_3 : (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \\
 r = |DS| &\Leftrightarrow h_4 : (u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2 = 0, \\
 b = |BC| &\Leftrightarrow h_5 : (a - x)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\
 c = |CD| &\Leftrightarrow h_6 : (u - x)^2 + (v - y)^2 - c^2 = 0, \\
 d = |DA| &\Leftrightarrow h_7 : u^2 + v^2 - d^2 = 0, \\
 e = |AC| &\Leftrightarrow h_8 : x^2 + y^2 - e^2 = 0, \\
 f = |BD| &\Leftrightarrow h_9 : (u - a)^2 + v^2 - f^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Závěr z má tvar:

$$z : ac + bd = ef.$$

Označme $I = (h_1, h_2, \dots, h_9)$. Nejprve budeme zkoumat normální formu 1 vzhledem k ideálu $J = I \cup \{zk - 1\} = (h_1, h_2, \dots, h_9, zk - 1)$, kde k je pomocná proměnná.

```

Use R ::= Q[abcdefxyuvstrk];
J := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2,
(u-s)^2+(v-t)^2-r^2, (a-x)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+
v^2-d^2, x^2+y^2-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2, (ac+bd-ef)k-1);
NF(1, J);

```

Vychází 1, tedy Tvrzení 3 není obecně pravdivé.

Nyní vyšetříme dodatečné podmínky. V ideálu J eliminujeme pomocnou proměnnou k a závislé proměnné b, c, d, e, f, r, s, t .

```

Use R ::= Q[abcdefstrkxyuv];
J := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2,
(u-s)^2+(v-t)^2-r^2, (a-x)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+
v^2-d^2, x^2+y^2-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2, (ac+bd-ef)k-1);

```

Elim(b..k,J);

Dostaneme jedinou rovnici $-ayu + yu^2 + axv - x^2v - y^2v + yv^2 = 0$, která je rovnicí kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, a která nedává žádnou podmínku nedegenerace.

Hledání dodatečných podmínek, které je nutné přidat k předpokladům Tvrzení 3 podle metody A, rovněž nedává žádný výsledek.

Nyní použijeme metodu B, tj. budeme hledat dodatečné podmínky, které je nutné přidat k závěru z tak, aby se tvrzení stalo pravdivým. To znamená, že v ideálu $J = I \cup \{(ac + bd - ef)k - 1\}$ budeme eliminovat pomocnou proměnnou k a *nezávislé* proměnné x, y, u, v, s, t, r . Dostaneme

```
Use R := Q[abcdefxyuvstrk];
J := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2,
(u-s)^2+(v-t)^2-r^2, (a-x)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+
v^2-d^2, x^2+y^2-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2, (ac+bd-ef)k-1);
Elim(x..k,J);
```

eliminační ideál, který obsahuje 13 polynomů, z nichž jeden má po úpravě tvar $(ac - bd - ef)(ac - bd + ef)(ac + bd + ef)$. To by mohla být hledaná podmínka. Přidáme tedy tento polynom k závěru $ac + bd - ef$ a tvrzení znovu ověříme.

```
Use R := Q[abcdefxyuvstrk];
K := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2, (u-s)^2
+(v-t)^2-r^2, (a-x)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+v^2-d^2,
x^2+y^2-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2,
(ac+bd-ef)(ac-bd-ef)(ac-bd+ef)(ac+bd+ef)k-1);
NF(1,K);
```

Výsledek 0 znamená, že nové tvrzení je obecně pravdivé. □

Dostáváme nové, obecně pravdivé Tvrzení 4:

Tvrzení 4:

Nechť je dán tětiový čtyřúhelník se stranami o délkách a, b, c, d a úhlopříčkami o délkách e, f . Potom platí

$$(ac + bd - ef)(ac - bd - ef)(ac - bd + ef)(ac + bd + ef) = 0.$$

Jaký je geometrický význam přidaných možností? Tětiový čtyřúhelník s danými délkami stran a úhlopříček může mít kromě tvaru na obr. 2.8 ještě např. tvar, který je na obr. 3.5 vpravo. Uvedených tvarů je tedy více. Znovuobjevili jsme Ptolemaiovu větu, viz vztah (3.21) v kapitole "Zobecnění Heronova vzorce".

Kapitola 3

Zobecnění Heronova vzorce

Každý student zná Heronovu formuli pro výpočet obsahu p trojúhelníka o stranách délek a, b, c

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (3.1)$$

kde $s = 1/2(a + b + c)$. Tato formule se nazývá podle Herona z Alexandrie (cca. 60 let př.n.l.), ačkoliv byla pravděpodobně známa již Archimédovi (287 - 212 př.n.l.

Brahmaguptova formule (Brahmagupta (598 - asi 665)) pro výpočet obsahu p konvexního tětívového čtyřúhelníka, který je dán délkami stran a, b, c, d

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (3.2)$$

kde $s = 1/2(a + b + c + d)$, je zobecněním Heronovy formule.

Od té doby se, navzdory velkému úsilí matematiků celého světa, žádná podobná formule pro výpočet obsahu tětívového n -úhelníka pro $n > 4$ neobjevila. Až do roku 1994, kdy D.P.Robbins publikoval práci [83]. Téměř 1400 let formule pro výpočet obsahu tětívového pětiúhelníka chyběla. Mezitím se objevily práce, které se zabývaly výpočtem obsahu speciálních tříd tětívových mnohoúhelníků, viz. např. [5], [16], [87]. Hlavní příčinou, proč uplynula tak dlouhá doba, je velká složitost takových formulí.

V této části najdeme vzorec pro výpočet obsahu tětívového pětiúhelníka použitím počítačových metod, založených na výsledcích počítačové komutativní algebry jako jsou Gröbnerovy báze ideálů, eliminace proměnných a na teorii automatického dokazování a objevování vět. Příklady jsou demonstrovány pomocí dynamického softwaru Cabri II příp. Cabri II plus. Zdá se, že bez užití těchto metod bychom sotva dospěli k těmto výsledkům.

Začneme známými případy trojúhelníka a čtyřúhelníka a potom budeme pokračovat ve vyšetřování pětiúhelníka [71]. Viz též poslední výsledky [66], [95].

3.1 Obsah mnohoúhelníka

V této části se budeme zabývat výpočtem obsahu rovinných mnohoúhelníků. Uzavřený n -úhelník s vrcholy A_1, A_2, \dots, A_n budeme značit $A_1 A_2 \dots A_n$. Všechny indexy uvažujeme mod n , tj. $A_{j+n} = A_j$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$. Místo uzavřený n -úhelník budeme používat pouze slovo n -úhelník, protože jiný typ nebudeme v tomto textu uvažovat. Pokud není nutné zdůraznit počet vrcholů, budeme jednoduše hovořit o mnohoúhelníku či polygonu. Pod pojmem obsah budeme vždy rozumět *orientovaný* obsah, tedy obsah může být i záporné číslo. Výpočet obsahu mnohoúhelníka provedeme dvěma základními způsoby. Prvý způsob, spočívá ve výpočtu obsahu mnohoúhelníka, známe-li souřadnice vrcholů mnohoúhelníka v dané soustavě souřadnic. Potom obsah mnohoúhelníka vypočteme pomocí následující formule (3.3), viz např. [6]:

Mají-li vrcholy n -úhelníka v dané kartézské soustavě souřadnic souřadnice $A_i = [x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, potom pro obsah p n -úhelníka A_1, A_2, \dots, A_n platí

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Snadno se ověří, že (3.3) nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

Pomocí formule (3.3) počítáme obsah n -úhelníka jako součet (orientovaných) obsahů jednotlivých trojúhelníků, ze kterých se daný n -úhelník skládá.

Druhý způsob výpočtu obsahu mnohoúhelníka využívá všechny vzájemné vzdálenosti mezi vrcholy mnohoúhelníka. Obsah p n -úhelníka $A_1 A_2 \dots A_n$ můžeme také vyjádřit pomocí všech $\binom{n}{2}$ vzdáleností mezi jeho vrcholy. K tomu použijeme poměrně málo známý vzorec (3.4), který publikovali v roce 1949 Nagy a Rédey [79]. Platí:

Označme $d_{ij} = |A_i A_j|^2$ čtverec vzdálenosti vrcholů A_i, A_j . Potom pro obsah p n -úhelníka $A_1 A_2 \dots A_n$ platí

$$16p^2 = \sum_{i,j=1}^n \begin{vmatrix} d_{i,j} & d_{i,j+1} \\ d_{i+1,j} & d_{i+1,j+1} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Vzorec (3.4) odvodíme pro některá n jednak pomocí počítače, jednak klasickým způsobem. Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka jsme odvodili v předchozí kapitole. Proto se budeme zabývat méně známou formulí pro obsah čtyřúhelníka.

3.1.1 Staudtova formule

Je zřejmé, že délkami stran není čtyřúhelník určen. Abychom jej určili, potřebujeme přidat další podmínku, např. délku úhlopříčky. Ale ani pět podmínek

(čtyři strany a úhlopříčka) čtyřúhelník jednoznačně neurčuje. Budeme vyšetřovat obsah čtyřúhelníka, známe-li všech šest vzdáleností mezi vrcholy.

Nechť $ABCD$ je rovinný čtyřúhelník se stranami a, b, c, d a úhlopříčkami e, f . Vyjádřete obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ pomocí délek stran a, b, c, d a úhlopříček e, f .

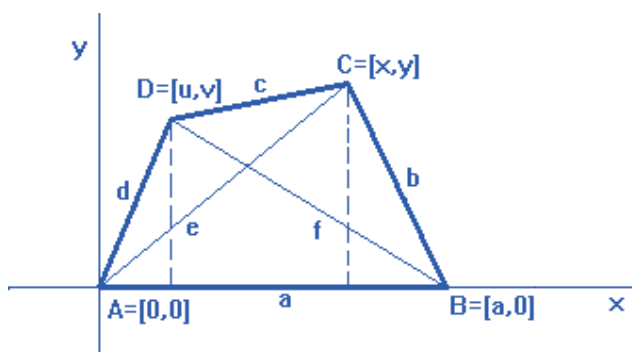
Zvolme souřadnicový systém tak, že pro vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$ je $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$ a označme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$, obr. 3.1. Platí následující relace:

$$\begin{aligned} b = |BC| &\Leftrightarrow h_1 : (x - a)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ c = |CD| &\Leftrightarrow h_2 : (u - x)^2 + (v - y)^2 - c^2 = 0, \\ d = |DA| &\Leftrightarrow h_3 : u^2 + v^2 - d^2 = 0, \\ e = |AC| &\Leftrightarrow h_4 : x^2 + y^2 - e^2 = 0, \\ f = |BD| &\Leftrightarrow h_5 : (u - a)^2 + v^2 - f^2 = 0. \end{aligned}$$

Spustíme-li z vrcholů B a C kolmice na stranu AD , rozdělíme čtyřúhelník $ABCD$ na dva pravoúhlé trojúhelníky a jeden lichoběžník (nebo obdélník), jejichž součet obsahů je roven obsahu p čtyřúhelníka. Po krátkém výpočtu vychází

$$p = \text{obsah čtyřúhelníka } ABCD \Leftrightarrow h_6 : p - 1/2(ay + xv - uy) = 0.$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_6)$ budeme eliminovat proměnné x, y, u, v . V CoCoA



Obrázek 3.1: Odvození Staudtovy formule

napíšeme

```
Use R ::= Q[xyuvpabcdef];
I := Ideal((x-a)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+v^2-d^2, x^2
+y^2-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2, p-1/2(ay+xv-yu));
Elim(x..v, I);
```

Dostaneme čtyři polynomy, z nichž nás zajímá tento

$$16p^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \quad (3.5)$$

Tuto formuli, která je speciálním případem (3.4), publikoval v roce 1842 Ch. R. Staudt [94].

Poznámky:

1) Všimněte si, že když v (3.5) položíme např. $d = 0$ dostanete Heronovu formuli (2.16).

2) Vzorec (3.5) platí při daném označení pro jakoukoliv volbu vrcholů A, B, C, D čtyřúhelníka. Tedy i v případě, že čtyřúhelník $ABCD$ bude nekonvexní nebo dokonce bude sám sebe protínat. \square

Místo eliminace proměnných x, y, u, v můžeme v ideálu I eliminovat proměnné x, y, u, v, p . Tato eliminace vede na tzv. *Eulerovu čtyřbodovou relaci*, viz Dörrie [17]:

$$a^4 c^2 - a^2 b^2 c^2 + a^2 c^4 - a^2 b^2 d^2 + b^4 d^2 - a^2 c^2 d^2 - b^2 c^2 d^2 + b^2 d^4 + a^2 b^2 e^2 - a^2 c^2 e^2 - b^2 d^2 e^2 + c^2 d^2 e^2 - a^2 c^2 f^2 + b^2 c^2 f^2 + a^2 d^2 f^2 - b^2 d^2 f^2 - a^2 e^2 f^2 - b^2 e^2 f^2 - c^2 e^2 f^2 - d^2 e^2 f^2 + e^4 f^2 + e^2 f^4 = 0.$$

Tato relace vyjadřuje vzájemnou závislost všech šesti vzdáleností a, b, c, d, e, f mezi čtyřmi vrcholy čtyřúhelníka. Eulerova čtyřbodová relace plyne z Cayley - Mengerova determinantu, viz Berger [5], pro objem V čtyřstěnu s hranami délek a, b, c, d, e, f

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ 1 & a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ 1 & e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ 1 & d^2 & f^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

jestliže položíme $V = 0$. Srovnání rovnosti $V = 0$ z (3.6) s Eulerovu čtyřbodovou relací ukazuje, že oba vztahy jsou stejné až na konstantní faktor -2 . Srovnej (3.6) s Ptolemaiovou formulí (3.22).

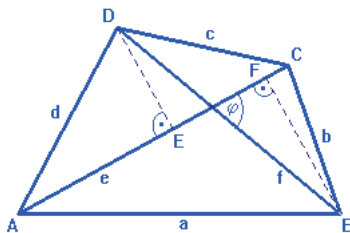
Nyní pro srovnání uvedeme důkaz Staudtovy formule (3.5) klasickou metodou, která ovšem vyžaduje "nápad".

Z pravoúhlých trojúhelníků AED a DEC , obr. 3.2, plyne $|DE|^2 = d^2 - |AE|^2$, $|DE|^2 = c^2 - |EC|^2$. Z rovnosti levých stran plyne rovnost pravých stran

$$d^2 - |AE|^2 = c^2 - |EC|^2. \quad (3.7)$$

Z pravoúhlých trojúhelníků AFB a CFB analogicky plyne

$$a^2 - |AF|^2 = b^2 - |FC|^2. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.2: Klasický důkaz Staudtovy formule

Sečtením rovnic (3.7) a (3.8) dostaneme

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = |AF|^2 - |FC|^2 + |EC|^2 - |AE|^2. \quad (3.9)$$

Pravou stranu v (3.9) můžeme napsat ve tvaru $|AF|^2 - |FC|^2 + |EC|^2 - |AE|^2 = |AF|^2 - |AE|^2 + |EC|^2 - |FC|^2 = (|AF| + |AE|)(|AF| - |AE|) + (|EC| + |FC|)(|EC| - |FC|) = \pm 2e|EF|$, tj.

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4e^2|EF|^2. \quad (3.10)$$

Dále vidíme, že platí $|EF| = f \cos \varphi$. Dosazením do (3.10) dostaneme

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4e^2 f^2 \cos^2 \varphi. \quad (3.11)$$

Nyní použijeme známý vzorec pro výpočet obsahu čtyřúhelníka pomocí délek úhlopříček e, f a úhlu φ jimi sevřeného, viz např. [4]

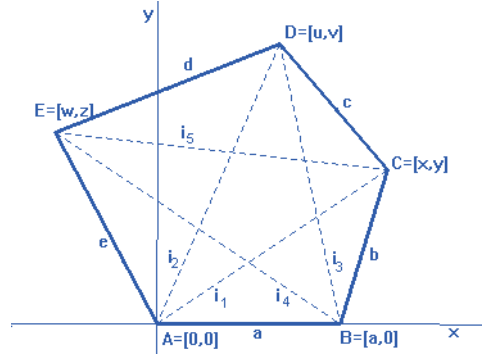
$$p = \frac{1}{2} ef \sin \varphi. \quad (3.12)$$

Dosazením (3.12) do (3.11) s využitím vztahu $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ dostaneme hledanou formuli (3.5).

3.1.2 Obsah pětiúhelníka a šestiúhelníka

V této části "objevíme" pomocí počítače formuli Nagy - Rédey (3.4) pro $n = 5$ a $n = 6$.

V rovině uvažujme pětiúhelník $ABCDE$ a označme jeho strany a úhlopříčky písmeny by $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DE|$, $e = |EA|$, $i_1 = |AC|$, $i_2 = |AD|$, $i_3 = |BD|$, $i_4 = |BE|$, $i_5 = |CE|$. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$, $E = [w, z]$, obr. 3.3. Platí následující relace:



Obrázek 3.3:

$$\begin{aligned}
b = |BC| &\Leftrightarrow h_1 : (x - a)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\
c = |CD| &\Leftrightarrow h_2 : (x - u)^2 + (y - v)^2 - c^2 = 0, \\
d = |DE| &\Leftrightarrow h_3 : (u - w)^2 + (v - z)^2 - d^2 = 0, \\
e = |EA| &\Leftrightarrow h_4 : w^2 + z^2 - e^2 = 0, \\
i_1 = |AC| &\Leftrightarrow h_5 : x^2 + y^2 - i_1^2 = 0, \\
i_2 = |AD| &\Leftrightarrow h_6 : u^2 + v^2 - i_2^2 = 0, \\
i_3 = |BD| &\Leftrightarrow h_7 : (u - a)^2 + v^2 - i_3^2 = 0, \\
i_4 = |BE| &\Leftrightarrow h_8 : (w - a)^2 + z^2 - i_4^2 = 0, \\
i_5 = |CE| &\Leftrightarrow h_9 : (x - w)^2 + (y - z)^2 - i_5^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$p = \text{obsah pětiúhelníka } ABCDE \Leftrightarrow h_{10} : p = 1/2(ay + xv - uy + uz - vw).$$

Eliminace proměnných x, y, u, v, w, z v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{10})$ vyžaduje v CoCoA 9m 18s. Dostaneme

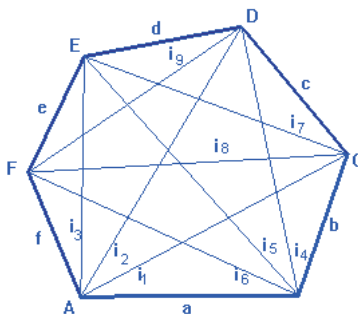
$$\begin{aligned}
16p^2 = &-(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2e^2 + e^2a^2) + \\
&+ 2(i_1^2i_3^2 + i_2^2i_4^2 + i_3^2i_5^2 + i_4^2i_1^2 + i_5^2i_2^2) - 2(a^2i_5^2 + b^2i_2^2 + c^2i_4^2 + d^2i_1^2 + e^2i_3^2),
\end{aligned} \quad (3.13)$$

což je formule Nagy–Rédey (3.4) pro $n = 5$.

Obdobný výpočet provedme nyní pro šestiúhelník. V rovině uvažujme šestiúhelník $ABCDEF$ a označme jeho strany a úhlopříčky písmeny by $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DE|$, $e = |EA|$, $i_1 = |AC|$, $i_2 = |AD|$, $i_3 = |AE|$, $i_4 = |BD|$, $i_5 = |BE|$, $i_6 = |BF|$, $i_7 = |CE|$, $i_8 = |CF|$, $i_9 = |DF|$, obr. 3.4. Obdobně jako v předchozím případě za 29m dostaneme v programu Singular¹ (společně se 121 dalšími polynomy) formuli pro obsah šestiúhelníka

$$16p^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + f^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2e^2 + e^2f^2$$

¹Program Singular je zdarma k dispozici na adrese <http://www.singular.uni-kl.de>.



Obrázek 3.4: Obsah šestiúhelníka

$$+f^2 a^2) + 2(i_1^2 i_4^2 - i_3^2 i_4^2 + i_2^2 i_5^2 + i_1^2 i_6^2 + i_3^2 i_6^2 + i_4^2 i_7^2 - i_6^2 i_7^2 + i_2^2 i_8^2 + i_5^2 i_8^2 - i_1^2 i_9^2 + i_3^2 i_9^2 + i_7^2 i_9^2) - 2(a^2 i_8^2 + b^2 i_2^2 + c^2 i_5^2 + d^2 i_8^2 + e^2 i_2^2 + f^2 i_5^2), \quad (3.14)$$

která je speciálním případem (3.4) pro $n = 6$.

3.2 Obsah tětiového mnohoúhelníka

V této části budeme zkoumat vlastnosti mnohoúhelníků v rovině, jejichž vrcholy leží na kružnici. Takové mnohoúhelníky budeme nazývat *tětiové mnohoúhelníky*. Vlastnosti tětiových mnohoúhelníků můžeme vyšetřovat dvojím způsobem, podobně jako jsme vyšetřovali obsah mnohoúhelníka. Jedním možným přístupem je zkoumání vztahů mezi souřadnicemi vrcholů tětiového mnohoúhelníka. Tuto metodu nazveme *metoda souřadnic*. Druhou metodou je vyjádření vlastností tětiového mnohoúhelníka pomocí vzdáleností mezi jeho vrcholy. Tuto druhou metodu nazveme *distanční metoda*.

Nejprve odvodíme nutnou a postačující podmínku pro to, aby vrcholy čtyřúhelníka ležely na kružnici, známe-li souřadnice těchto vrcholů. Poté se soustředíme na známou Ptolemaiovu formuli, která je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby byl čtyřúhelník tětiový, známe-li všechny vzdálenosti mezi jeho vrcholy.

Dále budeme vyšetřovat obsah tětiového n -úhelníka pro $n = 3, 4, 5$. Vyjdeme od Heronovy formule, přes známou Brahmaguptovu formuli pro obsah konvexního čtyřúhelníka, odvodíme méně známou analogii Brahmaguptovy formule pro obsah nekonvexního čtyřúhelníka. Nakonec odvodíme formuli pro obsah tětiového pětiúhelníka, známe-li délky jeho pěti stran. Tuto formuli, která byla nalezena teprve v roce 1994 [83] odvodíme oběma metodami – metodou souřadnic i distanční metodou. Ukazuje se, že bez užití počítače a prostředků

moderní počítačové algebry by řešení tohoto problému bylo velmi obtížně proveditelné.

3.2.1 Ptolemaiova formule

Protože trojúhelníku lze opsat kružnici, je každý trojúhelník o stranách a, b, c tětivový. Kromě trojúhelníkové nerovnosti tedy není nutná žádná další podmínka na strany a, b, c . Zaměřme nyní svou pozornost na případ tětivového čtyřúhelníka. Budeme se zabývat následující otázkou:

Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ tětivový?

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník se stranami a úhlopříčkami, jejichž délky jsou $a = |AB|, b = |BC|, c = |CD|, d = |AD|, e = |BD|, f = |AC|$ a jehož vrcholy leží na kružnici se středem v bodě S a poloměrem r . Úlohu nejprve řešíme pomocí souřadnicové metody.

Zvolme soustavu souřadnic tak, aby platilo $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [x, y], D = [u, v], S = [s, t]$, obr. 2.8. Platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} r = |AS| &\Leftrightarrow h_1 : s^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |BS| &\Leftrightarrow h_2 : (a - s)^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |CS| &\Leftrightarrow h_3 : (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \\ r = |DS| &\Leftrightarrow h_4 : (u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ eliminujeme všechny proměnné kromě a, x, y, u, v :

```
Use R := Q[axyuvstr];
I := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2,
(u-s)^2+(v-t)^2-r^2);
Elim(s..r,I);
```

Dostaneme podmínku $a(-ayu + yu^2 + axv - x^2v - y^2v + yv^2) = 0$. Předpokládejme, že $a \neq 0$, tj. pro vrcholy čtyřúhelníka platí $A \neq B$. Potom

$$-ayu + yu^2 + axv - x^2v - y^2v + yv^2 = 0 \quad (3.15)$$

je nutná podmínka pro to, aby vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$ ležely na kružnici. Nyní dokážeme, že podmínka (3.15) je zároveň postačující. To dokážeme takto. Předpokládejme, že vrcholy A, B, C leží na kružnici se středem S a poloměrem r a platí (3.15). Chceme dokázat, že vrchol D leží na téže kružnici. Přitom předpokládáme, že $a \neq 0$, což jsme vyjádřili rovnicí $am - 1 = 0$, kde m je pomocná proměnná. Dále si uvědomíme, že rovnice $((u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2)n - 1 = 0$, kde n je další pomocná proměnná, znamená negaci závěru tvrzení.


```
Use R:=Q[axyuvstrmn];
I:=Ideal(s^2+t^2-r^2,(a-s)^2+t^2-r^2,(x-s)^2+(y-t)^2-r^2,am-1,
-ayu+yu^2+axv-x^2v-y^2v+yv^2,((u-s)^2+(v-t)^2-r^2)n-1);
NF(1,I);
```

Odpověď 1 znamená, že tvrzení dokázáno není. Zjistíme případné další případy degenerace, které bude nutné vyloučit. Eliminací nezávisle proměnných s, t, r, m, n v ideálu I se pokusíme hledanou podmínku najít. Napišeme

```
Use R:=Q[axyuvstrmn];
I:=Ideal(s^2+t^2-r^2,(a-s)^2+t^2-r^2,(x-s)^2+(y-t)^2-r^2,am-1,
-ayu+yu^2+axv-x^2v-y^2v+yv^2,((u-s)^2+(v-t)^2-r^2)n-1);
Elim(s..n,I);
```

Odpověď

```
Ideal(y,ax - x^2)
```

znamená, že příčina může být v platnosti rovnic $y = 0$ nebo $ax - x^2 = 0$. Vyloučíme nejprve případ $y = 0$, tj. budeme předpokládat, že body A, B, C neleží na jedné přímce, což vyjádříme jedinou rovnicí $aym - 1 = 0$ (společně s podmínkou $A \neq B$.)

```
Use R:=Q[axyuvstrmn];
I:=Ideal(s^2+t^2-r^2,(a-s)^2+t^2-r^2,(x-s)^2+(y-t)^2-r^2,aym-1,
-ayu+yu^2+axv-x^2v-y^2v+yv^2,((u-s)^2+(v-t)^2-r^2)n-1);
NF(1,I);
```

Odpověď 0 znamená, že podmínka (3.15) je i podmínkou postačující. Objevili jsme (a dokázali) větu:

Nechť v soustavě souřadnic platí $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl tětivový, je platnost rovnice (3.15).

K podmínce (3.15) lze dospět i touto úvahou [52]. Libovolná kružnice k má v jakékoliv kartézské soustavě souřadnic rovnici $A_1(x^2 + y^2) + A_2x + A_3y + A_4 = 0$. Body $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$, $C = [x_3, y_3]$, $D = [x_4, y_4]$ leží na kružnici k právě když je splněna soustava $A_1(x_i^2 + y_i^2) + A_2x_i + A_3y_i + A_4 = 0$, pro $i = 1, 2, 3, 4$. Jedná se o soustavu 4 homogenních rovnic o neznámých A_1, A_2, A_3, A_4 , která má netriviální řešení právě když je determinant soustavy roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Pro volbu $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$, dostaneme právě podmínku (3.15).

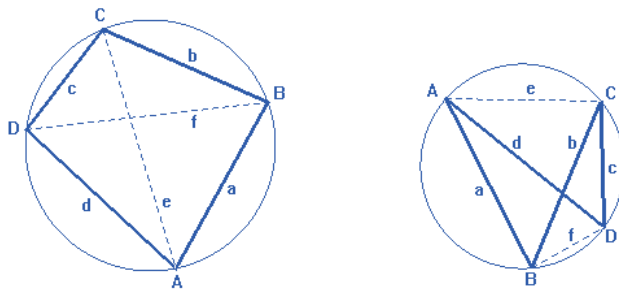
Nyní budeme hledat nutnou a postačující podmínku pro to, aby vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$ ležely na kružnici. Tuto podmínku vyjádříme pomocí vzdáleností mezi vrcholy čtyřúhelníka.

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník se stranami a úhlopříčkami délek $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$, $e = |BD|$, $f = |AC|$, jehož vrcholy leží na kružnici se středem v bodě S a poloměrem r . Při stejném označení jako v předchozím případě, obr. 2.8, platí:

$$\begin{aligned} r = |AS| &\Leftrightarrow h_1 : s^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |BS| &\Leftrightarrow h_2 : (a - s)^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |CS| &\Leftrightarrow h_3 : (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \\ r = |DS| &\Leftrightarrow h_4 : (u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2 = 0, \\ b = |BC| &\Leftrightarrow h_5 : (a - x)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ c = |CD| &\Leftrightarrow h_6 : (u - x)^2 + (v - y)^2 - c^2 = 0, \\ d = |DA| &\Leftrightarrow h_7 : u^2 + v^2 - d^2 = 0, \\ e = |AC| &\Leftrightarrow h_8 : x^2 + y^2 - e^2 = 0, \\ f = |BD| &\Leftrightarrow h_9 : (u - a)^2 + v^2 - f^2 = 0. \end{aligned}$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_9)$ eliminujeme všechny proměnné kromě a, b, c, d, e , abychom zjistili délku e v závislosti na a, b, c, d . Analogicky eliminací všech proměnných kromě a, b, c, d, f zjistíme délku f . Pro dané délky stran a, b, c, d tětivového čtyřúhelníka dostaneme dvě délky úhlopříček e, f , obr. 3.5.

V případě konvexního tětivového čtyřúhelníka vychází



Obrázek 3.5: Tětivové čtyřúhelníky s týmiž délkami stran a, b, c, d – konvexní a nekonvexní případ

$$e^2(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc), \quad f^2(ad + bc) = (ac + bd)(ab + cd), \quad (3.17)$$

v případě nekonvexního čtyřúhelníka je

$$e^2(-ab+cd) = (ac-bd)(ad-bc), \quad f^2(-ad+bc) = (ac-bd)(ab-cd). \quad (3.18)$$

Vzájemným vynásobením levých stran a pravých stran v (3.17) dostaneme v konvexním případě vztah $ef = ac + bd$. Analogicky v nekonvexním případě vychází $ef = ac - bd$ nebo $ef = -ac + bd$.

Ze vztahů (3.17) a (3.18) můžeme dostat ještě jiný zajímavý vztah. Vynásobením levých stran pravými a pravých stran levými stranami dostaneme v konvexním případě²

$$e(ab+cd) = f(ad+bc) \quad (3.19)$$

a v nekonvexním případě

$$e(ab-cd) = f(ad-bc) \quad \text{nebo} \quad e(ab-cd) = f(-ad+bc). \quad (3.20)$$

Snadno se ukáže, že každá z podmínek $ef = ac + bd$, $ef = ac - bd$, $ef = -ac + bd$ je postačující pro to, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ tětiový. Např. pro $ef = ac + bd$ dostaneme

```
Use R:=Q[abcdefxyvutz];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2,u^2+v^2-d^2,x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,ac+bd-ef,az-1,(-yu^2+x^2v+y^2v-yv^2+yua-xva)t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď 0 říká, že tvrzení je pravdivé.

Ukažme obráceně, že podmínky $ef = ac + bd$ nebo $ef = ac - bd$ nebo $ef = -ac + bd$ jsou nutné pro to, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl tětiový. Napíšeme

```
Use R:=Q[abcdefxyvut];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2,u^2+v^2-d^2,x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,-yu^2+x^2v+y^2v-yv^2+yua-xva,(ac+bd-ef)(ac-bd+ef)(-ac+bd+ef)t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď 1 tvrzení nedokazuje. Vyšetření podmínek degenerace žádné podmínky na proměnné a, x, y, u, v nedává. Eliminujeme tedy v ideálu I nezávisle proměnné x, y, u, v a pomocnou proměnnou t . Dostaneme tři polynomy, z nichž jeden má tvar $ac + bd + ef = 0$. Přidáme-li tuto podmínku *do závěru* tvrzení, dostaneme

²(3.19) je překvapivě nutná a postačující podmínka pro to, aby konvexní čtyřúhelník o stranách a, b, c, d a úhlopříčkách e, f byl tětiový, viz [85], [76].

```

Use R := Q[abcdefxyuv];
I := Ideal((x-a)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+v^2-d^2, x^2+y^2
-e^2, (u-a)^2+v^2-f^2, -yu^2+x^2v+y^2v-yv^2+yua-xva, (ac-bd-ef)
(ac+bd-ef)(ac-bd+ef)(ac+bd+ef)t-1);
NF(1,I);

```

odpověď 0. Dokázali jsme (a objevili) známou Ptolemaiovu větu [52]:

Čtyřúhelník o stranách délek a, b, c, d a úhlopříčkách e, f je tětívový právě když platí

$$(ac - bd - ef)(ac + bd - ef)(ac - bd + ef)(ac + bd + ef) = 0. \quad (3.21)$$

Podmínku (3.21) lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & f^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Porovnejte (3.22) s formulí (3.6). Platí totiž [5]:

Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, jehož hrany mají délky $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |AD| = d, |AC| = e, |BD| = f$. Potom pro poloměr r kulové plochy čtyřstěnu opsané platí

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & f^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -2r^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ 1 & a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ 1 & e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ 1 & d^2 & f^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Obdobná formule platí pro trojúhelník (zde je vztah obdobný (3.23) ekvivalentní vzorci $p = abc/(4r)$) a obecně pro libovolný simplex. Důkaz (3.23) nebudeme provádět, může posloužit čtenáři jako cvičení.

Ukažme si ještě odvození vztahů (3.19) a (3.20) klasickým způsobem, bez užití počítače.

Podle vzorce známého z trigonometrie, pro obsah p tětívového čtyřúhelníka $ABCD$ platí, viz obr. 2.8, $p = abe/(4r) + cde/(4r)$, kde jsme vyjádřili obsah p čtyřúhelníka jako součet obsahů trojúhelníků ABC a ACD . Vyjádříme-li obsah p jako součet obsahů trojúhelníků BCD a ABD , dostaneme $p = bcf/(4r) + adf/(4r)$. Z rovnosti pravých stran plyne vztah (3.19). Analogicky se dokáže (3.20).

3.2.2 Heronův vzorec

Protože trojúhelníku lze opsat kružnici, je každý trojúhelník tětívový. Obsah p trojúhelníka ABC o stranách délek a, b, c se vypočte pomocí Heronova vzorce,

$$16p^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2, \quad (3.24)$$

který jsme odvodili v předchozí kapitole. Ze vzorce (3.24) plynou následující vztahy, které budeme potřebovat při zkoumání obsahu a poloměru kružnice opsané tětívovému n -úhelníku pro $n > 3$.

Vidíme, že pravá strana (3.24) je symetrický polynom v proměnných a^2, b^2, c^2 , tj. při libovolném pořadí proměnných a, b, c se formule (3.24) nezmění. Označme elementární symetrické funkce proměnných a^2, b^2, c^2 písmeny k, l, m, n , tj. platí $k = a^2 + b^2 + c^2, l = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, m = a^2b^2c^2$ a nechť $q = 16p^2, s = r^2$, kde r je poloměr kružnice $\triangle ABC$ opsané. Potom podle hlavní věty o symetrických polynomech [51] lze formuli (3.24) napsat ve tvaru

$$k^2 - 4l + q = 0. \quad (3.25)$$

Ze známého vzorce pro obsah p trojúhelníka $p = abc/(4r)$, (který si můžeme automaticky nebo klasicky dokázat jako cvičení) je snadno vidět, že platí

$$qs - m = 0. \quad (3.26)$$

Tento jednoduchý vztah nám umožňuje vyjádřit q pomocí s a obráceně. Abychom vyjádřili poloměr kružnice opsané trojúhelníku o stranách a, b, c , dosadíme q z (3.25) do (3.26), což dává

$$s(k^2 - 4l) + m = 0. \quad (3.27)$$

3.2.3 Brahmaguptova formule pro čtyřúhelník

Pro výpočet obsahu mnohoúhelníka budeme používat dvě základní metody, které jsme již zmínili v předchozí části. Jedná se o metodu souřadnic, při níž je nutné zavést soustavu souřadnic a využít vzorce (3.3) pro obsah mnohoúhelníka.

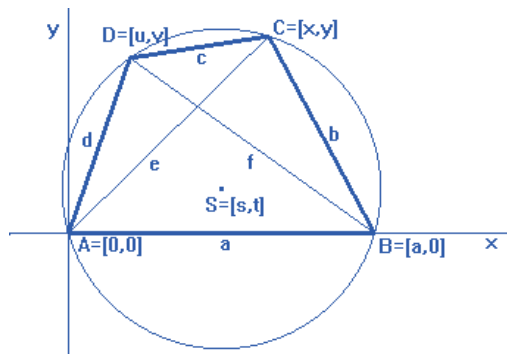
Druhá metoda je metoda distanční, která spočívá ve využití Nagy–Rédey formule (3.4) a Ptolemaiových podmínek. Uvidíme, že použití distanční metody je efektivnější. Budeme řešit tento problém:

V rovině uvažujme tětívový čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají délku a, b, c, d . Vyjádřete obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ pomocí a, b, c, d .

K nalezení formule pro obsah $ABCD$ použijeme obě metody – souřadnicovou

i distanční. Použití souřadnicové metody je následující.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$ a necht' střed S kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$ má souřadnice $S = [s, t]$ s poloměrem r . Při označení jako na obr. 3.6:



Obrázek 3.6:

$$\begin{aligned}
 r = |AS| &\Leftrightarrow h_1 : s^2 + t^2 - r^2 = 0, \\
 r = |BS| &\Leftrightarrow h_2 : (a - s)^2 + t^2 - r^2 = 0, \\
 r = |CS| &\Leftrightarrow h_3 : (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \\
 r = |DS| &\Leftrightarrow h_4 : (u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2 = 0, \\
 b = |BC| &\Leftrightarrow h_5 : (a - x)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\
 c = |CD| &\Leftrightarrow h_6 : (u - x)^2 + (v - y)^2 - c^2 = 0, \\
 d = |DA| &\Leftrightarrow h_7 : u^2 + v^2 - d^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Pro obsah p platí podle (3.3)

$$p = \text{obsah } ABCD \Leftrightarrow h_8 : p = 1/2(ay + xv - uy).$$

Eliminace proměnných x, y, u, v, s, t, r v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_8)$

```

Use R := Q[x y u v s t r a b c d p];
I := Ideal(s^2+t^2-r^2, (a-s)^2+t^2-r^2, (x-s)^2+(y-t)^2-r^2,
(u-s)^2+(v-t)^2-r^2, (x-a)^2+y^2-b^2, (x-u)^2+(y-v)^2-c^2, u^2
+v^2-d^2, p-1/2(ay+xv-uy));
Elim(x..r, I);

```

dává jediný polynom, který po faktorizaci vede na dvě rovnice. První rovnice

$$16p^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + 8abcd, \quad (3.28)$$

dává známou Brahmaguptovu formuli (3.2), pro výpočet obsahu p konvexního tětívového čtyřúhelníka.

Druhá rovnice

$$16p^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd \quad (3.29)$$

vyjadřuje obsah *nekonvexního* tětívového čtyřúhelníka.

K formuli (3.29) můžeme dospět, budeme-li v (3.28) psát např. $-c$ místo c . Vztah (3.29) můžeme vyjádřit také ve tvaru

$$16p^2 = (-a + b - c + d)(a - b - c + d)(a + b + c + d)(a + b - c - d), \quad (3.30)$$

který je analogický (3.2).

Poznámka:

Je vhodné si uvědomit, že všechny odvozené formule jsou *nutné* podmínky pro obsah p . Například pro volbu $a = 2, b = 1, c = 1, d = 1$ dostaneme pouze jedno (reálné) řešení (nekonvexní čtyřúhelník pro tyto hodnoty zřejmě neexistuje). \square

Eliminací proměnných x, y, u, v, s, t v ideálu (h_1, h_2, \dots, h_7) dostaneme po řadě poloměry r, r' kružnice opsané konvexnímu a nekonvexnímu čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d :

$$16p^2r^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc), \quad 16p^2r'^2 = (ab - cd)(-ac + bd)(ad - bc). \quad (3.31)$$

Zde jsme využili vztahů (3.2) a (3.30).

Tedy pro dané délky a, b, c, d (splňující analogii trojúhelníkové nerovnosti $a + b + c > d, \dots$, atd.) existují *nejvýše* dva tětívové čtyřúhelníky s *různými* obsahy a poloměry kružnice opsané, obr. 3.5.

Druhý a efektivnější způsob vyšetřování obsahu tětívového čtyřúhelníka je distanční metoda. Abychom vyjádřili obsah p čtyřúhelníka $ABCD$, použijeme Staudtovu formuli (3.5).

Uvažujeme-li tětívové čtyřúhelníky, potom v souladu s Ptolemaiovými podmínkami platí pro konvexní čtyřúhelníky vztah $ef = ac + bd$, pro nekonvexní pak je $ef = ac - bd$ nebo $ef = bd - ac$. Použitím Staudtovy formule (3.5) a následnou eliminací proměnných e, f v ideálu $I = (16p^2 - 4e^2f^2 + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2, (ac + bd - ef)(ac - bd - ef)(ac - bd + ef)$

```
Use R::=Q[abcdefp];
```

```
I:=Ideal(16p^2-4e^2f^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2,(ac+bd-ef)(ac-bd-ef)
(ac-bd+ef));
```

```
Elim(e..f,I);
```

dostaneme vztahy (3.28) a (3.29).

Nahradíme-li a^2, b^2, c^2, d^2 v obou vzorcích (3.28), (3.29) elementárními symetrickými funkcemi $k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, l = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2, m = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2, n = a^2b^2c^2d^2$, dostaneme následující formuli (3.32), která zahrnuje obě relace (3.28), (3.29)

$$(k^2 - 4l + q)^2 - 64n = 0, \quad (3.32)$$

kde jsme označili $q = 16p^2$. Všimněte si, že pokud je některá ze stran a, b, c, d čtyřúhelníka rovna nule, potom $n = 0$ a (3.32) se změní na Heronovu formuli (3.25).

K výpočtu poloměru r kružnice opsané můžeme na rozdíl od souřadnicové metody použít následující způsob. Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme úhlopříčkou $e = |AC|$ na dva trojúhelníky ABC, CDA po řadě o stranách a, b, e a c, d, e , obr. 3.5. Oba trojúhelníky mají stejný poloměr r kružnice opsané jako čtyřúhelník $ABCD$. Podle (3.27) pro výpočet poloměru kružnice opsané trojúhelníku eliminujeme společnou délku e v obou trojúhelnících ABC, CDA , což vede na vzorec pro výpočet poloměru r kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$

$$[s(k^2 - 4l) + m]^2 - n(8s - k)^2 = 0, \quad (3.33)$$

kde k, l, m, n jsou elementární symetrické funkce a $s = r^2$.

Následující formule vyjadřuje vztah mezi s a q

$$(qs - m)^2 - k^2n = 0. \quad (3.34)$$

Opět si všimněme, že jestliže $n = 0$, potom se čtyřúhelník mění na trojúhelník a dostáváme vzorec (3.27) a (3.26).

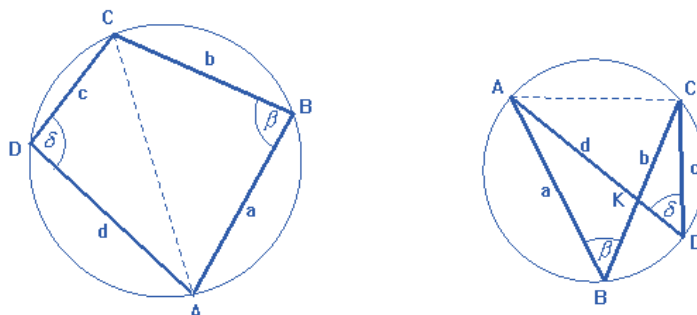
Připomeňme ještě klasický důkaz formulí (3.28), (3.29).

Nejprve provedeme důkaz pro konvexní případ. Předpokládejme, že je dán konvexní tětivový čtyřúhelník $ABCD$ o stranách a, b, c, d , obr. 3.7. Úhlopříčku $|AC|$ vyjádříme z trojúhelníků ABC a ADC podle kosinové věty dvojím způsobem $|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, |AC|^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$. Z rovnosti pravých stran plyne rovnost $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta$, a odtud, vzhledem ke skutečnosti, že v tětivovém čtyřúhelníku platí $\beta + \delta = 180^\circ$, dostaneme

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos \beta. \quad (3.35)$$

Dále, obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC a ADC , tj. $p = 1/2ab \sin \beta + 1/2cd \sin \delta$. Protože $\beta + \delta = 180^\circ$, potom $\sin \beta = \sin \delta$ a

$$p = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \beta. \quad (3.36)$$



Obrázek 3.7: Tětivové čtyřúhelníky s týmiž délkami stran a, b, c, d – konvexní a nekonvexní případ

Rovnosti (3.35) a (3.36) umocníme na druhou a dosazením (3.35) do (3.36), s využitím vztahu $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$, dostaneme $16p^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$. S využitím vzorce pro rozdíl čtverců je $16p^2 = [2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)][2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] = [(a + b)^2 - (c - d)^2][-(a - b)^2 + (c + d)^2] = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)$, což je formule (3.28).

Nyní dokážeme formuli (3.29) pro obsah nekonvexního tětivového čtyřúhelníka, známe-li délky stran a, b, c, d . Pro tytéž délky stran a, b, c, d je na obr. 3.7 sestrojen nekonvexní tětivový čtyřúhelník, který jsme opět označili $ABCD$. Obdobně jako v konvexním případě vyjádříme podle kosinové věty dvojnásobkem délku úhlopříčky AC . Vzhledem k tomu, že úhly β a δ jsou obvodové úhly nad stranou AC , platí rovnost $\beta = \delta$. Odtud plyne

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab - cd) \cos \beta. \quad (3.37)$$

Orientovaný obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ je roven rozdílu obsahů trojúhelníků ABK a CDK , který je roven rozdílu obsahů trojúhelníků ABC a CDA . Všimněme si, že při postupu po obvodu $\triangle ABC$ podle pořadí vrcholů od A přes B do C se pohybujeme proti směru hodinových ručiček, tedy ve směru kladném, naproti tomu při postupu po obvodu $\triangle CDA$ se pohybujeme ve směru záporném. Proto obsah $\triangle ABC$ počítáme se znaménkem plus, zatímco obsah $\triangle CDA$ uvažujeme se znaménkem minus. Vychází

$$p = \frac{1}{2}(ab - cd) \sin \beta. \quad (3.38)$$

Rovnosti (3.37) a (3.38) umocníme na druhou a dosazením (3.37) do (3.38) obdobně jako v předchozím případě dostaneme $16p^2 = 4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 -$

$c^2 - d^2)^2$. S využitím vzorce pro rozdíl čtverců je

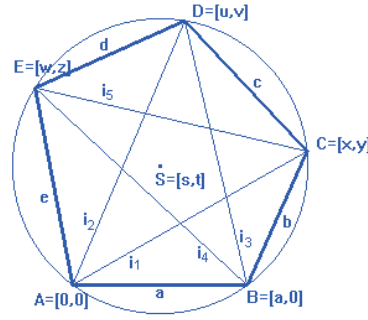
$$16p^2 = [2(ab - cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)][2(ab - cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] = [(a+b)^2 - (c+d)^2][-(a-b)^2 + (c-d)^2] = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d),$$

což je formule (3.29).

3.2.4 Obsah tětívového pětiúhelníka

Nyní jsme připraveni k vyšetřování obsahu p tětívového pětiúhelníka o stranách délek a, b, c, d, e . Budeme postupovat podobným způsobem jako v předchozích částech. Nejprve k výpočtu obsahu tětívového pětiúhelníka použijeme souřadnicovou metodu.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pro souřadnice vrcholů A, B, C, D, E tětívového pětiúhelníka platilo $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$, $E = [w, z]$. Nechť souřadnice středu S kružnice pětiúhelníku opsané jsou $S = [s, t]$ s poloměrem r . Dále označme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DE|$, $e = |EA|$, obr. 3.8. Platí následující relace:



Obrázek 3.8: Obsah tětívového pětiúhelníka – konvexní případ

$$\begin{aligned} b = |BC| &\Leftrightarrow h_1 : (x - a)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ c = |CD| &\Leftrightarrow h_2 : (u - x)^2 + (v - y)^2 - c^2 = 0, \\ d = |DE| &\Leftrightarrow h_3 : (w - u)^2 + (z - v)^2 - d^2 = 0, \\ e = |EA| &\Leftrightarrow h_4 : w^2 + z^2 - e^2 = 0, \\ r = |SA| &\Leftrightarrow h_5 : s^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |SB| &\Leftrightarrow h_6 : (s - a)^2 + t^2 - r^2 = 0, \\ r = |SC| &\Leftrightarrow h_7 : (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \\ r = |SD| &\Leftrightarrow h_8 : (u - s)^2 + (v - t)^2 - r^2 = 0, \\ r = |SE| &\Leftrightarrow h_9 : (w - s)^2 + (z - t)^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Podle (3.3) pro obsah p pětiúhelníka $ABCDE$ platí

$$p = \text{obsah } ABCDE \Leftrightarrow h_{10} : p = 1/2(ay + xv - uy + uz - vw).$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{10})$ máme celkem 10 rovnic, ze kterých budeme eliminovat 9 proměnných $x, y, u, v, w, z, s, t, r$.

Po 9 hodinách a 5 minutách³ dostaneme v CoCoA jedinou rovnici ve tvaru polynomu 14. stupně v p , která obsahuje 6672 členů. Substituce elementárních symetrických funkcí

$k = \sum a^2, l = \sum a^2b^2, m = \sum a^2b^2c^2, n = \sum a^2b^2c^2d^2, o = a^2b^2c^2d^2e^2$, kde $q = 16p^2$, vede na rovnici $h = 0$, která obsahuje 153 členů a je stále příliš dlouhá na to ji celou napsat. Začíná takto

$$h : q^7 + q^6(7k^2 - 24l) + q^5(21k^4 - 144k^2l + 240l^2 + 16km - 192n) + \dots = 0.$$

Označíme-li $K = k^2 - 4l + q, L = kK + 8m, M = K^2 - 64n, N = 128o$, potom eliminace proměnných k, l, m, n, o v ideálu (h, K, L, M, N) vede na formuli, která obsahuje pouze 5 členů. Dospěli jsme k následující větě (Robbins):

Je dán tětivový pětiúhelník o stranách a, b, c, d, e a obsahu p . Nechť $q = 16p^2$ a nechť K, L, M, N jsou jako nahoře. Potom q vyhovuje rovnici

$$L^2M^2 + M^3q - 16L^3N - 18LMNq - 27N^2q^2 = 0. \quad (3.39)$$

Vztah (3.39) je možno považovat za zobecnění Heronovy a Brahmaguptovy formule.

Nyní odvodíme formuli (3.39) pomocí distanční metody. Budeme vycházet z Nagy – Rédey formule (3.4) pro výpočet obsahu pětiúhelníka, daného délkami stran a, b, c, d, e a délkami úhlopříček i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 . V situaci jako na obr. 3.8 aplikujeme Ptolemaiovu větu na tětivové čtyřúhelníky $ABCD, BCDE, CDEA, DEAB$ a $EABC$ a dostaneme

$$i_1i_3 = ac + bi_2, \quad i_3i_5 = bd + ci_4, \quad i_5i_2 = ce + di_1, \quad i_2i_4 = da + ei_3, \quad i_4i_1 = eb + ai_5. \quad (3.40)$$

Substituce podmínek (3.40) do Nagy – Rédey formule (3.13) pro pětiúhelník dává vztah

$$16p^2 = - \sum a^4 + 2 \sum a^2b^2 + K, \quad (3.41)$$

kde

$$K = 4(abc i_2 + bcd i_4 + cde i_1 + dea i_3 + eab i_5). \quad (3.42)$$

³Čas výpočtu velmi závisí na konfiguraci počítače. Doba výpočtu je závislost orientační, která má tomu, kdo bude chtít tyto výpočty vyzkoušet také, naznačit, jak je asi výpočet náročný.

Označíme-li $k = \sum a^2 = a^2 + b^2 + \dots$ a $l = \sum a^2 b^2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + \dots$ elementární symetrické funkce proměnných a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 a $q = 16p^2$ můžeme psát vztah (3.41) ve tvaru

$$k^2 - 4l + q = K. \quad (3.43)$$

Tedy abychom vyjádřili obsah p tětívového pětiúhelníka $ABCDE$ pomocí a, b, c, d, e stačí, abychom pomocí a, b, c, d, e vyjádřili výraz K z (3.42), protože ostatní části na proměnných i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 nezávisí.

K eliminaci proměnných i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 z K budeme potřebovat, kromě Ptolemaiových podmínek (3.40), další vztahy, které platí mezi stranami a úhlopříčkami tětívového pětiúhelníka. Podmínky (3.40) jsou totiž vzájemně závislé, pouze tři z nich jsou nezávislé. Relace, které budeme potřebovat jsou tytéž jako v (3.19) a které mají našem případě tvar

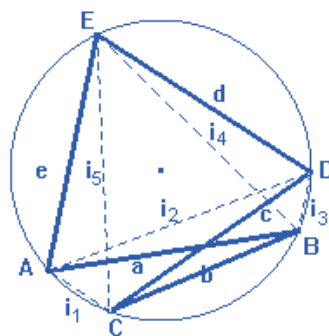
$$i_1(ab + ci_2) = i_3(bc + ai_2), \quad i_3(bc + di_4) = i_5(cd + bi_4), \quad i_5(cd + ei_1) = i_2(ed + ci_1), \quad (3.44)$$

$$i_2(ed + ai_3) = i_4(ea + di_3), \quad i_4(ea + bi_5) = i_1(ab + ei_5).$$

Eliminace proměnných i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 v ideálu, který se skládá ze soustavy polynomů (3.40), (3.44) a (3.42), je nyní možná.

Za 16m v CoCoA (nebo za 1s v programu Singular) dostaneme polynom $F_1(K, a, b, c, d, e)$, který obsahuje 827 členů. Substitute elementárních symetrických funkcí k, l, m, n, o do F_1 dává polynom $F_2(K, k, l, m, n, o)$ se 37 členy. Další substitute $K = k^2 - 4l + q, L = kK + 8m, M = K^2 - 64n, N = 128o$ do F_2 , kterou lze provést dokonce bez užití počítače, dává formuli (3.39).

Až dosud jsme vyšetřovali obsah *konvexního* tětívového pětiúhelníka. Uvažujme nyní *nekonvexní* tětívový pětiúhelník s týmiž délkami stran a, b, c, d, e , viz např. obr. 3.9. Potom Ptolemaiovy podmínky jsou



Obrázek 3.9: Obsah tětívového pětiúhelníka - nekonvexní případ

$$i_1 i_3 = ac - bi_2, i_3 i_5 = -bd + ci_4, i_5 i_2 = ce + di_1, i_2 i_4 = da + ei_3, i_4 i_1 = -eb + ai_5.$$

Podle (3.20) platí následující vztahy

$$i_1(ab - ci_2) = i_3(bc - ai_2), i_3(bc - di_4) = i_5(-cd + bi_4), i_5(cd + ei_1) = i_2(de + ci_1), i_2(de + ai_3) = i_4(ea + di_3), i_4(ea - bi_5) = i_1(-ab + ei_5).$$

Místo (3.42) dostaneme

$$K = -abci_2 - bcdi_4 + cdei_1 + deai_3 - eabi_5. \quad (3.45)$$

Píšeme-li v těchto podmínkách a v (3.45) $-b$ místo b , dostaneme stejnou soustavu rovnic jako v konvexním případě. Tedy eliminace proměnných i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 v (3.45) dává stejný výsledek. Podobně postupujeme v ostatních případech.

Shrňme hlavní kroky předchozí metody:

Algoritmus pro obsah tětívového pětiúhelníka:

1. Eliminujte délky i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 ze soustavy (3.42), (3.40), (3.44). Dostanete symetrický polynom $F_1(K, a, b, c, d, e)$.
2. Vyjádřete polynom $F_1(K, a, b, c, d, e)$ pomocí elementárních symetrických funkcí k, l, m, n, o . Dostanete polynom $F_2(K, k, l, m, n, o)$.
3. Eliminujte K, k, l, m, n, o v ideálu (F_2, K, L, M, N) . Dostanete závěrečný polynom $F_3(q, K, L, M, N)$. \square

Poznámky:

- 1) Polynom (3.39) je 7. stupně v $q = 16p^2$. To znamená, že existuje nejvýše 7 tětívových pětiúhelníků s danými délkami stran a, b, c, d, e .
- 2) Členy K, L, M v (3.39) mají geometrický význam. K je levá strana (3.25), L splňuje rovnici $8qs - L = 0$, která je ekvivalentní vztahu (3.34) a M je levá strana formule (3.32).
- 3) Formuli (3.39) publikoval D.P. Robbins v roce 1994, [83]. Jeho objev je založen na skutečnosti, že levá strana (3.39) má tvar diskriminantu kubické rovnice $x^3 + 2Bx^2 - Cqx + 2Dq^2 = 0$. Je stále záhadou, proč tomu tak je. \square

3.2.5 Poloměr kružnice opsané tětívovému pětiúhelníku

Vypočteme poloměr r kružnice opsané tětívovému pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strany mají délku a, b, c, d, e .

Pomocí metody souřadnic zvolíme kartézský systém souřadnic tak, že $A = [r, 0]$, $B = [x, y]$, $C = [u, v]$, $D = [w, z]$, $E = [s, t]$, s počátkem O ve středu kružnice opsané. Eliminace 8 proměnných x, y, u, v, w, z, s, t , dává

```

Use R:=Q[xyuvwzstabcder];
I:=Ideal((x-r)^2+y^2-a^2,(u-x)^2+(v-y)^2-b^2,(u-w)^2+(v-z)^2-c^2,
(s-w)^2+(t-z)^2-d^2,(s-r)^2+t^2-e^2,x^2+y^2-r^2,u^2+v^2-r^2,
w^2+z^2-r^2,s^2+t^2-r^2);
Elim(x..t,I);

```

za 11m 5s jediný polynom $G_1(s, a, b, c, d, e)$ 7. stupně v $s = r^2$ s 2992 členy. Substitucí elementárních symetrických funkcí $k = \sum a^2$, $l = \sum a^2b^2$, $m = \sum a^2b^2c^2$, $n = \sum a^2b^2c^2d^2$, $o = a^2b^2c^2d^2e^2$ dostaneme polynom $G_2(s, k, l, m, n, o)$, který obsahuje 81 členů.

Užití distanční metody je následující. Rozdělme tětivový pětiúhelník $ABCDE$ na tři trojúhelníky ABC , ACD a ADE , obr. 3.8. Je zřejmé, že všechny tyto trojúhelníky mají společnou kružnici opsanou. S pomocí (3.27) eliminujeme společné úhlopříčky i_1, i_2 .

```

Use R:=Q[abcdei[1..5]s];
I:=Ideal(s((a^2+b^2+i[1]^2)^2-4(a^2b^2+a^2i[1]^2+b^2i[1]^2))
+a^2b^2i[1]^2,s((c^2+i[1]^2+i[2]^2)^2-4(c^2i[1]^2+c^2i[2]^2+
i[1]^2i[2]^2))+c^2i[1]^2i[2]^2,s((d^2+e^2+i[2]^2)^2-4(d^2e^2
+d^2i[2]^2+e^2i[2]^2))+d^2e^2i[2]^2);
Elim(i[1]..i[2],I);

```

Za 17s obdržíme formuli (3.46). Můžeme vyslovit následující větu:

Je dán tětivový pětiúhelník, jehož strany mají délku a, b, c, d, e . Potom poloměr r kružnice opsané vyhovuje rovnici

$$s^3[(s(k^2 - 4l) + m)^2 - n(8s - k)^2]^2 + s^2oP + so^2Q + o^3 = 0, \quad (3.46)$$

kde P, Q jsou polynomy v proměnných k, l, m, n .

Předchozí metodu pro nalezení poloměru kružnice opsané tětivovému pětiúhelníku můžeme shrnout do následujících kroků:

Algoritmus pro poloměr kružnice opsané tětivovému pětiúhelníku:

1. Rozdělte tětivový pětiúhelník $ABCDE$ na tři trojúhelníky ABC, ACD, ADE a napište příslušné formule podle (3.27) pro ABC, ACD, ADE .

2. Eliminujte i_1, i_2 ze soustavy rovnic z prvního kroku. Dostanete polynom $G_1(s, a, b, c, d, e)$.

3. Eliminujte a, b, c, d, e ze soustavy, která se skládá z G_1 a elementárních symetrických funkcí $k = \sum a^2, l = \sum a^2b^2, m = \sum a^2b^2c^2, n = \sum a^2b^2c^2d^2, o = a^2b^2c^2d^2e^2$. Dostanete polynom $G_2(s, k, l, m, n, o)$. \square

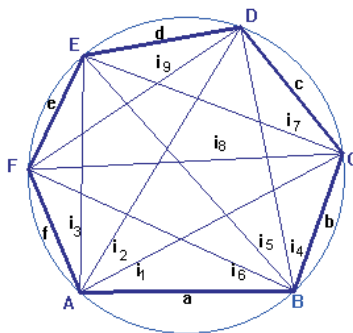
Poznámky:

- 1) Existuje nejvýše 7 tětívových pětiúhelníků s různým poloměrem kružnice opsané.
- 2) Položíme-li v (3.46) $o = 0$, dostaneme čtyřúhelník a vzorec (3.46) přechází v (3.33). \square

3.2.6 Obsah tětívového šestiúhelníka

Uvažujme tětívový šestiúhelník $ABCDEF$ se stranami $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DE|$, $e = |EF|$, $f = |FA|$ a úhlopříčkami $i_1 = |AC|$, $i_2 = |AD|$, $i_3 = |AE|$, $i_4 = |BD|$, $i_5 = |BE|$, $i_6 = |BF|$, $i_7 = |CE|$, $i_8 = |CF|$, $i_9 = |DF|$, obr. 3.10.

Platí následující Ptolemaiovy podmínky:



Obrázek 3.10: Obsah tětívového šestiúhelníka

$$i_1 i_4 = ac + bi_2, i_4 i_7 = bd + ci_5, i_7 i_9 = ce + di_8, i_9 i_3 = df + ei_2, i_3 i_6 = ea + fi_5, i_6 i_1 = fb + ai_8, i_2 i_5 = ad + i_3 i_4, i_5 i_8 = be + i_6 i_7, i_2 i_8 = cf + i_1 i_9.$$

Úpravou Nagy – Rédey formule (3.14) pro obsah p šestiúhelníka $ABCDEF$ s užitím Ptolemaiových podmínek získáme obdobně jako v případě pětiúhelníka vztah

$$16p^2 = - \sum a^4 + 2 \sum a^2 b^2 + K, \quad (3.47)$$

který má stejný tvar jako (3.41), a který můžeme napsat zkráceně ve tvaru

$$k^2 - 4l + q = K, \quad (3.48)$$

kde $K = 4(abc i_2 + bcd i_5 + cde i_8 + def i_1 + efa i_5 + fab i_8 + adi_3 i_4 + bei_6 i_7 + cfi_1 i_9)$, $q = 16p^2$ a $k = \sum a^2 \dots$, $l = \sum a^2 b^2 \dots$ jsou symetrické funkce v $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$.

K tomu, abychom získali formuli pro obsah tětívového šestiúhelníka pouze pomocí jeho stran a, b, c, d, e, f , stačí v K eliminovat proměnné i_1, i_2, \dots, i_9 , protože všechny ostatní výrazy v (3.48) obsahují pouze proměnné a, b, c, d, e, f . Při této eliminaci je nutné ještě přidat do příslušného ideálu, kromě Ptolemaiových podmínek i následující polynomy, které mají podobný tvar jako (3.19)

$$i_1(ab + ci_2) = i_4(bc + ai_2), i_4(bc + di_5) = i_7(cd + bi_5), i_7(cd + ei_8) = i_9(de + ci_8), i_9(de + fi_2) = i_3(ef + di_2), i_3(ef + ai_5) = i_6(fa + ei_5), i_6(fa + bi_8) = i_1(ab + fi_8), i_2(ai_4 + di_3) = i_5(di_4 + ai_3), i_5(bi_7 + ei_6) = i_8(bi_6 + ei_7), i_8(ci_9 + fi_1) = i_2(ci_1 + fi_9).$$

Zde naše vyšetřování šestiúhelníka končí. Pro složitost úlohy není zatím možné naznačenou eliminaci provést a je nutné hledat další zjednodušení.

Obdobná situace nastává při výpočtu poloměru kružnice opsané tětívovému šestiúhelníku.

3.3 Závěrečné poznámky

1) Dva právě uvedené algoritmy pro výpočet obsahu tětívového pětiúhelníka a poloměru kružnice opsané tětívovému pětiúhelníku mohou sloužit jako návod pro výpočet obsahu a poloměru kružnice opsané tětívovému n -úhelníku pro $n \geq 6$.

2) Při užití počítačové metody se vyskytly tyto dva hlavní problémy:

- a) Stále velká časová náročnost výpočtů.
- b) Nalezení vhodných výrazů jako K, L, M, N , které vede ke zkrácení závěrečného polynomu.

3) Uvažujme tětívový $(2n + 1)$ -úhelník s danými délkami stran $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$. Potom, jak uvádí Robbins [83], existuje nejvýše k_n takových $(2n + 1)$ -úhelníků s různými obsahy a poloměry kružnice opsané, kde

$$k_n = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \binom{2n+1}{j}, \quad (3.49)$$

tj. $k_1, k_2, k_3, \dots = 1, 7, 38, 187, 874, \dots$

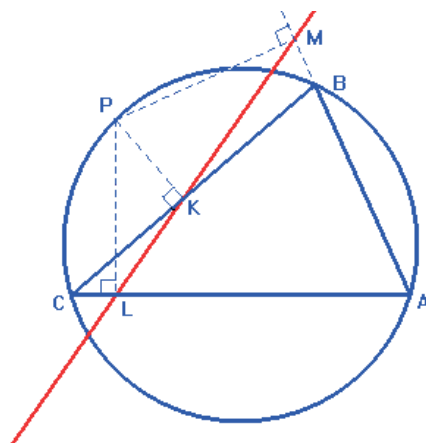
Pro tětívové $(2n + 2)$ -úhelníky se stranami délek $a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$ existuje nejvýše $2k_n$ takových mnohoúhelníků. Tato domněnka je stále otevřená.

4) Formule, která spojuje obsah a poloměr kružnice opsané tětívovému pětiúhelníku typu (3.26), (3.34), stále chybí. \square

Kapitola 4

Wallace - Simsonova věta

V této části se budeme zabývat větou, která je pojmenována po skotském matematikovi R. Simsonovi (1687 - 1768), který se zabýval obdobnou problematikou. Ve skutečnosti ale větu dokázal až opět skotský matematik W. Wallace (1768 - 1843) v roce 1797, odtud *Wallace - Simsonova věta*. Proto se místo dřívějšího pojmenování Simsonova věta užívá spíše Wallace - Simsonova věta, budeme psát W. - S. věta. Věta ukazuje zajímavou vlastnost bodů ležících na kružnici opsané trojúhelníku, obr. 4.1. Wallace - Simsonova věta zní:



Obrázek 4.1: Body K, L, M leží na jedné přímce

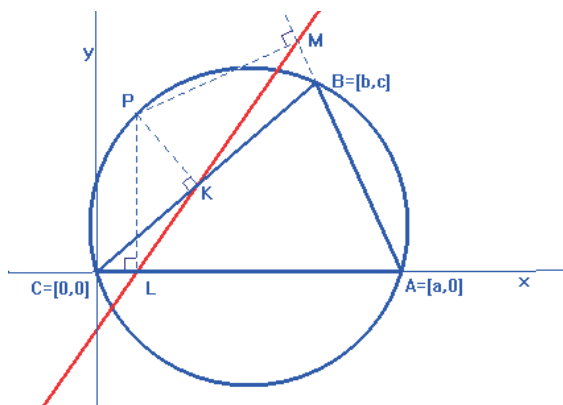
cích na kružnici opsané trojúhelníku, obr. 4.1. Wallace - Simsonova věta zní:

Nechť ABC je trojúhelník a P je bod kružnice opsané trojúhelníku ABC . Potom paty kolmic K, L, M spuštěných z bodu P na strany trojúhelníka ABC leží na jedné přímce.

Pohybuje-li se bod P na kružnici opsané $\triangle ABC$, potom se mění i příslušné paty kolmic z bodu P na strany trojúhelníka a dostáváme tak různé přímky. Provedme nejprve demonstraci úlohy v Cabri II (Cabri II plus) a *verifikujme* naše tvrzení položením otázky, zda paty příslušných kolmic K, L, M z bodu P na strany trojúhelníka leží v přímce. Obdržíme odpověď "ano". Tato odpověď ovšem není založena na logické úvaze, ale pouze na skutečnosti, že konstrukce je velmi přesná a na základě této přesnosti leží paty kolmic K, L, M skutečně na přímce. Verifikace tedy *nenahrazuje* důkaz.

Nyní dokážeme Wallace - Simsonovu větu užitím teorie automatického dokazování vět.

Nejprve vyjádříme předpoklady a závěr věty pomocí analytické geometrie. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že platí $A = [a, 0]$, $B = [b, c]$, $C = [0, 0]$, $P = [p, q]$, $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, 0]$, $M = [m_1, m_2]$, obr. 4.2. Předpoklady jsou následující:



Obrázek 4.2: W. - S. věta – počítačový důkaz

$$PL \perp AC \Leftrightarrow h_1 : p - l_1 = 0,$$

$$K \in BC \Leftrightarrow h_2 : ck_1 - bk_2 = 0,$$

$$PK \perp BC \Leftrightarrow h_3 : (p - k_1)b + (q - k_2)c = 0,$$

$$M \in AB \Leftrightarrow h_4 : ac + bm_2 - cm_1 - am_2 = 0,$$

$$PM \perp AB \Leftrightarrow h_5 : (p - m_1)(b - a) + (q - m_2)c = 0,$$

$$P \text{ leží na kružnici opsané } \triangle ABC \Leftrightarrow$$

$$h_6 : -acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2 = 0.$$

Závěr tvrzení z má tvar:

$$K, L, M \text{ leží na jedné přímce} \Leftrightarrow z : l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1 = 0.$$

Potřebujeme zjistit, zda závěr z patří do ideálu I (přesněji do radikálu ideálu

I), který je generován polynomy h_1, h_2, \dots, h_6 . V CoCoA dostaneme

```
Use R := Q[abcpqk[1..2]l[1..2]m[1..2]t];
I := Ideal(p-l[1], ck[1]-bk[2], (p-k[1])b+(q-k[2])c, ac+bm[2]-cm[1]
-am[2], (p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c, -acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2,
(1[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1])t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď je 1. Normální forma je rovna 1, což znamená, že nedovedeme rozhodnout, zda je tvrzení pravdivé nebo nepravdivé. Příčina může spočívat ve skutečnosti, že pro některé hodnoty a, b, c trojúhelník degeneruje a pro tyto hodnoty tvrzení nemusí platit. Hledáme tedy podmínky degenerace. Následující příkaz `Elim`, který eliminuje závisle proměnné $p, q, k_1, k_2, l_1, m_1, m_2$ a pomocnou proměnnou t z ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, z')$, kde $z' : (l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1)t - 1 = 0$ je negace z , dává podmínky nede-
generace.

```
Use R := Q[abcpqk[1..2]l[1..2]m[1..2]t];
I := Ideal(p-l[1], ck[1]-bk[2], (p-k[1])b+(q-k[2])c, ac+bm[2]-cm[1]
-am[2], (p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c, -acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2,
(1[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1])t-1);
Elim(p..t,I);
```

Dostaneme podmínku $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2) = 0$, která znamená, že pro vrcholy trojúhelníka platí $B = C$ nebo $A = B$. Tyto případy vyloučíme, tj. budeme předpokládat, že $B \neq C$ a $B \neq A$. Přidáme tedy polynom $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)t - 1$ do ideálu I a postup opakujeme. Označme ještě $J = I \cup \{(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)t - 1\}$.

```
Use R := Q[abcpqk[1..2]l[1..2]m[1..2]vt];
J := Ideal(p-l[1], ck[1]-bk[2], (p-k[1])b+(q-k[2])c, ac+bm[2]-cm[1]
-am[2], (p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c, -acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2,
(b^2+c^2)((a-b)^2+c^2)v-1, (1[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1])
t-1);
NF(1,J);
```

Odpověď 0 znamená, že Wallace - Simsonova věta je dokázána. \square

Ukázali jsme, že podmínka "bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC " je postačující pro to, aby paty kolmic K, L, M ležely v přímce. Nyní ukážeme, že tato podmínka je také podmínkou nutnou.

Ptáme se, zda polynom $h_6 = -acp + cp^2 + abq - b^2q - c^2q + cq^2$ je prvkem ideálu $(h_1, h_2, \dots, h_5, z)$. Obdobně jako v předchozím výpočtu zjistíme podmínky nede-
generace, které v tomto případě jsou $ac \neq 0$, tj. pro vrcholy trojúhelníka

ABC je $A \neq B$ a zároveň C neleží na AB , což je jistě v případě obecného (generického) trojúhelníka splněno. Do ideálu $(h_1, h_2, \dots, h_5, z)$ přidáme polynom $acv - 1$, kde v je pomocná proměnná. V CoCoA napíšeme

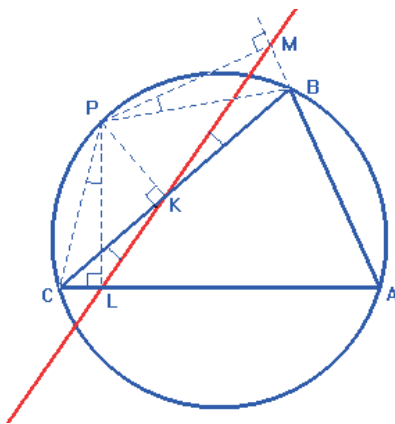
```
Use R := Q[abcpqk[1..2]l[1..2]m[1..2]vt];
I := Ideal(p-l[1], ck[1]-bk[2], (p-k[1])b+(q-k[2])c, ac+bm[2]-cm[1]
-am[2], (p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c, l[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]
l[1], acv-1, (-acp+cp^2+abq-b^2q-c^2q+cq^2)t-1);
NF(1,I);
```

a dostaneme $\text{NF}(1, I) = 0$. Obrácená věta platí. Základní W. - S. větu tedy můžeme zformulovat v následující silnější podobě:

Množina všech bodů P takových, že kolmé průměty bodu P na všechny strany trojúhelníka ABC leží v přímce, je kružnice trojúhelníku ABC opsaná.

A nyní klasický důkaz, obr. 4.3.

Nechť bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Označme paty kolmic



Obrázek 4.3: Klasický důkaz W. - S. věty

spuštěných z bodu P na strany BC , AC , AB po řadě K , L , M . Máme dokázat, že body K , L , M leží na jedné přímce, tj. stačí ukázat rovnost $\angle CKL = \angle BKM$.

Čtyřúhelníky $PCLK$ a $PKBM$ jsou tětiové, potom podle věty o obvodových úhlech $\angle CPL = \angle CKL$ a $\angle BPM = \angle BKM$. Stačí tedy ukázat, že platí $\angle CPL = \angle BPM$. Čtyřúhelníky $ABPC$ a $AMPL$ jsou rovněž tětiové. Protože součet protějších úhlů v tětiovém čtyřúhelníku je roven π , plyne odtud $\angle CPB = \pi - \angle CAB$ a $\angle LPM = \pi - \angle CAB$ a odtud $\angle CPB = \angle LPM$. Dále $\angle CPB = \angle CPL + \angle LPB$ a $\angle LPM = \angle LPB + \angle BPM$. Odtud již plyne

rovnost $\angle CPL = \angle BPM$. \square

Každému bodu P kružnice opsané trojúhelníku tedy můžeme podle W. - S. věty přiřadit přímku, na níž leží paty kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC - tzv. Wallace - Simsonovu přímku. Tato přímka má řadu vlastností, viz např. [16], [56], [91].

4.1 Zobecnění W. – S. věty podle Gergonne

V další části ukážeme zobecnění Wallace - Simsonovu věty, které podle S.C. Chou [39] objevil J.D. Gergonne. Budeme se zabývat následující úlohou:

Předpokládejme, že bod P je libovolný bod roviny ΔABC . Určete množinu bodů P takových, že trojúhelník pat kolmic K, L, M , spuštěných z bodu P na strany trojúhelníka ABC , má konstantní obsah s .

Takto zformulovaná úloha je zobecněním předchozí úlohy, protože pro nulový obsah ΔKLM je hledanou množinou bodů kružnice opsaná ΔABC . Úlohu popíšeme ve stejné kartézské soustavě souřadnic jako v předchozím příkladu, obr. 4.2. Při stejném označení zjistíme, že pro obsah s ΔKLM platí $s = 1/2(l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1)$.

Úloha je nyní složitější. Na rozdíl od předchozí úlohy hledanou množinu bodů P neznáme, musíme ji *objevit*. Nejprve zkusíme platnost tvrzení, jestliže na bod P není kladena žádná podmínka. Obdobně jako v předešlém případě zjistíme, že $\text{NF}(1, I) = 1$, tj. tvrzení jsme nedokázali, jak se dalo očekávat (tuto část vynecháváme).

Dále uvažujme ideál $I = (p - l_1, ck_1 - bk_2, (p - k_1)b + (q - k_2)c, ac + bm_2 - cm_1 - am_2, (p - m_1)(b - a) + (q - m_2)c, l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1 - 2s)$, který obsahuje polynomy h_1, h_2, \dots, h_5 a podmínku konstantního obsahu $h_7 = l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1 - 2s$. V tomto ideálu eliminujeme všechny proměnné kromě a, b, c, p, q, s . Dostaneme

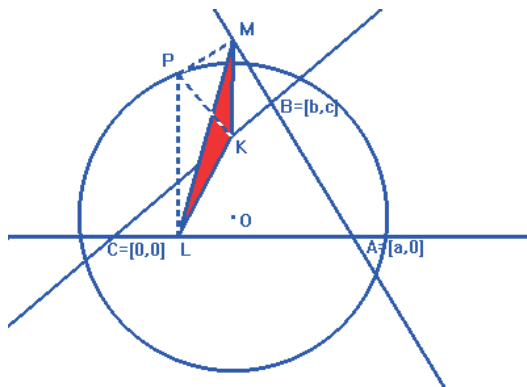
```
Use R := Q[abc p q k [1..2] l [1..2] m [1..2] s];
I := Ideal(p-l[1], ck[1]-bk[2], (p-k[1])b+(q-k[2])c, ac+bm[2]-cm[1]-am[2], (p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c, l[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1]-2s);
Elim(k[1]..m[2], I);
```

jedinou rovnici, která má po úpravě tvar

$C(s) : ac^3(p^2 + q^2) - a^2c^3p + ac^2q(ab - b^2 - c^2) + 2s(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2) = 0$.
Při bližším zkoumání zjistíme, že hledanou množinou je kružnice $C(s)$ se středem $O = [q/2, (b^2 - ab + c^2)/(2c)]$ a poloměrem

$$r = \sqrt{(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)(ac + 8s)/(4ac^3)}, \quad (4.1)$$

kteřá je soustředná s kružnicí opsanou $\triangle ABC$, obr. 4.4. Odvodili jsme, že



Obrázek 4.4: $\triangle KLM$ má konstantní obsah

nutnou podmínkou pro to, aby body K, L, M tvořily trojúhelník o obsahu s , je, aby bod P ležel na kružnici $C(s)$.

Nyní obráceně. Je tato podmínka i podmínkou postačující? Vyhovuje každý bod P kružnice $C(s)$ podmínce, že trojúhelník pat kolmic K, L, M má pevně daný obsah s ? Stačí zjistit, zda je polynom $h_7 = l_1m_2 + k_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1 - 2s$ prvkem ideálu (h_1, h_2, \dots, h_5) . Zároveň budeme předpokládat, že platí podmínky nede degenerace $(b^2 + c^2)[(a - b)^2 + c^2] \neq 0$, tj. $B \neq C$ a $B \neq A$. V CoCoA napíšeme

```
Use R := Q[abcpqk[1..2]l[1..2]m[1..2]svt];
J:=Ideal(p-l[1],ck[1]-bk[2],(p-k[1])b+(q-k[2])c,ac+bm[2]-cm[1]
-am[2],(p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c,ac^3(p^2+q^2)-a^2c^3p+ac^2q(ab-
b^2-c^2)+2s(b^2+c^2)((a-b)^2+c^2),(b^2+c^2)((a-b)^2+c^2)v-1,
(1[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1]-2s)t-1);
NF(1,I);
```

Výsledek $\text{NF}(1, J) = 0$. To znamená, že platí následující zobecnění Wallace - Simsonovy věty (Gergonne):

Paty kolmic K, L, M z bodu P na strany trojúhelníka ABC tvoří trojúhelník konstantního obsahu s právě když bod P leží na kružnici $C(s)$, která je soustředná s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC a má poloměr daný formulí (4.1).

Poznámka:

Mějme stále na paměti, že se jedná o *orientovaný obsah*. Je např. možné, že

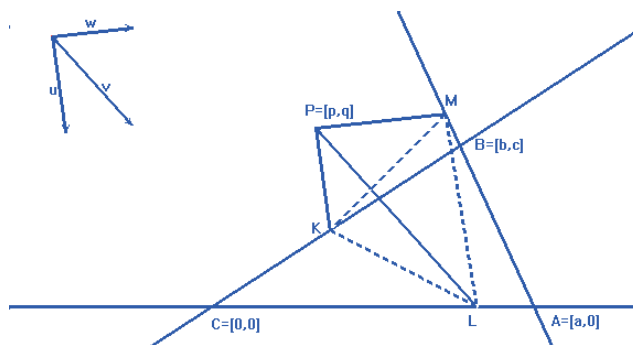
pro $s = 2$ a $s = -2$ existují *dvě* různé soustředné kružnice jako hledaná geometrická místa bodů P , přičemž trojúhelníky KLM resp. $K'L'M'$ odpovídající hodnotě $s = 2$ resp. $s = -2$ mají stejný (neorientovaný) obsah 2 avšak *opačnou* orientaci. \square

4.2 Guzmánovo zobecnění W. – S. věty

Následující zobecnění Wallace - Simsonovy věty, které v sobě zahrnuje všechny předchozí případy, publikoval v roce 1999 španělský matematik M. de Guzmán [33]. Podle jeho slov je jeho zobecnění lehce dokazatelné, ale nebylo snadné jej objevit. Jedná se o tento problém:

Je dán libovolný bod P roviny trojúhelníka ABC a tři směry u, v, w dané nenulovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Bod P promítáme ve směrech u, v, w po řadě na strany BC, AC, AB trojúhelníka ABC do bodů K, L, M . Jaká je množina bodů P , jestliže obsah s trojúhelníka KLM je konstantní?

Situaci popíšeme analyticky. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic následně,



Obrázek 4.5: Guzmánovo zobecnění W. – S. věty

dovně, obr. 4.5: $A = [a, 0]$, $B = [b, c]$, $C = [0, 0]$, $P = [p, q]$, $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, l_2]$, $M = [m_1, m_2]$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$.

Ze vztahů $K = P + t_1\mathbf{u}$, $L = P + t_2\mathbf{v}$, $M = P + t_3\mathbf{w}$, $K = C + s_1(B - C)$, $L = C + s_2(A - C)$, $M = A + s_3(B - A)$ dostaneme soustavu rovnic

$h_1 : k_1 = p + t_1u_1$, $h_2 : k_2 = q + t_1u_2$, $h_3 : l_1 = p + t_2v_1$, $h_4 : l_2 = q + t_2v_2$, $h_5 : m_1 = p + t_3w_1$, $h_6 : m_2 = q + t_3w_2$, $h_7 : k_1 = s_1b$, $h_8 : k_2 = s_1c$, $h_9 : l_1 = s_2a$, $h_{10} : l_2 = 0$, $h_{11} : m_1 = a + s_3(b - a)$, $h_{12} : m_2 = s_3c$.

Vztah

$$h_{13} : 2s = k_1l_2 - l_1k_2 + l_1m_2 - m_1l_2 + m_1k_2 - k_1m_2$$

vyjadřuje podmínku, že obsah ΔKLM je roven konstantě s . Hledáme nutnou podmínku pro body P , aby obsah ΔKLM byl roven s .

Eliminací závisle proměnných $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$ v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{13})$ obdržíme po úpravě algebraickou rovnicí druhého stupně v p, q

$$C(s) = 0, \quad (4.2)$$

kde

$$C(s) = c^2 v_2 p^2 (u_1 w_2 - u_2 w_1) + cpq [au_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) - (cv_1 + bv_2)(u_1 w_2 - u_2 w_1)] + cq^2 [(bv_1 (u_1 w_2 - u_2 w_1) - au_1 (v_1 w_2 - v_2 w_1))] - ac^2 v_2 p (u_1 w_2 - u_2 w_1) + acq [cu_1 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + bw_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)] + 2v_2 s (cu_1 - bu_2)(cw_1 + w_2(a - b)).$$

Protože se konstanta s vyskytuje pouze v posledním členu, můžeme (4.2) psát ve tvaru

$$C(s) = C(0) + s \cdot Q, \quad (4.3)$$

kde $Q = 2v_2(cu_1 - bu_2)(cw_1 + w_2(a - b))$. Dokázali jsme, že (4.2) je nutná podmínka pro to, aby se obsah KLM rovnal s .

Nyní ukážeme, že podmínka (4.2) je rovněž postačující.

Podle Hilbertovy věty Nullstellensatz máme dokázat, že polynom h_{13} je prvkem radikálu ideálu $(h_1, h_2, \dots, h_{12}, C(s))$ nebo, což je ekvivalentní, že 1 je prvkem ideálu $J = (h_1, h_2, \dots, h_{12}, C(s), h_{13}t - 1)$, kde t je pomocná proměnná. Vypočítáme normální formu $\text{NF}(1, J)$ a dostaneme $\text{NF}(1, J) = 1$, takže nevíme, zda podmínka (4.2) je postačující pro to, aby obsah KLM byl roven s či nikoliv.

Budeme vyšetřovat podmínky nedegenerace. Eliminací všech proměnných, kromě $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$ a pomocné proměnné t v ideálu J , obdržíme podmínku $d : v_2(cu_1 - bu_2)(cw_1 + w_2(a - b)) = 0$, která říká, že alespoň jeden ze směrů u, v, w je po řadě rovnoběžný se stranami BC, AC, AB . Abychom tuto situaci vyloučili, přidáme polynom $dr - 1$ k ideálu J a vypočteme normální formu 1 vzhledem k ideálu $J' = J \cup \{dr - 1\}$, kde r je další pomocná proměnná.

Dostaneme $\text{NF}(1, J') = 0$, tj. podmínka (4.2) je postačující pro to, aby obsah ΔKLM byl roven s .

Dospěli jsme ke větě, která je zobecněním W. – S. věty (M. de Guzmán) [33]:

Označme K, L, M průměty bodu P na strany BC, AC, AB trojúhelníka ABC v daných směrech u, v, w , které po řadě nejsou rovnoběžné se stranami BC, AC, AB . Předpokládejme, že neplatí $u \parallel v \parallel w$. Potom množina bodů P takových, že obsah trojúhelníka K, L, M je roven s , je křivka $C(s)$ daná rovnicí (4.2).

Křivka $C(s)$ má řadu zajímavých vlastností. Uveďme některé z nich [33]:

a) $C(0)$ prochází vrcholy trojúhelníka ABC .

Důkaz plyne dosazením souřadnic vrcholů A, B, C do rovnice (4.2). Totéž lze nahlédnout ze skutečnosti, že pokud bude bod P jedním z vrcholů trojúhelníka ABC , potom pro jakékoliv směry u, v, w dva vrcholy trojúhelníka K, L, M splynou s tímto vrcholem a body K, L, M budou kolineární.

b) $C(s)$ je pro dané směry u, v, w a dané s kuželosečka.

Z rovnice $C(s) = 0$ je vidět, že koeficienty u kvadratických členů p^2, pq, q^2 současně vymizí právě když jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárně závislé, tj. právě když jsou všechny tři směry u, v, w rovnoběžné, což je případ, který jsme vyloučili.

c) Při měnícím se s tvoří kuželosečky $C(s)$ svazek stejnohlých středových kuželoseček nebo svazek shodných parabol se společnou osou.

Protože konstanta s se vyskytuje pouze v absolutním členu rovnice $C(s) = 0$, má kuželosečka $C(s)$ pro libovolné s stejné asymptotické směry.

d) $C(0)$ je singulární právě když jsou právě dva ze směrů u, v, w rovnoběžné.

Determinant kuželosečky $C(0)$ je roven nule právě když $(v_1w_2 - v_2w_1)(u_1v_2 - u_2v_1)(u_1w_2 - u_2w_1) = 0$. Odtud naše tvrzení. Je-li např. $u \parallel v$, potom se kuželosečka skládá ze dvou přímek - z přímky AB a přímky procházející vrcholem C ve směru $u \parallel v$. Je-li $u \parallel v \parallel AB$, dostaneme dvě rovnoběžky (které pro $s = 1/2$ splynou).

e) Jestliže jsou všechny tři směry u, v, w navzájem různé je $C(0)$ regulární kuželosečka.

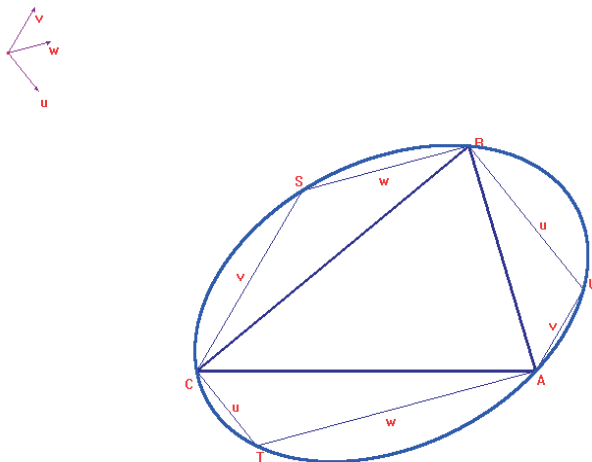
Důkaz plyne z předcházejícího tvrzení. Determinant kuželosečky je různý od nuly.

f) Zvolíme-li směry $u = (c, -b), v = (0, 1), w = (c, a - b)$, potom je kuželosečka $C(0)$ kružnice

$$cp^2 + cq^2 - acp + abq - b^2q - c^2q = 0.$$

Důkaz plyne dosazením do rovnice $C(0) = 0$. □

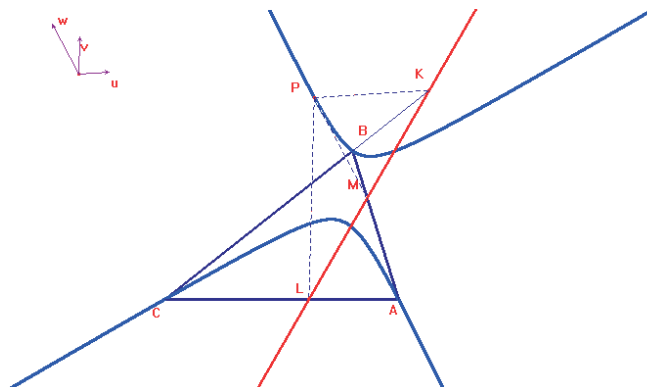
Nyní si ukážeme způsob, jak kuželosečku $C(0)$ pro dané směry u, v, w určit pomocí kružítka a pravítka [33], obr. 4.6. Vrcholy A, B trojúhelníka ABC vedeme po řadě rovnoběžky se směry v, u . Jejich průsečík označme U . Podobně vedeme vrcholy B, C rovnoběžky se směry w, v a vrcholy C, A rovnoběžky se směry u, w . Jejich průsečíky označíme po řadě S, T . Body S, T, U náleží kuželosečce $C(0)$, jak lze snadno nahlédnout. Dostáváme tak šest bodů kuželosečky, které tvoří šestiúhelník $AUBSCT$, který je kuželosečce vepsán a jehož protější strany jsou navzájem rovnoběžné. Spojnice středů dvojic protějších stran šestiúhelníka např. AU a SC leží na průměru kuželosečky, který, jak známo, prochází jejím středem. Všechny tři průměry se protínají ve středu kuželosečky (pokud střed existuje). Pokud jsou průměry navzájem rovnoběžné, potom jsou rovnoběžné s osou paraboly. Známou konstrukcí sestrojíme další prvky kuže-



Obrázek 4.6: Konstrukce kuželosečky $C(0)$ při daných směrech u, v, w

losečky. Další body kuželosečky lze sestavit např. pomocí Pascalovy věty.

Na obr. 4.7 je zobrazena hyperbola pro směry u, v, w a $s \neq 0$. Dále je zobra-



Obrázek 4.7: $KivkaC(u, v, w, 0)$ je hyperbola

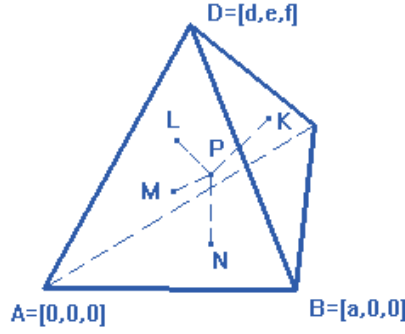
zena elipsa pro směry u, v, w a $s \neq 0$, obr. 4.8.

Poznámky:

1) V práci [27] je zavedeno afinní a projektivní zobecnění W. – S. věty. Pokud paty kolmic K, L, M leží na afinní W. – S. přímce bodu P vzhledem ke středu Z nebo pokud paty K, L, M leží na projektivní W. – S. přímce bodu

$vol(ABCS) = s$. Množinu bodů P budeme vyšetřovat pomocí teorie automatického dokazování a objevování vět.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0, 0]$, $B = [a, 0, 0]$, $C = [b, c, 0]$, $D = [d, e, f]$, $P = [p, q, r]$, $K = [k_1, k_2, k_3]$, $L = [l_1, l_2, l_3]$, $M = [m_1, m_2, m_3]$, $N = [n_1, n_2, n_3]$. Předpoklady jsou následující:



Obrázek 4.9: Zobecnění Wallace - Simsonovy věty na čtyřstěn

$$PK \perp BCD \Leftrightarrow h_1 : (b - a)(p - k_1) + c(q - k_2) = 0 \wedge h_2 : (d - a)(p - k_1) + e(q - k_2) + f(r - k_3) = 0,$$

$$K \in BCD \Leftrightarrow h_3 : -acf - aek_3 + afk_2 + ack_3 + cfk_1 + bek_3 - cdk_3 - bfk_2 = 0,$$

$$PL \perp ACD \Leftrightarrow h_4 : b(p - l_1) + c(q - l_2) = 0 \wedge h_5 : d(p - l_1) + e(q - l_2) + f(r - l_3) = 0,$$

$$L \in ACD \Leftrightarrow h_6 : cfl_1 + bel_3 - cdl_3 - bfl_2 = 0,$$

$$PM \perp ABD \Leftrightarrow h_7 : a(p - m_1) = 0 \wedge h_8 : d(p - m_1) + e(q - m_2) + f(r - m_3) = 0,$$

$$M \in ABD \Leftrightarrow h_9 : aem_3 - afm_2 = 0,$$

$$PN \perp ABC \Leftrightarrow h_{10} : a(p - n_1) = 0 \wedge h_{11} : b(p - n_1) + c(q - n_2) = 0,$$

$$N \in ABC \Leftrightarrow h_{12} : acn_3 = 0.$$

$$\text{Závěr } h_{13} : vol(KLMN) = s \Leftrightarrow$$

$$h_{13} : \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 1 \end{vmatrix} = 6s. \quad (4.4)$$

Přímá eliminace závislých proměnných $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{12}, h_{13})$ selhává pro výpočetní složitost. Tedy použijeme následující postupnou eliminaci.

Nejprve eliminujeme $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ v ideálu (h_7, \dots, h_{13}) , čímž dostaneme eliminační ideál, který je generovaný jediným polynomem p_1 . Potom

eliminujeme proměnné l_1, l_2, l_3 v ideálu (h_4, h_5, h_6, p_1) . Dostaneme eliminační ideál s jediným generátorem p_2 . A nakonec eliminujeme k_1, k_2, k_3 v ideálu (h_1, h_2, h_3, p_2) a dostaneme jedinou podmínku

$$F(s) = ac^2 f^3 G + s \cdot Q, \quad (4.5)$$

kde

$$G = bf^2q^3(b-a) + fr^3(abe - acd + cd^2 - b^2e - c^2e + ce^2) + c^2f^2p^2q + cfp^2r(e^2 - ce + f^2) + cf^2q^2p(a-2b) + fq^2r(abe - acd + cd^2 - b^2e + cf^2) + cf^2r^2p(a-2d) + f^2r^2q(b^2 - ab + c^2 - 2ce) + 2cefpr(b-d) + abcf^2q^2 + r^2(abce^2 - ac^2de + c^2d^2e + acde^2 - 2bcde^2 - abe^3 + b^2e^3 + acdf^2 - abef^2 + b^2ef^2 + c^2ef^2) - ac^2f^2pq + acfpr(ce - e^2 - f^2) + fqr(ac^2d - 2abce - c^2d^2 + 2bcde - b^2e^2 + abe^2 + abf^2 - b^2f^2 - c^2f^2)$$

a

$$Q = -6(e^2 + f^2)((cd - be)^2 + b^2f^2 + c^2f^2)(a^2c^2 - 2ac^2d + c^2d^2 - 2a^2ce + 2abce + 2acde - 2bcde + a^2e^2 - 2abe^2 + b^2e^2 + a^2f^2 - 2abf^2 + b^2f^2 + c^2f^2).$$

Q je konstanta, která nezávisí na proměnných p, q, r, s .

Dokázali (a objevili) jsme větu [72]:

Věta 1. *Nechť K, L, M, N jsou kolmé průměty libovolného bodu P postupně na stěny BCD, ACD, ABD, ABC čtyřstěnu $ABCD$. Jestliže čtyřstěn $KLMN$ má konstantní objem s , potom P leží na ploše $F(s) = 0$ z (4.5).*

Poznámky:

1) Výraz Q můžeme psát ve tvaru

$$Q = -6 \cdot \frac{1}{a^2} \cdot |(B-A) \times (D-A)|^2 \cdot |(D-A) \times (C-A)|^2 \cdot |(D-B) \times (C-B)|^2. \quad (4.6)$$

2) Všimněte si, že (4.5) je nutná podmínka pro to, aby měl čtyřstěn $KLMN$ konstantní objem s . Pokus dokázat, že podmínka (4.5) je (v tomto obecném tvaru) také postačující, zatím nebyl úspěšný. Tedy nevíme, zda každý bod P plochy $F(s) = 0$ splňuje uvedené podmínky. V práci [82] je vyšetřován obdobný problém pro jistou třídu čtyřstěnu pomocí metody Wu [106], která je založena na tzv. pseudodělení. Tímto způsobem byla pro jistou třídu čtyřstěnu nalezena nutná a postačující podmínka ve shodě s našimi výsledky. V další části ukážeme, že pro konkrétní hodnoty souřadnic a, b, c, d, e, f jsme schopni dokázat, že podmínka (4.5) je rovněž postačující. \square

Nyní ukážeme některé vlastnosti plochy $F(s) = 0$ pro s rovno nule, tj. když body K, L, M, N leží v jedné rovině. Ze vztahu (4.5) plyne $F(0) = 0 \Leftrightarrow G = 0$.

Věta 2. *Plocha G má následující vlastnosti [72]:*

a) G obsahuje hrany AB, AC, AD, BC, BD, CD čtyřstěnu $ABCD$, tj. G je

opsaná čtyřstěnu $ABCD$. b) G je kubická plocha. c) G má 4 singulární body – vrcholy A, B, C, D čtyřstěnu. d) Bod, ve kterém se protínají tři roviny, které procházejí hranami AB, BD, DA a jsou kolmé na stěny ABC, BDC, DAC je prokem plochy G . Podobně postupujeme pro jiné trojice hran čtyřstěnu. e) Přímký AB, AC, AD, BC, BD, CD jsou torzálními přímkami kubiky G , tj. tečná rovina v libovolném bodě této přímky obsahuje celou přímku. Tečné roviny ve třech dvojicích protilehlých hran se protínají v dalších 3 přímkách, které leží v jedné rovině. Každá z těchto tří přímek protíná dvojice mimoběžných torzálních přímek. f) Existuje jednoduchá racionální parametrizace plochy G .

Důkaz. a) Uvědomme si, že libovolný bod P hrany čtyřstěnu splývá s dvěma patami kolmic K, L, M, N , které potom leží v jedné rovině. Jiný způsob spočívá v ověření přímým výpočtem.

b) Tvzení plyne ze skutečnosti, že kubická plocha obsahuje všech šest hran čtyřstěnu $ABCD$, viz [14].

c) Pokud všechny kubické členy v rovnici $G = 0$ vymizí, potom plocha je kvadrikou, což není možné, protože plocha obsahuje všech šest hran čtyřstěnu $ABCD$.

d) Abychom to dokázali, uvědomme si, že v tomto případě všechny paty K, L, M, N leží v rovině ABD .

e) Důkaz tohoto tvrzení, viz [14] str. 567-568.

f) Necht $X = A + t\mathbf{u}$ je přímka, kde $\mathbf{u} = (u, v, 1)$. Potom tato přímka, protože A je dvojnásobný bod, protíná kubickou plochu G nejvýše v jednom dalším bodě $X(u, v, 1)$, viz Příklad 1. \square

Poznámky:

1) Je známo, že každá kubická plocha obsahuje (v komplexním projektivním prostoru) 27 přímek. V našem případě máme skutečně $6 \times 4 + 3 = 27$ přímek, protože každá hrana je počítána čtyřikrát [14], [36], [67].

2) Při důkazu Věty 1 můžeme postupovat také klasickou metodou tak, jak to v rovině učinil M. de Guzmán [33]. Paty kolmic K, L, M, N tvoří čtyřstěn o konstantním objemu s . Tedy K, L, M, N vyhovují rovnici (4.4). Souřadnice bodů K, L, M, N , které jsou průsečíky kolmic z bodu $P = [p, q, r]$ s rovinami stěn čtyřstěnu $ABCD$ jsou lineární v p, q, r . Tedy (4.4) je algebraická rovnice 3. stupně v p, q, r , která má obecně 20 reálných koeficientů. Abychom tyto koeficienty určili, potřebujeme alespoň 19 bodů této plochy. Víme, že každá hrana čtyřstěnu $ABCD$ obsahuje dva dvojnásobné body, což je dohromady $4 + 6 \times 2 = 16$ bodů. Zbývá určit poslední 3 body. Konstrukce takových bodů plyne z bodu d) věty 2. \square

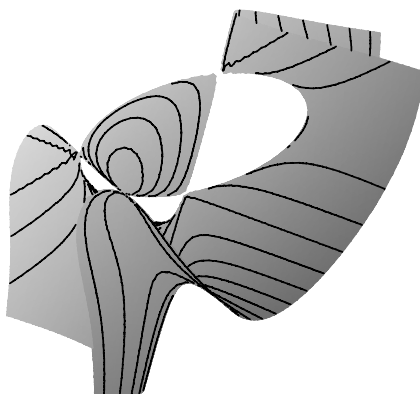
Příklad 1. Pro speciální hodnoty $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0, f = 1, s = 0$

z rovnice (4.5) dostaneme

$$p^2q + pq^2 + p^2r + q^2r + pr^2 + qr^2 - pq - pr - qr = 0, \quad (4.7)$$

obr. 4.10.

Nejprve dokážeme, že (4.7) je rovněž postačující podmínka pro to, aby paty



Obrázek 4.10: Kubická plocha $p^2q + pq^2 + p^2r + q^2r + pr^2 + qr^2 - pq - pr - qr = 0$ jako množina bodů P s patami K, L, M, N v jedné rovině vzhledem ke (speciálnímu) čtyřstěnu

K, L, M, N ležely v jedné rovině, viz Příklad 3, kde je proveden podrobný výpočet.

Tato plocha umožňuje jednoduše provést racionální parametrizaci, vezmeme-li v úvahu, že plocha má 4 dvojnásobné body. Položíme-li $p = ur, q = vr, r = r$ a dosadíme do vztahu (4.7), dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \frac{u(u + uv + v)}{u^2v + u^2 + uv^2 + v^2 + u + v} \\ q &= \frac{v(u + uv + v)}{u^2v + u^2 + uv^2 + v^2 + u + v} \\ r &= \frac{u + uv + v}{u^2v + u^2 + uv^2 + v^2 + u + v} \end{aligned} \quad (4.8)$$

pro reálná u, v .

Příklad 2. Volba $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}, d = 1, e = 1/\sqrt{3}, f = \sqrt{8/3}$ s těžištěm čtyřstěnu $ABCD$ v počátku, dává pro libovolné s jednoparametrický systém ploch, které jsou asociovány s pravidelným čtyřstěnem $ABCD$, píšeme x, y, z místo p, q, r):

$$24\sqrt{6}x^2y + 24\sqrt{3}x^2z + 24\sqrt{3}y^2z - 8\sqrt{6}y^3 - 16\sqrt{3}z^3 + 36\sqrt{2}x^2 + 36\sqrt{2}y^2 \quad (4.9)$$

$$+36\sqrt{2}z^2 - 18\sqrt{2} - 729s = 0.$$

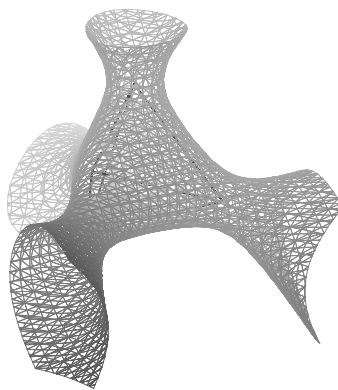
Pro $s = 0$ dostaneme množinu bodů P takových, že paty kolmic K, L, M, N leží v jedné rovině. Tato kubická plocha má vrcholy A, B, C, D jako jediné singulární body.

Pro $s \neq 0$ všechny kubické plochy asociované s pravidelným čtyřstěnem $ABCD$ neobsahují singulární body s výjimkou hodnoty $s = -18\sqrt{2}/729$. Tato hodnota vede na kubickou plochu

$$6\sqrt{6}x^2y + 6\sqrt{3}x^2z + 6\sqrt{3}y^2z - 2\sqrt{6}y^3 - 4\sqrt{3}z^3 + 9\sqrt{2}x^2 + 9\sqrt{2}y^2 + 9\sqrt{2}z^2 = 0, \quad (4.10)$$

s pouze jedním singulárním bodem – izolovaným bodem, který je v těžišti čtyřstěnu $ABCD$.

Na obr. 4.11 vidíme kubickou plochu (4.9) asociovanou s pravidelným čtyřstěnem $ABCD$ pro $s = 10\sqrt{2}/729$.



Obrázek 4.11: Kubická plocha asociovaná s pravidelným čtyřstěnem jako množina bodů P s konstantním objemem $s = 10\sqrt{2}/729$ čtyřstěnu $KLMN$.

4.3.2 Zobecnění W. – S. věty na prostorový čtyřúhelník

Další zobecnění W. – S. věty do prostoru E^3 spočívá v nahrazení čtyřstěnu $ABCD$ prostorovým čtyřúhelníkem.

Označme K, L, M, N paty kolmic, které jsou po řadě spuštěné z bodu P na strany AB, BC, CD, DA prostorového čtyřúhelníka $ABCD$. Budeme hledat množinu bodů P takových, aby paty kolmic K, L, M, N ležely v jedné rovině. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = [0, 0, 0]$, $B = [a, 0, 0]$, $C = [b, c, 0]$, $D = [d, e, f]$, $P = [p, q, r]$, $K = [k_1, 0, 0]$, $L = [l_1, l_2, 0]$, $M = [m_1, m_2, m_3]$, $N = [n_1, n_2, n_3]$. Podmínky jsou následující:

$PK \perp AB \Leftrightarrow h_1 : p - k_1 = 0, L \in BC \Leftrightarrow h_2 : l_2(b - a) - c(l_1 - a) = 0, PL \perp BC \Leftrightarrow h_3 : (p - l_1)(b - a) + c(q - l_2) = 0, M \in CD \Leftrightarrow h_4 : (d - b)(m_2 - c) - (e - c)(m_1 - b) = 0 \wedge h_5 : (e - c)m_3 - (m_2 - c)f = 0 \wedge h_6 : (m_1 - b)f - m_3(d - b) = 0, PM \perp CD \Leftrightarrow h_7 : (p - m_1)(d - b) + (q - m_2)(e - c) + (r - m_3)f = 0, N \in DA \Leftrightarrow h_8 : dn_2 - en_1 = 0 \wedge h_9 : dn_3 - fn_1 = 0 \wedge h_{10} : fn_2 - en_3 = 0, PN \perp DA \Leftrightarrow h_{11} : (p - n_1)d + (q - n_2)e + (r - n_3)f = 0,$
 K, L, M, N leží v rovině $\Leftrightarrow h_{12} : k_1l_2m_3 - l_2m_3n_1 - k_1m_3n_2 + l_1m_3n_2 - k_1l_2n_3 + l_2m_1n_3 + k_1m_2n_3 - l_1m_2n_3 = 0$.

Postupná eliminace (nejprve eliminujeme n_1, n_2, n_3 , potom m_1, m_2, m_3 atd.) 9 proměnných k_1, \dots, n_3 v ideálu $(h_1, h_2, \dots, h_{11}, h_{12})$ dává následující rovnici kubické plochy $H(p, q, r)$:

$$\begin{aligned}
 H := & p^3(c^2d(-a+d) - (be^2 + bf^2 - 2cde)(a-b)) + p^2qc(-ace + ae^2 - af^2 + 2bf^2) \\
 & + p^2rcf(-ac + 2cd + 2ae - 2be) + pq^2(c^2(-ad + d^2 + f^2) + (2cde - be^2)(a-b)) \\
 & + pqr2f(cd - be)(a-b) + pr^2f^2(-ab + b^2 + c^2) + q^3ace(-c + e) + q^2racf(-c + 2e) \\
 & + qr^2acf^2 + p^2(cd(a^2c - cd^2 - 2a^2e + abe + b^2e + c^2e - ade + bde) + (e^2 + f^2)(a^2b - b^3 + ac^2 - bc^2 - c^2d - ace + bce)) \\
 & + pq(-a^2bcd + ab^2cd + ac^3d + a^2cd^2 - b^2cd^2 - c^3d^2 + a^2c^2e - a^2ce^2 - de(b^2 + c^2)(a-b) + f^2(a^2c - abc - b^2c - c^3) - \\
 & (d^2 + e^2 + f^2)(cd - be)(a-b)) + prf((-ab + b^2 + c^2)(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) + ac(2be + ac - 2cd - 2ae)) \\
 & + q^2ae(c(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) + (-c + e)(ab - b^2 - c^2)) + qra(cf(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) + f(-c + 2e)(ab - b^2 - c^2)) \\
 & + r^2af^2(ab - b^2 - c^2) - pa(cd(acd - cd^2 + c^2e - (be + de)(a-b)) + (e^2 + f^2)((b^2 + c^2 - ce)(a-b) - c^2d)) \\
 & + (qe + rf)a(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2)(ab - b^2 - c^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Rovnice $H = 0$ dává nutnou podmínku pro body $P = [p, q, r]$ tak, aby paty kolmic K, L, M, N ležely v jedné rovině. Můžeme vyslovit větu, [72]:

Věta 3. *Nechť P je libovolný bod a K, L, M, N po řadě paty kolmic z bodu P na strany AB, BC, CD, DA prostorového čtyřúhelníka $ABCD$. Potom body $P = [p, q, r]$ takové, že paty K, L, M, N leží v jedné rovině splňují rovnici $H = 0$.*

Poznámka:

Dokázat, že podmínka $H = 0$ (v tomto obecném tvaru) je také postačující pro to, aby paty K, L, M, N ležely v jedné rovině, se pro výpočetní složitost zatím nepodařilo. V konkrétních případech (jako v dalším příkladu) byl tento důkaz proveden. \square

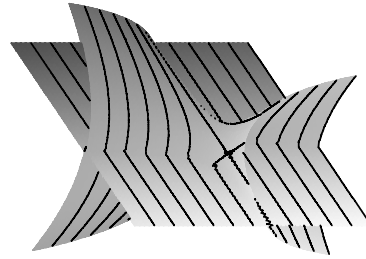
Příklad 3. Pro volbu $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0, f = 1$ dostaneme kubickou plochu

$$-p^2q + pq^2 - p^2r - q^2r + pr^2 + qr^2 + p^2 - r^2 - p + r = 0, \quad (4.11)$$

nebo po faktorizaci

$$(p - r)(pq - q^2 + pr + qr - p - r + 1) = 0.$$

Kubická plocha se tedy rozpadá na rovinu a jednodílný hyperboloid, obr. 4.12. Ověření skutečnosti, že (4.11) je také postačující podmínka pro to, aby paty



Obrázek 4.12: Rovina a kvadrika $(p - r)(pq - q^2 + pr + qr - p - r + 1) = 0$ jako množina bodů P s patami kolmic na hranách prostorového čtyřúhelníku, ležícími v jedné rovině

K, L, M, N ležely v jedné rovině je následující:

```
Use R:=Q[abcdefghijklmnopqrk[1..3]l[1..3]m[1..3]n[1..3]tuv];
I:=Ideal(p-k[1],l[2](b-a)-c(l[1]-a),(p-l[1])(b-a)+c(q-l[2]),
(d-b)(m[2]-c)-(e-c)(m[1]-b),(e-c)m[3]-(m[2]-c)f,(m[1]-b)f-m[3]
(d-b),(p-m[1])(d-b)+(q-m[2])(e-c)+(r-m[3])f,dn[2]-en[1],dn[3]-
fn[1],fn[2]-en[3],[p-n[1]d+(q-n[2])e+(r-n[3])f,a-1,b,c-1,d,e,
f-1,-p^2q+pq^2-p^2r-q^2r+pr^2+qr^2+p^2-r^2-p+r,(k[1]l[2]m[3]-
l[2]m[3]n[1]-k[1]m[3]n[2]+l[1]m[3]n[2]-k[1]l[2]n[3]+l[2]m[1]
n[3]+k[1]m[2]n[3]-l[1]m[2]n[3])t-1]);
NF(1,I);
```

Odpověď $NF=0$ bezprostředně následuje.

Poznámky:

1) V souvislosti s právě uvedeným zobecněním vzniká otázka: ze šesti hran čtyřstěnu je možno sestavit tři prostorové čtyřúhelníky. Jaký je vztah odpovídajících ploch vzhledem k těmto třem možnostem, obr. 4.12?

2) Při shora uvedeném zobecnění není podstatné, že čtyři hrany tvoří prostorový čtyřúhelník. Mohli bychom rovněž vyšetřovat čtyři mimoběžné přímky a, b, c, d a ptát se na případ, kdy paty kolmic K, L, M, N vzhledem k bodu P leží v jedné rovině. Nyní je zajímavé vědět, zda je rozdíl, pokud dané přímky generují regulus či ne.

3) Na obr. 4.12 se příslušná kubická plocha rozkládá na kvadriku a rovinu. V jiných případech např. $a = 1, b = 1, c = 1, d = 0, e = 0, f = 1$ dostaneme nerozložitelnou kubiku. Proč? \square

Wallace-Simsonova věta byla v minulosti několikrát zobecněna. Dvě právě popsaná zobecnění W. – S. věty byla založena na výsledcích v komutativní algebře v poslední třetině dvacátého století. S tímto zobecněním je spjata řada otázek jako např. výpočetní složitost, díky které jsme nebyli schopni dokázat věty ve tvaru nutných a postačujících podmínek. Výpočetní složitost rovněž brání dalšímu zobecnění, např. možnost volby libovolných směrů při promítání bodu P nebo zkoumání objemu čtyřstěnu ve druhém zobecnění.

Možné je rovněž projektivní rozšíření uvedeného zobecnění či syntetický přístup.

Kapitola 5

Příčky v mnohoúhelníku

V řadě úloh elementární geometrie jsou vyšetřovány vlastnosti příček mnohoúhelníků jako jsou výšky, těžnice, osy stran, osy úhlů apod. Mezi nejznámější věty, které se zabývají vlastnostmi příček patří Cevaova a Menelaova věta. Další vlastnosti příček zkoumá Eulerova věta. V této kapitole se budeme zabývat uvedenými větami a jejich zobecněním jednak v rovině, jednak v prostoru. Vlastnosti příček budeme zkoumat pomocí počítače. Touto metodou nalezneme i některé další - dosud neznámé vztahy. Často se budeme snažit vlastnosti příček odvodit či objevit, abychom je posléze dokázali. Většina úloh je dokázána i klasickým způsobem. K tomu slouží velmi účinná areální metoda, která je založena na poměru obsahů trojúhelníků.

Na následujících stránkách byl učiněn pokus shromáždit problematiku tohoto typu do jednoho celku.

K popisu geometrických vlastností objektu je možno v některých případech použít jednodušší *afinní* soustavu souřadnic (někdy se též užívá pojem *lineární* soustava souřadnic). Většinou se jedná o polohové úlohy, při nichž vyšetřujeme vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin, vlastnosti, při kterých se zachovává dělicí poměr a další vlastnosti, které z pojmu dělicí poměr vycházejí, např. poměr délek stran, poměr obsahů trojúhelníků apod. Při užití afinních souřadnic "ušetříme" v rovině jednu proměnnou, v třírozměrném prostoru dvě proměnné atd. Tuto možnost oceníme, pokud je výpočet složitý a proměnných je příliš mnoho. Pokud je geometrická vlastnost invariantní vůči podobnosti, můžeme zvolit na osách afinní soustavy souřadnic vhodné délky základních vektorů, a tím se "zbavit" dalších proměnných.

5.1 Cevova věta

V této části uvedeme větu, která je velmi užitečná a jejíž důkaz není obtížný. Jedná se o *Cevovu větu* (čti Čevovu), kterou publikoval v roce 1678 italský matematik Giovanni Ceva (1648-1734). Cevovu větu budeme formulovat pomocí dělicího poměru. Proto bude vhodné nejprve dělicí poměr připomenout. Jsou-li A, B, C tři body ležící na přímce, $A \neq B$, potom *dělicím poměrem bodu* $C \neq B$ *vzhledem k bodům* A, B , nazveme takové reálné číslo λ , pro které platí $C - A = \lambda(C - B)$. Značíme $\lambda = (ABC)$.

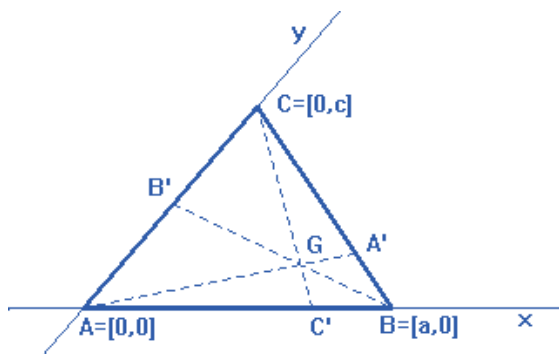
Cevova věta zní:

Je dán trojúhelník ABC a tři body A', B', C' po řadě na stranách BC, AC, AB nebo jejich prodloužení. Potom přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem (který může být nevlastní) právě když

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1. \quad (5.1)$$

Označme $l_1 = (ABC')$ dělicí poměr bodu C' vzhledem k bodům A, B . Analogicky označme $l_2 = (BCA')$ a $l_3 = (CAB')$. Místo $l_1 = (ABC')$ můžeme psát $l_1(C' - B) = C' - A$, místo $l_2 = (BCA')$ píšeme $l_2(A' - C) = A' - B$ a místo $l_3 = (CAB')$ píšeme $l_3(B' - A) = B' - C$. Předpokládejme, že $G = [g_1, g_2]$ je společný bod přímk AA', BB', CC' . Pokusíme se vztah (5.1) nejprve "objevit" (a poté dokázat).

Zvolme afinní soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [0, c], A' = [p, q], B' = [0, r], C' = [s, 0]$, obr. 5.1. Z definice dělicího poměru plynou rovnice



Obrázek 5.1: Přímky AA', BB', CC' se protínají v jednom bodě

$l_1(s - a, 0) = (s, 0)$, $l_2(p, q - c) = (p - a, q)$, $l_3(0, r) = (0, r - c)$. Odtud plynou následující předpoklady:

$$(ABC') = l_1 \Leftrightarrow h_1 : l_1(s - a) - s = 0,$$

$$\begin{aligned}
(BCA') = l_2 &\Leftrightarrow h_2 : l_2 p - p + a = 0 \wedge h_3 : l_2 (q - c) - q = 0, \\
(CAB') = l_3 &\Leftrightarrow h_4 : l_3 r - r + c = 0, \\
G \in AA' &\Leftrightarrow h_5 : qg_1 - pg_2 = 0, \\
G \in BB' &\Leftrightarrow h_6 : rg_1 + ag_2 - ar = 0, \\
G \in CC' &\Leftrightarrow h_7 : cg_1 + sg_2 - sc = 0.
\end{aligned}$$

Nejprve předpokládejme, že přímky AA' , BB' , CC' procházejí bodem G . Chceme dokázat, že potom platí (5.1). Podmínku (5.1) *odvodíme* z daných předpokladů. V ideálu I , který obsahuje polynomy h_1, \dots, h_7 budeme eliminovat všechny proměnné, kromě vstupních nezávislých proměnných a, c a proměnných l_1, l_2, l_3 , které označují dělicí poměry. V ideálu I eliminujeme proměnné p, q, r, s, g_1, g_2 .

```

Use R:=Q[acpqrsg[1..2]l[1..3]];
I:=Ideal(1[1](s-a)-s,l[2]p-p+a,l[2](q-c)-q,l[3]r-r+c,qg[1]-pg[2],
rg[1]+ag[2]-ar,cg[1]+sg[2]-sc);
Elim(p..g[2],I);

```

Vychází jediný polynom $ac(l_1 l_2 l_3 + 1)$. Předpokládejme, že $a \neq 0, c \neq 0$, tj. v trojúhelníku ABC je $A \neq B, A \neq C$ a zkoumejme, zdali $l_1 l_2 l_3 + 1 = 0$ je hledaná podmínka.

```

Use R:=Q[acpqrsg[1..2]l[1..3]t];
I:=Ideal(1[1](s-a)-s,l[2]p-p+a,l[2](q-c)-q,l[3]r-r+c,qg[1]-pg[2],
rg[1]+ag[2]-ar,act-1,cg[1]+sg[2]-sc);
NF(1[1]l[2]l[3]+1,I);

```

Normální forma je rovna 0 a implikace platí.

Obdobně dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že pro body A', B', C' platí podmínka (5.1). Chceme dokázat, že přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem. Předpokládejme, že G je společný bod přímek AA', BB' . Dokážeme, že G leží také na přímce CC' , tj. že platí $cg_1 + sg_2 - sc = 0$. Dále předpokládáme, na základě předchozí implikace, že $ac \neq 0$.

```

Use R:=Q[acpqrsg[1..2]l[1..3]t];
I:=Ideal(1[1](s-a)-s,l[2]p-p+a,l[2](q-c)-q,l[3]r-r+c,qg[1]-pg[2],
rg[1]+ag[2]-ar,act-1,l[1]l[2]l[3]+1);
NF(cg[1]+sg[2]-sc,I);

```

Vyjde $NF=0$. Tvrzení Cevovy věty je tímto dokázáno (a objeveno).

Poznámky:

1) Podmínka (5.1) se často uvádí též ve tvaru

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = 1, \quad (5.2)$$

kde $\|AC'\|$ značí *orientovanou vzdálenost* bodů A, C' atd. Orientovaná vzdálenost $\|XY\|$ bodů XY nebo též *orientovaná délka* úsečky XY je (neorientovaná) vzdálenost $|XY|$, opatřená znaménkem $+$ nebo $-$. Prohlásíme-li na přímce XY směr (orientaci) od X do Y za *kladný*, potom je $\|XY\| = |XY|$ a $\|YX\| = -|XY|$. V každém případě platí $\|XY\| = -\|YX\|$. Je-li např. Z vnitřní bod úsečky XY , potom je poměr $\|XZ\|/\|ZY\|$ kladný, leží-li bod Z vně úsečky XY potom je poměr $\|XZ\|/\|ZY\|$ záporný.

2) Vyjádření (5.1) pomocí dělicího poměru je pro důkaz pomocí počítače vhodnější. V analytickém zápisu dělicího poměru se totiž vyskytují pouze polynomy 1. stupně, na rozdíl od vzdálenosti, kde se vyskytují odmocniny a součty druhých mocnin.

3) Vztahy (5.1) a (5.2) jsou ekvivalentní neboť

$$(ABC') = -\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|}, \quad (BCA') = -\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|}, \quad (CAB') = -\frac{\|CB'\|}{\|B'A\|}.$$

□

Často se setkáváme se situací, kdy potřebujeme rozhodnout, zda nějaké tři příčky v trojúhelníku procházejí společným bodem. Cevova věta je prostředkem, který umožňuje rychlé řešení. Stačí pouze ukázat, že pro dělicí poměry l_1, l_2, l_3 platí vztah (5.1) nebo (5.2). Uvedeme několik příkladů:

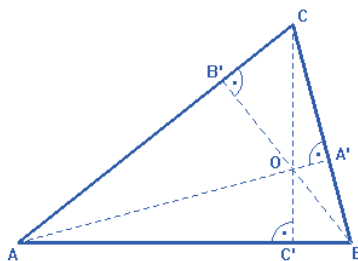
a) Těžnice trojúhelníka mají společné těžiště, neboť dělicí poměr středu strany je roven -1 . Tedy $l_1 = l_2 = l_3 = -1$ a $l_1 l_2 l_3 = -1$.

b) Osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě – ve středu kružnice vepsané, neboť osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníka ve stejném poměru jako je poměr přilehlých stran. Tedy $l_1 = -a/b, l_2 = -b/c, l_3 = -c/a$, kde a, b, c jsou délky stran $\triangle ABC$. Odtud opět $l_1 l_2 l_3 = -1$.

c) Skutečnost, že se výšky trojúhelníka protínají v jednom bodě, lze nahlédnout podle Cevovy věty takto, obr. 5.2. Trojúhelníky ACA' a BCB' jsou podobné, proto $\frac{|CB'|}{|A'C|} = \frac{|BB'|}{|AA'|}$. Obdobně platí $\frac{|AC'|}{|B'A|} = \frac{|CC'|}{|BB'|}$, $\frac{|BA'|}{|C'B|} = \frac{|AA'|}{|CC'|}$. Odtud

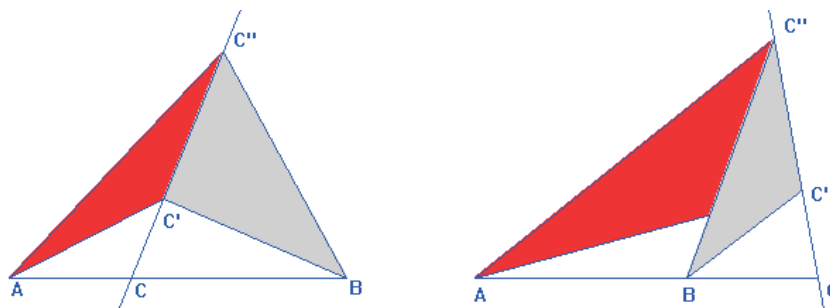
$$\begin{aligned} \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} &= \frac{\|CB'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|AC'\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|C'B\|} = \\ &= \frac{\|BB'\|}{\|AA'\|} \cdot \frac{\|CC'\|}{\|BB'\|} \cdot \frac{\|AA'\|}{\|CC'\|} = 1. \end{aligned}$$

Nyní ukážeme klasický důkaz Cevovy věty. Místo podmínky (5.1) budeme uvažovat podmínku (5.2). Větu dokážeme pomocí tzv. *areální metody* [31], ve které se používají poměry obsahů trojúhelníků. Využijeme známé skutečnosti,



Obrázek 5.2: Výšky trojúhelníka procházejí týmž bodem

že mají-li dva trojúhelníky společnou základnu, potom poměr jejich obsahů je roven poměru odpovídajících výšek, obr. 5.3. Poměr (neorientovaných) délek



Obrázek 5.3: Areální metoda

$|AC'|/|C'B|$ je roven poměru obsahů trojúhelníků $C'CA$ a $C''CB$, kde C', C'' jsou dva *libovolné* body přímky, která prochází bodem C . Poměr obsahů trojúhelníků $C'CA$, $C''CB$ je totiž roven poměru jejich výšek na společnou základnu $C'C''$ a ten je roven poměru délek $|AC'|/|C'B|$.

Takto můžeme dokonce vyjádřit i dělicí poměr (ABC) nebo poměr orientovaných délek $\|AC'\|/\|C'B\|$, musíme ovšem místo obsahu použít tzv. *orientovaný* obsah. Orientovaný obsah trojúhelníka ABC je kladný, postupujeme-li po obvodu trojúhelníka od vrcholu A do B a C proti směru hodinových ručiček, tj. ve směru kladném. Postupujeme-li od A do B a C ve směru hodinových ručiček, orientovaný obsah trojúhelníka ABC bude záporný.

Poměr orientovaných obsahů trojúhelníků $C'CA$ a $C''CB$ na obrázku 5.3 vlevo je roven dělicímu poměru (ABC) . Obsah $\triangle C'CA$ je totiž *kladný*, protože se při pohybu po obvodu trojúhelníka z C' do C'' a dále do A pohybujeme proti směru hodinových ručiček. Naproti tomu orientovaný obsah trojúhelníka

$C'C''B$ je *záporný*, neboť při pohybu z C' do C'' a do B se pohybujeme ve směru hodinových ručiček. Výsledný poměr obsahů trojúhelníků $C'C''A$, $C'C''B$ je tedy záporné číslo, což je v souladu s dělicím poměrem (ABC) , protože bod C je *vnitř* úsečky AB . Na obr. 5.3 vpravo mají oba trojúhelníky $C'C''A$, $C'C''B$ kladný obsah a tedy i poměr obsahů trojúhelníků $C'C''A$, $C'C''B$ je kladný, což je v souladu s polohou bodu C , který je *vně* úsečky AB a dělicí poměr (ABC) je kladný. Obsah trojúhelníka ABC budeme značit $|ABC|$, zatímco orientovaný obsah $\|ABC\|$.

Vraťme se nyní ke klasickému důkazu Cevovy věty. Nejprve předpokládejme, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v bodě G . V našem případě podle areální metody platí, obr. 5.1:

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} = \frac{\|CAG\|}{\|BCG\|},$$

kde $\|AC'C\|$ značí orientovaný obsah trojúhelníka $AC'C$, atd. Obdobně se ukáže, že platí

$$\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} = \frac{\|ABG\|}{\|CAG\|} \quad \text{a} \quad \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = \frac{\|BCG\|}{\|ABG\|}.$$

Tedy

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = \frac{\|CAG\|}{\|BCG\|} \cdot \frac{\|ABG\|}{\|CAG\|} \cdot \frac{\|BCG\|}{\|ABG\|} = 1.$$

Ukázali jsme, že (5.2) je podmínka nutná.

Nyní ukážeme, že podmínka (5.2) je i postačující, tj. že z platnosti (5.2) plyne, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v jednom bodě. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že platí (5.2) a dále předpokládejme, že se přímky AA' , BB' , CC' v jednom bodě neprotínají. Nechť AA' , BB' se protínají v bodě G . Bodem G vedeme přímkou CG , která protíná stranu AB v bodě $C'' \neq C'$. Podle první, dokázané části věty, aplikované na přímky AA' , BB' , CC'' platí

$$\frac{\|AC''\|}{\|C''B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = 1.$$

Porovnání s předpokladem (5.2) dává

$$\frac{\|AC''\|}{\|C''B\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|}.$$

Odtud $C' = C''$ a to je spor. □

Poznámka:

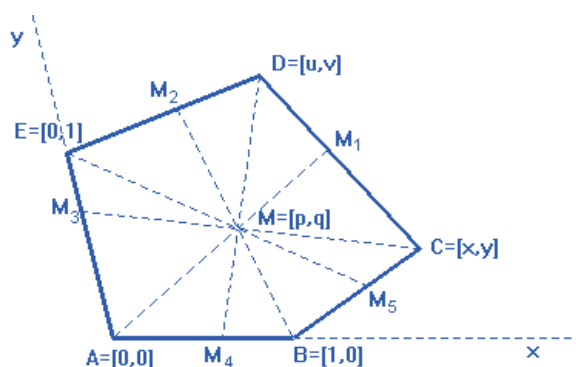
Cevovu větu jsme dokázali pro případ, kdy společný bod G přímk AA' , BB' , CC' je vlastním bodem. V případě, že jsou přímky AA' , BB' , CC' navzájem rovnoběžné bychom postupovali obdobným způsobem. \square

5.1.1 Zobecnění Cevovy věty

Zabývejme se zobecněním Cevovy věty na rovinný pětiúhelník [32].

Nechť $ABCDE$ je rovinný pětiúhelník a nechť M je libovolný bod roviny pětiúhelníka. Označme po řadě M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 průsečíky přímk AM, BM, CM, DM, EM se stranami CD, DE, EA, AB, BC nebo jejich prodloužením. Jaký vztah platí mezi dělicími poměry $(CDM_1), (DEM_2), (EAM_3), (ABM_4), (BCM_5)$?

Zvolme afinní soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$, $E = [0, 1]$, $M_1 = [k_1, k_2]$, $M_2 = [l_1, l_2]$, $M_3 = [0, m_2]$, $M_4 = [n_1, 0]$, $M_5 = [o_1, o_2]$, $M = [p, q]$, obr. 5.4. Uvažované dělicí poměry označíme $d_1 =$



Obrázek 5.4: Cevova věta pro pětiúhelník

$(CDM_1), d_2 = (DEM_2), d_3 = (EAM_3), d_4 = (ABM_4), d_5 = (BCM_5)$. Platí následující vztahy:

$M_1 \in CD \Leftrightarrow h_1 : k_1 y + x v + k_2 u - y u - k_1 v - k_2 x = 0, M_2 \in DE \Leftrightarrow h_2 : l_1 v + u - l_1 - l_2 u = 0, M_5 \in BC \Leftrightarrow h_3 : y + o_2 x - o_1 y - o_2 = 0, d_4 = (ABM_4) \Leftrightarrow h_4 : d_4(n_1 - 1) - n_1 = 0, d_5 = (BCM_5) \Leftrightarrow h_5 : d_5(o_1 - x) - o_1 + 1 = 0 \wedge h_6 : d_5(o_2 - y) - o_2 = 0, d_1 = (CDM_1) \Leftrightarrow h_7 : d_1(k_1 - u) - k_1 + x = 0 \wedge h_8 : d_1(k_2 - v) - k_2 + y = 0, d_2 = (DEM_2) \Leftrightarrow h_9 : d_2 l_1 - l_1 + u = 0 \wedge h_{10} : d_2(l_2 - 1) - l_2 + v = 0, d_3 = (EAM_3) \Leftrightarrow h_{11} : d_3 m_2 - m_2 + 1 = 0, M \in AM_1 \Leftrightarrow h_{12} : k_1 q - k_2 p = 0, M \in BM_2 \Leftrightarrow h_{13} : l_2 + l_1 q - l_2 p - q = 0, M \in CM_3 \Leftrightarrow h_{14} : p y + m_2 x - m_2 p - q x = 0, M \in DM_4 \Leftrightarrow h_{15} : p v + n_1 q - n_1 v - u q =$

$$0, M \in EM_5 \Leftrightarrow h_{16} : p + o_1q - o_1 - o_2p = 0.$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{16})$ postupně eliminujeme všechny proměnné kromě d_1, d_2, \dots, d_5 . Tj. nejprve eliminujeme proměnné k_1, k_2, l_1, l_1 ze všech výrazů, které tyto proměnné obsahují. K získanému eliminačnímu ideálu přidáme polynomy, které obsahují proměnné $m_1, m_2, n_1, n_2, o_1, o_2$ a tyto proměnné eliminujeme. Nakonec eliminujeme zbylé proměnné x, y, u, v, p, q . Dostaneme podmínku

$$(CDM_1) \cdot (DEM_2) \cdot (EAM_3) \cdot (ABM_4) \cdot (BCM_5) = -1. \quad (5.3)$$

Při ověřování, zda nalezená podmínka (5.3) vyhovuje zadání, narazíme na případ $p + q = 1$, tj. body B, E, M leží v přímce, $M_2 = E$ a dělicí poměr DEM_2 není definován. Tento případ je nutno vyloučit.

```
Use R:=Q[xyuvpqr][1..2]l[1..2]m[1..2]n[1..2]o[1..2]d[1..5]tr;
I:=Ideal(k[1]y+xv+k[2]u-yu-k[1]v-k[2]x,l[1]v+u-1[1]-1[2]u,
d[1](k[1]-u)-k[1]+x,d[1](k[2]-v)-k[2]+y,l[2]+1[1]q-1[2]p-q,
d[2]l[1]-1[1]+u,d[2](l[2]-1)-1[2]+v,k[1]q-k[2]p,y+o[2]x-o[1]y
-o[2],d[4](n[1]-1)-n[1],d[5](o[1]-x)-o[1]+1,d[5](o[2]-y)-o[2],
d[3]m[2]-m[2]+1,py+m[2]x-m[2]p-qx,pv+n[1]q-n[1]v-uq,p+o[1]q-
o[1]-o[2]p,(p+q-1)r-1,(d[1]d[2]d[3]d[4]d[5]+1)t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď 0 dokazuje následující zobecnění Cevovy věty [32]:

Nechť $ABCDE$ je rovinný pětiúhelník a necht M je libovolný bod roviny pětiúhelníka. Necht M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 jsou po řadě průsečky přímk AM, BM, CM, DM, EM se stranami CD, DE, EA, AB, BC . Potom platí

$$(ABM_4) \cdot (BCM_5) \cdot (CDM_1) \cdot (DEM_2) \cdot (EAM_3) = -1. \quad (5.4)$$

Poznámka:

Podmínka (5.4) je ekvivalentní podmínce

$$\frac{\|AM_4\|}{\|M_4B\|} \cdot \frac{\|BM_5\|}{\|M_5C\|} \cdot \frac{\|CM_1\|}{\|M_1D\|} \cdot \frac{\|DM_2\|}{\|M_2E\|} \cdot \frac{\|EM_3\|}{\|M_3A\|} = 1. \quad (5.5)$$

□

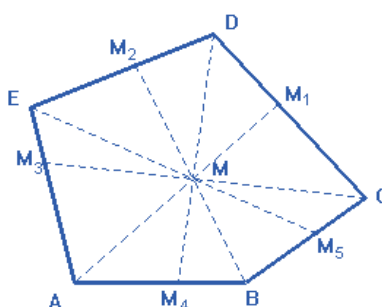
Je zřejmé, že věta obrácená k právě vyslovené větě pro pětiúhelník na rozdíl od Cevovy věty pro trojúhelník, neplatí. Analogii vyslovíme v poněkud slabší formě, viz [32]:

Procházejí-li čtyři příčky AM_1, BM_2, CM_3, DM_4 pětiúhelníka $ABCDE$ bodem

M a platí-li (5.3), potom prochází tímto bodem i příčka EM_5 .

Důkaz pomocí počítače je obdobný důkazu Cevovy věty pro trojúhelník. Při stejném značení stačí ukázat, že polynom $h_{16} : p + o_1q - o_1 - o_2p$ je prvkem ideálu $J = (h_1, h_2, \dots, h_{15})$. Za předpokladu, že $y \neq 0$, tj. vrcholy A, B, C nejsou kolineární, vyjde $NF(h_{16}, J) = 0$.

Klasický důkaz Cevovy věty pro pětiúhelník provedeme pomocí areální metody. Předpokládejme, že M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 jsou po řadě průsečíky přímk AM, BM, CM, DM, EM se stranami CD, DE, EA, AB, BC pětiúhelníka $ABCDE$, obr. 5.5. Platí



Obrázek 5.5: Cevova věta pro pětiúhelník - klasický důkaz

$$\frac{\|AM_4\|}{\|M_4B\|} = \frac{\|DAM\|}{\|BDM\|}, \quad \frac{\|BM_5\|}{\|M_5C\|} = \frac{\|EBM\|}{\|CEM\|}, \quad \frac{\|CM_1\|}{\|M_1D\|} = \frac{\|ACM\|}{\|DAM\|},$$

$$\frac{\|DM_2\|}{\|M_2E\|} = \frac{\|BDM\|}{\|EBM\|}, \quad \frac{\|EM_3\|}{\|M_3A\|} = \frac{\|CEM\|}{\|ACM\|}.$$

Tedy dostaneme

$$\frac{\|AM_4\|}{\|M_4B\|} \cdot \frac{\|BM_5\|}{\|M_5C\|} \cdot \frac{\|CM_1\|}{\|M_1D\|} \cdot \frac{\|DM_2\|}{\|M_2E\|} \cdot \frac{\|EM_3\|}{\|M_3A\|} =$$

$$\frac{\|DAM\|}{\|BDM\|} \cdot \frac{\|EBM\|}{\|CEM\|} \cdot \frac{\|ACM\|}{\|DAM\|} \cdot \frac{\|BDM\|}{\|EBM\|} \cdot \frac{\|CEM\|}{\|ACM\|} = 1,$$

což je podmínka (5.5). Věta je dokázána.

Poznámka:

Právě dokázaná věta je speciálním případem věty, kterou publikovali v roce 1995 B. Grünbaum a G.C. Shephard v [32]. \square

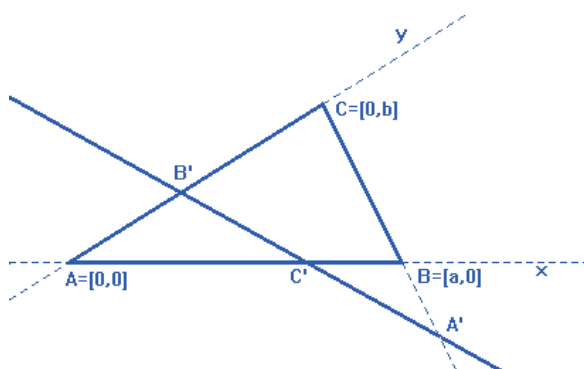
5.2 Menelaova věta

Menelaova věta (Menelaos, 1. stol. n.l.) je známou větou elementární geometrie v rovině. Její znění je následující:

Nechť A', B', C' jsou po řadě tři body na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC . Potom body A', B', C' leží na jedné přímce právě když platí

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1. \quad (5.6)$$

K tomu, abychom větu dokázali, zvolme afinní systém souřadnic takto: $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [0, b], A' = [p, q], B' = [0, r], C' = [s, 0]$, obr. 5.6. Dále



Obrázek 5.6: Menelaova věta

označme $l_1 = (ABC')$ dělicí poměr bodu C' vzhledem k bodům A, B a analogicky $l_2 = (BCA')$ a $l_3 = (CAB')$. Odtud dostaneme podmínky $h_1 : l_1(s - a) - s = 0$, $h_2 : l_2p - p + a = 0$, $h_3 : l_2(q - b) - q = 0$, $h_4 : l_3r - r + b = 0$. Ukážeme, že (5.6) je podmínka nutná. Body A', B', C' jsou kolineární právě když platí $h_5 : pr + qs - rs = 0$. Závěr tvrzení má tvar $c : l_1l_2l_3 - 1 = 0$. Předpokládejme ještě, že $ab \neq 0$. Normální forma polynomu c vzhledem k ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$

```
Use R ::= Q[abrspql[1..3]t];
I:=Ideal(1[1](s-a)-s,1[2]p-p+a,1[2](q-b)-q,1[3]r-r+b,abt-1,
pr+qs-rs);
NF(1[1]1[2]1[3]-1,I);
```

je rovna nule, tedy (5.6) je podmínka nutná. Obdobně se ukáže, že (5.6) je i podmínka postačující. Menelaova věta je dokázána. \square

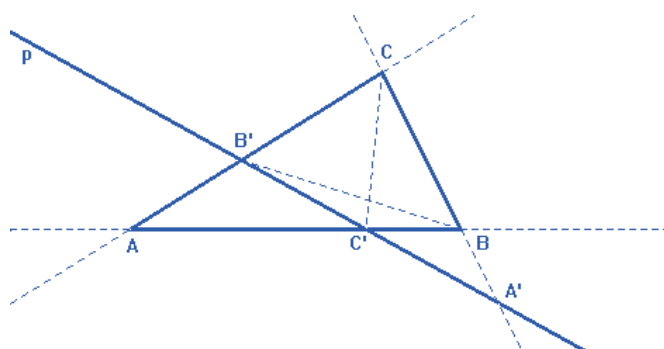
Poznámka:

Podmínka (5.6) se uvádí též ve tvaru

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = -1. \quad (5.7)$$

kde $\|XY\|$ značí *orientovanou vzdálenost* bodů XY . □

Ukažme si nyní klasický důkaz, který provedeme pomocí areální metody, obr. 5.7. Předpokládejme, že přímka p protíná strany trojúhelníka AB, BC, CA po řadě v bodech C', A', B' . Ukážeme, že potom platí (5.7). Uvažované poměry z



Obrázek 5.7: Důkaz Menelaovy věty pomocí areální metody

(5.7) vyjádříme pomocí poměrů obsahů trojúhelníků $B'C'A, B'C'B$ a $B'C'C$. Všimněte si, že všechny tři trojúhelníky mají společnou stranu $B'C'$. Platí

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} = \frac{\|C'B'A\|}{\|B'C'B\|},$$

kde $\|AC'B'\|$ značí orientovaný obsah trojúhelníka $AC'B'$ atd. Podobně platí

$$\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} = \frac{\|B'C'B\|}{\|C'B'C\|} \quad \text{a} \quad \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = \frac{\|B'C'C\|}{\|C'B'A\|}.$$

Odtud

$$\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = \frac{\|C'B'A\|}{\|B'C'B\|} \cdot \frac{\|B'C'B\|}{\|C'B'C\|} \cdot \frac{\|B'C'C\|}{\|C'B'A\|} = -1.$$

Obráceně lze pomocí důkazu sporem, obdobně jako u Cevovy věty, dokázat, že z platnosti (5.7) plyne, že body A', B', C' jsou kolineární. □

Poznámka:

1) Všimněte si, že použijeme-li ve vzorcích (5.2) a (5.7) místo orientovaných délek délky neorientované, potom nutná podmínka pro obě věty, Cevovu i Menelaovu, zní stejně, totiž

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1. \quad (5.8)$$

Podmínka (5.8) je postačující pro to, aby se přímky AA', BB', CC' protínaly v jednom bodě *nebo* aby body A', B', C' ležely na jedné přímce. K tomu, abychom obě věty odlišili potřebujeme jemnější vyjádření než (5.8). Proto jsme použili vyjádření pomocí dělicího poměru nebo orientovaných délek. Zatímco dělicí poměr určuje polohu bodu na přímce jednoznačně, vyjádření pomocí poměru vzdáleností jednoznačné není. Platí totiž $|(ABC')| = \frac{|AC'|}{|C'B|}$.

2) Pomocí Cevovy a Menelaovy věty lze dokázat např. Pappovu, Desarguesovu či Pascalovu větu, které jsou základními větami projektivní geometrie, viz [5].

□

5.2.1 Zobecnění Menelaovy věty

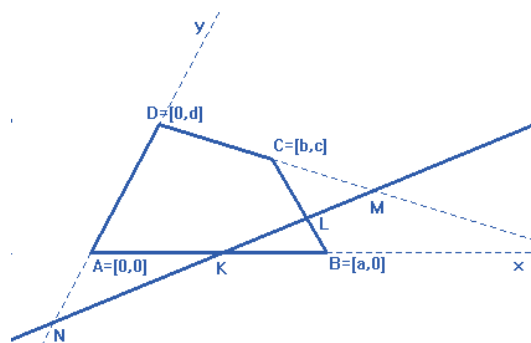
Zobecnění Menelaovy věty provedeme dvojitým způsobem. Nejprve si ukážeme její zobecnění pro rovinný čtyřúhelník. Ve druhé části této kapitoly Menelaovu větu zobecníme na prostorový čtyřúhelník. Budeme řešit následující problém:

Je dán rovinný čtyřúhelník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA nebo na jejich prodloužení po řadě body K, L, M, N . Předpokládejme, že body K, L, M, N jsou kolineární. Určete jakou podmínku splňují dělicí poměry $(ABK), (BCL), (CDM), (DAN)$.

Označme $p_1 = (ABK), p_2 = (BCL), p_3 = (CDM), p_4 = (DAN)$ a zaveďme afinní soustavu souřadnic tak, aby $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [b, c], D = [0, d], K = [k_1, 0], L[l_1, l_2], M = [m_1, m_2], N = [0, n_2]$, obr. 5.8. Situaci můžeme analyticky popsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} L \in BC &\Leftrightarrow h_1 : l_1c + l_2a - ac - l_2b = 0, M \in CD \Leftrightarrow h_2 : m_1c + bd - m_1d - m_2b = 0, \\ p_1 = (ABK) &\Leftrightarrow h_3 : p_1(k_1 - a) - k_1 = 0, p_2 = (BCL) \Leftrightarrow h_4 : p_2(l_1 - b) - l_1 + a = 0 \wedge \\ h_5 : p_2(l_2 - c) - l_2 &= 0, p_3 = (CDM) \Leftrightarrow h_6 : p_3m_1 - m_1 + b = 0 \wedge \\ h_7 : p_3(m_2 - d) - m_2 + c &= 0, p_4 = (DAN) \Leftrightarrow h_8 : p_4n_2 - n_2 + d = 0, \\ K, L, M, N \text{ jsou kolineární} &\Leftrightarrow h_9 : k_1l_2 + l_1m_2 - l_2m_1 - k_1m_2 = 0 \wedge \\ h_{10} : k_1l_2 + l_1n_2 - k_1n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminací všech proměnných kromě $a, b, c, d, p_1, p_2, p_3, p_4$ v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{10})$ dostaneme podmínku $ac(p_1p_2p_3p_4 - 1) = 0$. Předpokládejme, že $ac \neq 0$, tj. $A \neq B$ a A, B, C nejsou kolineární. Potom



Obrázek 5.8: Menelaova věta pro čtyřúhelník

```

Use R ::= Q[abcdk[1..2]l[1..2]m[1..2]n[1..2]p[1..4]t];
I := Ideal(1[1]c+1[2]a-ac-1[2]b,m[1]c+bd-m[1]d-m[2]b,p[1](k[1]-a)
-k[1],p[2](1[1]-b)-1[1]+a,p[2](1[2]-c)-1[2],p[3]m[1]-m[1]+b,p[3]
(m[2]-d)-m[2]+c,p[4]n[2]-n[2]+d,k[1]l[2]+1[1]m[2]-1[2]m[1]-k[1]
m[2],k[1]l[2]+1[1]n[2]-k[1]n[2],ac(p[1]p[2]p[3]p[4]-1)t-1);
NF(1,I);

```

normální forma polynomu $p_1 p_2 p_3 p_4 - 1$ je rovna nule. Dokázali (a znovuobjevili) jsme následující zobecnění Menelaovy věty pro čtyřúhelník v rovině [32]:

Je dán rovinný čtyřúhelník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA nebo na jejich prodloužení po řadě body K, L, M, N . Předpokládejme, že body K, L, M, N jsou kolineární. Potom platí

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CDM) \cdot (DAN) = 1. \quad (5.9)$$

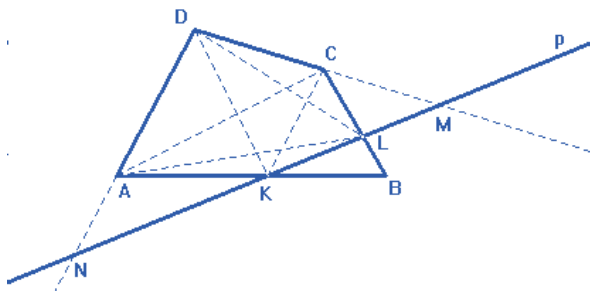
Také rovnost (5.9) dokážeme klasickým způsobem pomocí areální metody. Zároveň naznačíme způsob jak dokázat analogii Menelaovy věty pro libovolný n -úhelník. Přitom si uvědomíme "sílu" areální metody.

Budeme předpokládat, že přímka p protíná strany AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka po řadě v bodech K, L, M, N , obr. 5.9. Dokážeme, že potom platí

$$\frac{\|AK\|}{\|KB\|} \cdot \frac{\|BL\|}{\|LC\|} \cdot \frac{\|CM\|}{\|MD\|} \cdot \frac{\|DN\|}{\|NA\|} = 1. \quad (5.10)$$

Platí vztahy

$$\frac{\|AK\|}{\|KB\|} = -\frac{\|KLA\|}{\|KLB\|}, \quad \frac{\|BL\|}{\|LC\|} = -\frac{\|KLB\|}{\|KLC\|},$$



Obrázek 5.9: Menelaova věta pro čtyřúhelník

$$\frac{\|CM\|}{\|MD\|} = \frac{\|KLC\|}{\|KLD\|}, \quad \frac{\|DN\|}{\|NA\|} = \frac{\|KLD\|}{\|KLA\|}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\|AK\|}{\|KB\|} \cdot \frac{\|BL\|}{\|LC\|} \cdot \frac{\|CM\|}{\|MD\|} \cdot \frac{\|DN\|}{\|NA\|} = \frac{\|KLA\|}{\|KLB\|} \cdot \frac{\|KLB\|}{\|KLC\|} \cdot \frac{\|KLC\|}{\|KLD\|} \cdot \frac{\|KLD\|}{\|KLA\|} = 1.$$

Poznámka:

Vztah (5.9) je speciálním případem věty, kterou publikovali B. Grünbaum a G.C. Shephard v roce 1995, viz [32]. \square

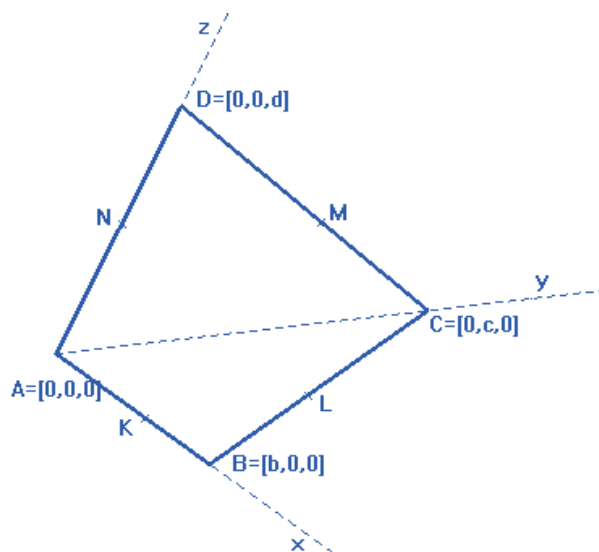
5.2.2 Zobecnění Menelaovy věty v prostoru

V další části Menelaovu větu zobecníme do prostoru. Zobecnění provedeme pro prostorový čtyřúhelník. Budeme hledat podmínku pro to, aby čtyři body na stranách prostorového čtyřúhelníka $ABCD$ ležely v jedné rovině.

Je dán prostorový čtyřúhelník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA nebo na jejich prodloužení po řadě body K, L, M, N . Najděte nutnou a postačující podmínku pro dělicí poměry $(ABK), (BCL), (CDM), (DAN)$ tak, aby body K, L, M, N ležely v jedné rovině.

Zvolme lineární soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0, 0]$, $B = [b, 0, 0]$, $C = [0, c, 0]$, $D = [0, 0, d]$, $K = [k_1, 0, 0]$, $L = [l_1, l_2, 0]$, $M = [0, m_2, m_3]$, $N = [0, n_2, 0]$, , obr. 5.10. Dělicí poměry označme $p_1 = (ABK)$, $p_2 = (BCL)$, $p_3 = (CDM)$, $p_4 = (DAN)$. Platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} L \in BC &\Leftrightarrow c(l_1 - b) + bl_2 = 0, \\ M \in CD &\Leftrightarrow c(m_3 - d) + dm_2 = 0, \\ p_1 = (ABK) &\Leftrightarrow p_1(k_1 - b) - k_1 = 0, \\ p_2 = (BCL) &\Leftrightarrow p_2 l_1 - l_1 + b = 0 \wedge p_2(l_2 - c) - l_2 = 0, \end{aligned}$$



Obrázek 5.10: Menelaova věta v prostoru

$$p_3 = (CDM) \Leftrightarrow p_3 m_2 - m_2 + c = 0 \wedge p_3 (m_3 - d) - m_3 = 0,$$

$$p_4 = (DAN) \Leftrightarrow p_4 n_3 - n_3 + d = 0,$$

$$K, L, M, N \text{ v jedné rovině} \Leftrightarrow k_1 l_2 m_3 + k_1 m_2 n_3 - k_1 l_2 n_3 - l_1 m_2 n_3 = 0.$$

V programu CoCoA

```
Use R:=Q[bcdk[1..3]l[1..3]m[1..3]n[1..3]p[1..4]];
I:=Ideal(c(l[1]-b)+b*l[2],c(m[3]-d)+d*m[2],p[1](k[1]-b)-k[1],
p[2]l[1]-l[1]+b,p[2](l[2]-c)-l[2],p[3]m[2]-m[2]+c,p[3](m[3]-d)-
m[3],p[4]n[3]-n[3]+d,k[1]l[2]m[3]+k[1]m[2]n[3]-k[1]l[2]n[3]-
l[1]m[2]n[3]);
Elim(k[1]..n[3],I);
```

dostaneme rovnici $bcd(p_1 p_2 p_3 p_4 - 1) = 0$. Za předpokladu, že $bcd \neq 0$ dostáváme jedinou podmínku

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 1. \quad (5.11)$$

Rovnost (5.11) je tedy nutná podmínka pro to, aby body K, L, M, N ležely v jedné rovině.

Ověříme, zda (5.11) je i podmínka postačující.

```
Use R:=Q[bcdk[1..3]l[1..3]m[1..3]n[1..3]p[1..4]t];
I:=Ideal(c(l[1]-b)+b*l[2],c(m[3]-d)+d*m[2],p[1](k[1]-b)-k[1],
p[2]l[1]-l[1]+b,p[2](l[2]-c)-l[2],p[3]m[2]-m[2]+c,p[3](m[3]-d)-
m[3],p[4]n[3]-n[3]+d,k[1]l[2]m[3]+k[1]m[2]n[3]-k[1]l[2]n[3]-
l[1]m[2]n[3],t);
```

$-d) -m[3], p[4]n[3] - n[3] + d, bc dt - 1, p[1]p[2]p[3]p[4] - 1);$
 $NF(k[1]l[2]m[3] + k[1]m[2]n[3] - k[1]l[2]n[3] - l[1]m[2]n[3], I);$

Odpověď 0, tj. podmínka (5.11) je postačující. Dokázali jsme větu:

Je dán prostorový čtyřúhelník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA po řadě body K, L, M, N . Body K, L, M, N leží v jedné rovině právě když platí rovnost

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CDM) \cdot (DAN) = 1. \quad (5.12)$$

Poznámka:

1) Při důkazu předchozí věty pomocí počítače jsme mohli v afinní soustavě souřadnic zadat vrcholy prostorového čtyřúhelníka $ABCD$ takto: $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 0, 0]$, $C = [0, 1, 0]$, $D = [0, 0, 1]$ místo $A = [0, 0, 0]$, $B = [b, 0, 0]$, $C = [0, c, 0]$, $D = [0, 0, d]$.

2) Výrazy typu $p_1 p_2 p_3 p_4$, které se vyskytují v Cevově a Menelaově větě, se nazývají *cyklické součiny*, viz [32]. \square

5.3 Eulerova věta

Následující věta je zobecněním známé vlastnosti těžnic trojúhelníka. Jestliže AA', BB', CC' jsou těžnice v trojúhelníku ABC potom, $|GA'|/|AA'| = |GB'|/|BB'| = |GC'|/|CC'| = 1/3$, tedy platí rovnost

$$\frac{|GA'|}{|AA'|} + \frac{|GB'|}{|BB'|} + \frac{|GC'|}{|CC'|} = 1, \quad (5.13)$$

kde G je těžiště trojúhelníka ABC . Je zajímavé, že uvedená vlastnost platí nejenom pro těžiště, ale pro libovolný *vnitřní* bod G trojúhelníka. Použijeme-li v (5.13) orientované délky, potom věta platí pro *všechny* body roviny trojúhelníka, pro které je vztah definován.

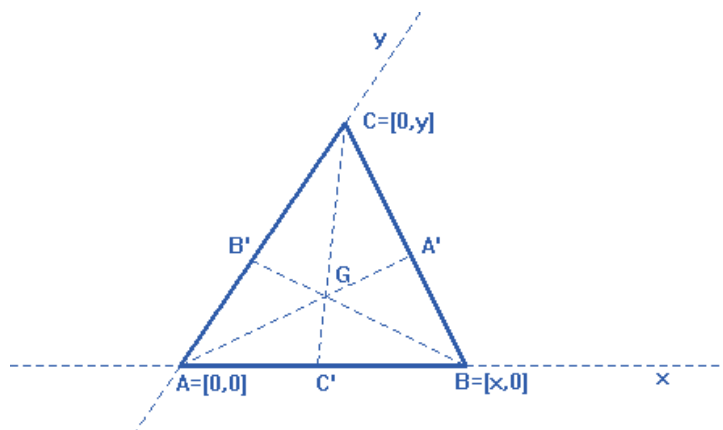
Dokážeme větu, kterou publikoval L. Euler v roce 1812 v [22], která však byla přijata k publikaci již v roce 1780, jak uvádí G.C. Shephard [90].

Eulerova věta zní:

Nechť G je libovolný bod v rovině trojúhelníka ABC a necht přímky AG, BG, CG protínají po řadě strany BC, CA, AB nebo jejich prodloužení v bodech A', B', C' , potom platí

$$\frac{\|GA'\|}{\|AA'\|} + \frac{\|GB'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|GC'\|}{\|CC'\|} = 1. \quad (5.14)$$

Věta skutečně pochází od L. Eulera, viz [22], [30], na rozdíl od [8], kde je uveden jako autor J.D. Gergonne v roce 1818.



Obrázek 5.11: Eulerova věta

Protože tvrzení má tvar součtu, nazývají se výrazy (5.13), (5.14) *cyklické součty*, viz [32]. Protože budeme vyšetřovat poměry délek úseček, je opět vhodné užití afinní soustavy souřadnic, obr. 5.11. Nejprve Eulerovu větu dokážeme pomocí počítače.

Označme $k_1 = \frac{\|GA'\|}{\|AA'\|}$. Potom můžeme podíl orientovaných vzdáleností $\frac{\|GA'\|}{\|AA'\|}$ vyjádřit jako dělicí poměr $k_1 = (GAA')$ a psát $k_1(A' - A) = A' - G$. Analogicky $k_2 = \frac{\|GB'\|}{\|BB'\|} = (GBB')$ a $k_2(B' - B) = B' - G$, $k_3 = \frac{\|GC'\|}{\|CC'\|} = (GCC')$ a $k_3(C' - C) = C' - G$.

Při volbě afinní soustavy souřadnic jako na obr. 5.11 označme $A = [0, 0]$, $B = [x, 0]$, $C = [0, y]$, $A' = [p, q]$, $B' = [0, r]$, $C' = [s, 0]$, $G = [g_1, g_2]$.

Platí $k_1(p, q) = (p - g_1, q - g_2)$, $k_2(-x, r) = (-g_1, r - g_2)$, $k_3(s, -y) = (s - g_1, -g_2)$. Předpoklady jsou

$h_1 : k_1 p - p + g_1 = 0$, $h_2 : k_1 q - q + g_2 = 0$, $h_3 : -k_2 x + g_1 = 0$, $h_4 : k_2 r - r + g_2 = 0$, $h_5 : k_3 s - s + g_1 = 0$, $h_6 : -k_3 y + g_2 = 0$. Dále platí: $A' \in BC \Leftrightarrow h_7 : py + qx - xy = 0$.

Chceme dokázat, že platí $c : k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Pokusíme se formuli (5.14) objevit. V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_7)$ eliminujeme proměnné p, q, r, s, g_1, g_2 .

```
Use R:=Q[xypqrs][1..2]k[1..3];
I:=Ideal(k[1]p-p+g[1],k[1]q-q+g[2],-k[2]x+g[1],k[2]r-r+g[2],
k[3]s-s+g[1],-k[3]y+g[2],py+xq-xy);
Elim(p..g[2],I);
```

Vyjde jediný polynom $xy(k_1 + k_2 + k_3 - 1)$. Budeme předpokládat, že $xy \neq 0$, tj. $A \neq B$, $A \neq C$. Potom

```
Use R:=Q[xypqrs[1..2]k[1..3]t];
I:=Ideal(k[1]p-p+g[1],k[1]q-q+g[2],-k[2]x+g[1],k[2]r-r+g[2],
k[3]s-s+g[1],-k[3]y+g[2],xyt-1,py+xq-xy);
NF(k[1]+k[2]+k[3]-1,I);
```

je normální forma polynomu $k_1 + k_2 + k_3 - 1$ rovna nule. Ukázali jsme, že vztah (5.14) platí. Eulerova věta je dokázána. \square

Poznámka:

Vzorec (5.14) je ekvivalentní vztahu

$$\frac{\|AG\|}{\|AA'\|} + \frac{\|BG\|}{\|BB'\|} + \frac{\|CG\|}{\|CC'\|} = 2. \quad (5.15)$$

Toto plyne z

$$\begin{aligned} & \frac{\|AG\|}{\|AA'\|} + \frac{\|BG\|}{\|BB'\|} + \frac{\|CG\|}{\|CC'\|} = \\ & = \frac{\|AA'\| - \|GA'\|}{\|AA'\|} + \frac{\|BB'\| - \|GB'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|CC'\| - \|GC'\|}{\|CC'\|} = \\ & = 3 - \left(\frac{\|GA'\|}{\|AA'\|} + \frac{\|GB'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|GC'\|}{\|CC'\|} \right) = 2. \end{aligned}$$

V [8] je uvedeno, že vztah (5.15) publikoval v roce 1818 J.D. Gergonne. \square

Následující vztah publikoval L. Euler v roce 1780, viz [22], [89]:

Je dán trojúhelník ABC a libovolný bod G roviny trojúhelníka, který neleží na stranách trojúhelníka ABC. Potom platí:

$$\frac{\|AG\|}{\|GA'\|} \cdot \frac{\|BG\|}{\|GB'\|} \cdot \frac{\|CG\|}{\|GC'\|} = \frac{\|AG\|}{\|GA'\|} + \frac{\|BG\|}{\|GB'\|} + \frac{\|CG\|}{\|GC'\|} + 2. \quad (5.16)$$

Zde opět $\|XY\|$ znamená orientovanou vzdálenost. Existuje řada vztahů pro součin poměrů vzdáleností typu, který je na levé straně (5.16). Rovněž existují vzorce pro součet poměrů vzdáleností. Vzorec (5.16) je jedním z mála, který dává do vzájemného vztahu součet i součin, viz [32]. Pokusíme se vzorec (5.16) objevit.

Vidíme, že se opět jedná o poměry vzdáleností bodů na přímcích, tedy jde o problém afinní geometrie a můžeme proto volit afinní soustavu souřadnic. Při stejném označení jako v předchozím příkladu platí vztahy: $k_1(p - g_1, q - g_2) =$

(g_1, g_2) , $k_2(-g_1, g_2 - r) = (g_1 - x, g_2)$, $k_3(s - g_1, -g_2) = (g_1, g_2 - y)$. Dále předpokládáme, že body A, B, C leží v přímce, tj. $sy - sg_2 - yg_1 = 0$. Eliminace proměnných p, q, r, s, g_1, g_2 dává

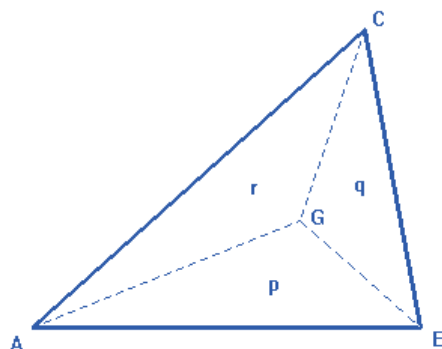
```
Use R:=Q[xypqrs][1..2]k[1..3];
I:=Ideal(k[1](p-g[1])-g[1],k[1](q-g[2])-g[2],-k[2]g[1]-g[1]+x,
k[2](g[2]-r)-g[2],k[3](s-g[1])-g[1],-k[3]g[2]-g[2]+y,py+xq-xy);
Elim(p..g[2],I);
```

jediný polynom $xy(k_1k_2k_3 - k_1 - k_2 - k_3 - 2)$. Odtud při volbě $xy \neq 0$ dostaneme

```
Use R:=Q[xypqrs][1..2]k[1..3]t;
J:=Ideal(k[1](p-g[1])-g[1],k[1](q-g[2])-g[2],-k[2]g[1]-g[1]+x,
k[2](g[2]-r)-g[2],k[3](s-g[1])-g[1],-k[3]g[2]-g[2]+y,xyt-1,
py+xq-xy);
NF(k[1]k[2]k[3]-k[1]-k[2]-k[3]-2,J);
```

Výsledek 0 znamená, že platí (5.16).

Ukážeme si nyní důkaz vztahu (5.16) areální metodou [39], [32], obr. 5.11. Označme orientované obsahy trojúhelníků ABG, BCG, CAG po řadě $p = \|ABG\|, q = \|BCG\|, r = \|CAG\|$, obr. 5.12. Platí



Obrázek 5.12: Eulerova věta - klasický důkaz

$$\frac{\|AG\|}{\|GA'\|} = \frac{\|AA'\| - \|GA'\|}{\|GA'\|} = \frac{\|AA'\|}{\|GA'\|} - 1 = \frac{p+q+r}{q} - 1 = \frac{p+r}{q}. \quad (5.17)$$

Analogicky

$$\frac{\|BG\|}{\|GB'\|} = \frac{p+q}{r}, \quad \frac{\|CG\|}{\|GC'\|} = \frac{q+r}{p}. \quad (5.18)$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\|AG\|}{\|GA'\|} \cdot \frac{\|BG\|}{\|GB'\|} \cdot \frac{\|CG\|}{\|GC'\|} &= \frac{p+r}{q} \cdot \frac{p+q}{r} \cdot \frac{q+r}{p} = \\ &= \frac{q^2r + r^2q + r^2p + p^2r + p^2q + q^2p + 2pqr}{pqr} = \\ &= \frac{p+r}{q} + \frac{p+q}{r} + \frac{q+r}{p} + 2 = \frac{\|AG\|}{\|GA'\|} + \frac{\|BG\|}{\|GB'\|} + \frac{\|CG\|}{\|GC'\|} + 2. \end{aligned}$$

Věta je dokázána. \square

Pomocí vztahů (5.17) a (5.18) snadno dokážeme (5.14) klasickým způsobem. Platí totiž

$$\frac{\|GA'\|}{\|AA'\|} = \frac{q}{p+q+r}, \quad \frac{\|GB'\|}{\|BB'\|} = \frac{r}{p+q+r}, \quad \frac{\|GC'\|}{\|CC'\|} = \frac{p}{p+q+r}$$

a odtud

$$\frac{\|GA'\|}{\|AA'\|} + \frac{\|GB'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|GC'\|}{\|CC'\|} = \frac{q}{p+q+r} + \frac{r}{p+q+r} + \frac{p}{p+q+r} = 1.$$

5.3.1 Prostorová analogie Eulerovy věty

Budeme se věnovat analogii Eulerova vztahu v prostoru. Dokážeme následující větu:

Je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod O . Označme průsečíky přímk AO, BO, CO, DO s rovinami BCD, ACD, ABD, ABC po řadě A', B', C', D' . Potom platí

$$\frac{\|OA'\|}{\|AA'\|} + \frac{\|OB'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|OC'\|}{\|CC'\|} + \frac{\|OD'\|}{\|DD'\|} = 1. \quad (5.19)$$

Důkaz provedeme pomocí počítače. Protože je vztah (5.19) afinní invariant, s výhodou použijeme afinní soustavu souřadnic. Zvolme afinní soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0, 0]$, $B = [x, 0, 0]$, $C = [0, y, 0]$, $D = [0, 0, z]$, obr. 5.13.

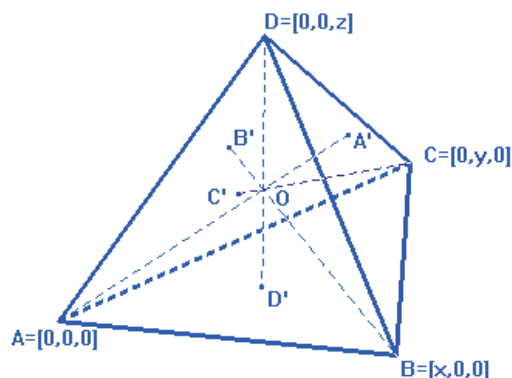
Dále označme $O = [o_1, o_2, o_3]$, $A' = [a_1, a_2, a_3]$, $B' = [0, b_2, b_3]$, $C' = [c_1, 0, c_3]$, $D' = [d_1, d_2, 0]$.

Platí vztahy

$$k_1(A' - A) = A' - O, \quad k_2(B' - B) = (B' - O), \quad k_3(C' - C) = C' - O, \quad k_4(D' - D) = D' - O,$$

ze kterých plynou předpoklady

$$\begin{aligned} h_1 : k_1 a_1 - a_1 + o_1 &= 0, \quad h_2 : k_1 a_2 - a_2 + o_2 = 0, \quad h_3 : k_1 a_3 - a_3 + o_3 = 0, \quad h_4 : \\ k_2(-x) + o_1 &= 0, \quad h_5 : k_2 b_2 - b_2 + o_2 = 0, \quad h_6 : k_2 b_3 - b_3 + o_3 = 0, \quad h_7 : k_3 c_1 - c_1 + o_1 = 0, \\ h_8 : k_3(-y) + o_2 &= 0, \quad h_9 : k_3 c_3 - c_3 + o_3 = 0, \quad h_{10} : k_4 d_1 - d_1 + o_1 = 0, \quad h_{11} : \\ k_4 d_2 - d_2 + o_2 &= 0, \quad h_{12} : k_4(-z) + o_3 = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 5.13: Eulerova věta v prostoru

Dále $A' \in BCD \Leftrightarrow h_{11} : xza_2 + xya_3 + yza_1 - xyz = 0$.

Pokusíme se tvrzení (5.19) "objevit". V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{11})$ eliminujeme proměnné $a_1, a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_3, d_1, d_2, o_1, o_2, o_3$

```
Use R := Q[xyza[1..3]b[1..3]c[1..3]d[1..3]o[1..3]k[1..4]];
I := Ideal(k[1]a[1]-a[1]+o[1], k[1]a[2]-a[2]+o[2], k[1]a[3]-a[3]
+o[3], k[2](-x)+o[1], k[2]b[2]-b[2]+o[2], k[2]b[3]-b[3]+o[3],
k[3]c[1]-c[1]+o[1], k[3](-y)+o[2], k[3]c[3]-c[3]+o[3], k[4]d[1]
-d[1]+o[1], k[4]d[2]-d[2]+o[2], k[4](-z)+o[3], xza[2]+xya[3]+
yza[1]-xyz);
Elim(a[1]..o[3], I);
```

a vyjde $xyz(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - 1) = 0$. Předpokládáme-li, že $xyz \neq 0$, tj. body A, B, C, D jsou vzájemně různé, snadno ověříme, že vztah (5.19) platí.

Nyní ukážeme analogii vztahu (5.16) v prostoru.

Předpokládejme, že je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod O . Nechť A', B', C', D' jsou po řadě průsečíky přímk AO, BO, CO, DO s rovinami BCD, ACD, ABD, ABC . Označme

$$k_1 = \frac{\|AO\|}{\|OA'\|}, k_2 = \frac{\|BO\|}{\|OB'\|}, k_3 = \frac{\|CO\|}{\|OC'\|}, k_4 = \frac{\|DO\|}{\|OD'\|}. \quad (5.20)$$

Určete jaký vztah platí pro poměry k_1, k_2, k_3, k_4 .

Na základě rovností $k_1(A' - O) = O - A, k_2(B' - O) = O - B, k_3(C' - O) = O - C, k_4(D' - O) = O - D$ platí

$k_1(a_1 - o_1) = o_1, k_1(a_2 - o_2) = o_2, k_1(a_3 - o_3) = o_3, k_2(b_1 - o_1) = o_1 - x, k_2(b_2 - o_2) = o_2, k_2(b_3 - o_3) = o_3, k_3(c_1 - o_1) = o_1, k_3(c_2 - o_2) = o_2 - y, k_3(c_3 - o_3) = o_3, k_4(d_1 - o_1) = o_1, k_4(d_2 - o_2) = o_2, k_4(d_3 - o_3) = o_3 - z.$

Z podmínek $A \in BCD, B \in ACD, C \in ABD, D \in ABC$ po řadě plynou rovnosti $xza_2 + xya_3 + yza_1 - xyz = 0, b_1 = 0, c_2 = 0, d_3 = 0.$ Vychází

```
Use R:=Q[xyza[1..3]b[1..3]c[1..3]d[1..3]o[1..3]k[1..4]];
I:=Ideal(k[1](a[1]-o[1])-o[1],k[1](a[2]-o[2])-o[2],k[1](a[3]-o[3])-o[3],
k[2](-o[1])-o[1]+x,k[2](b[2]-o[2])-o[2],k[2](b[3]-o[3])-o[3],
k[3](c[1]-o[1])-o[1],k[3](-o[2])-o[2]+y,k[3](c[3]-o[3])-o[3],k[4]
(d[1]-o[1])-o[1],k[4](d[2]-o[2])-o[2],k[4](-o[3])-o[3]+z,
xza[2]+xya[3]+yza[1]-xyz);
Elim(a[1]..o[3],I);
```

jediný vztah

$$k_1k_2k_3k_4 = (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 + k_1k_4 + k_2k_4 + k_3k_4) + 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 3. \quad (5.21)$$

Snadno se ukáže, že za předpokladu $xyz \neq 0,$ tj. vrcholy A, B, C, D čtyřstěnu jsou vzájemně různé, je polynom ze vztahu (5.21) prvkem ideálu $I.$ Dokázali jsme větu:

Předpokládejme, že je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod $O.$ Nechť A', B', C', D' jsou po řadě průsečíky přímk AO, BO, CO, DO s rovinami $BCD, ACD, ABD, ABC.$ Označme

$$k_1 = \frac{\|AO\|}{\|OA'\|}, k_2 = \frac{\|BO\|}{\|OB'\|}, k_3 = \frac{\|CO\|}{\|OC'\|}, k_4 = \frac{\|DO\|}{\|OD'\|}. \quad (5.22)$$

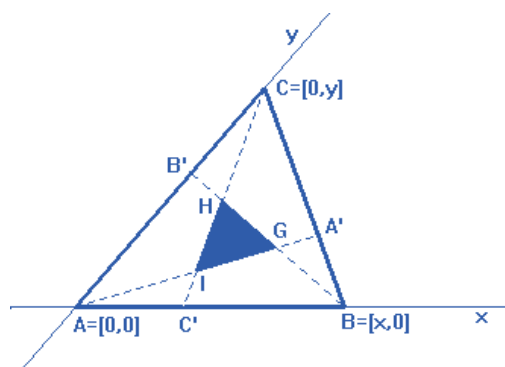
Potom pro k_1, k_2, k_3, k_4 platí rovnost (5.21).

5.4 Routhova věta

Následující větu, která je zobecněním Cevovy věty, uveřejnil v roce 1896 anglický matematik E.J. Routh, viz. [84], [46]:

Je dán trojúhelník ABC a tři body A', B', C' po řadě na stranách BC, AC, AB nebo jejich prodloužení. Označme $l_1 = (BCA'), l_2 = (CAB')$ a $l_3 = (ABC')$ dělicí poměry bodů $A', B', C'.$ Potom jsou přímky AA', BB', CC' stranami trojúhelníka $GHI,$ obr. 5.14, pro který je poměr obsahů trojúhelníků GHI a ABC roven číslu

$$\frac{\|GHI\|}{\|ABC\|} = \frac{(l_1l_2l_3 + 1)^2}{(l_1l_2 - l_1 + 1)(l_2l_3 - l_2 + 1)(l_3l_1 - l_3 + 1)}. \quad (5.23)$$



Obrázek 5.14: Routhova věta

Je známo několik důkazů této věty. Pokusíme se vzorec (5.23), obdobně jako v případě Cevovy věty, *objevit*. Jelikož se jedná o problematiku afinní geometrie (dělicí poměr, poměr obsahů trojúhelníků), budeme pracovat v afinní soustavě souřadnic. Místo $l_1 = (BCA')$ můžeme psát $l_1(A' - C) = A' - B$. Analogicky je $l_2(B' - A) = B' - C$, $l_3(C' - B) = C' - A$. Označme $A = [0, 0]$, $B = [x, 0]$, $C = [0, y]$, $A' = [p, q]$, $B' = [0, r]$, $C' = [s, 0]$, $G = [g_1, g_2]$, $H = [h_1, h_2]$, $I = [i_1, i_2]$, obr. 5.14.

Platí $l_1(p, q - y) = (p - x, q)$, $l_2(0, r) = (0, r - y)$, $l_3(s - x, 0) = (s, 0)$, tj. $h_1 : l_1(q - y) - q = 0$, $h_2 : l_1p - p + x = 0$, $h_3 : l_2r - r + y = 0$, $h_4 : l_3(s - x) - s = 0$. Dále platí: $G \in AA' \Leftrightarrow h_5 : qg_1 - pg_2 = 0$, $G \in BB' \Leftrightarrow h_6 : rg_1 + xg_2 - xr = 0$, $H \in BB' \Leftrightarrow h_7 : rh_1 + xh_2 - xr = 0$, $H \in CC' \Leftrightarrow h_8 : yh_1 + sh_2 - sy = 0$, $I \in AA' \Leftrightarrow h_9 : qi_1 - pi_2 = 0$, $I \in CC' \Leftrightarrow h_{10} : yi_1 + si_2 - sy = 0$. V afinní soustavě souřadnic můžeme volit $x = y = 1$. Pro poměr f obsahů trojúhelníků GHI a ABC platí $h_{11} : f = g_1h_2 + h_1i_2 + g_2i_1 - h_2i_1 - g_1i_2 - g_2h_1$.

Eliminace proměnných $x, y, p, q, r, s, g_1, g_2, h_1, h_2, i_1, i_2$ v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_{11})$ dává

```
Use R:=Q[xypqrs][1..2]h[1..2]i[1..2]l[1..3]f;
I:=Ideal(1[1](q-y)-q,1[1]p-p+x,1[2]r-r+y,1[3](s-x)-s,qg[1]-pg[2],
rg[1]+xg[2]-xr,rh[1]+xh[2]-xr,yh[1]+sh[2]-sy,qi[1]-pi[2],
yi[1]+si[2]-sy,x-1,y-1,f-g[1]h[2]-h[1]i[2]-g[2]i[1]+h[2]i[1]+
g[1]i[2]+g[2]h[1]);
Elim(x..i[2],I);
```

jedinou rovnici

$$-f(l_2l_3 - l_2 + 1)(l_1l_3 - l_3 + 1)(l_1l_2 - l_1 + 1) + (l_1l_2l_3 + 1)^2 = 0,$$

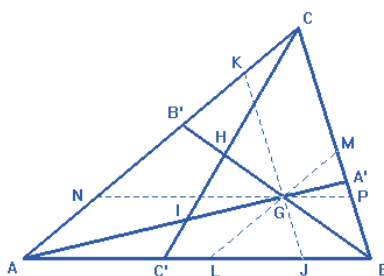
což je vztah (5.23). Ověření, že (5.23) je nutná podmínka, je snadné a nebudeme jej provádět. \square

Označíme-li $l_1 = \frac{\|BA'\|}{\|A'C\|}$, $l_2 = \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|}$, $l_3 = \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|}$, potom je (5.23) ekvivalentní vztahu

$$\frac{\|GHI\|}{\|ABC\|} = \frac{(l_1 l_2 l_3 - 1)^2}{(l_1 l_2 + l_1 + 1)(l_2 l_3 + l_2 + 1)(l_3 l_1 + l_3 + 1)}. \quad (5.24)$$

Stačí totiž v (5.23) psát $-l_1, -l_2, -l_3$ místo l_1, l_2, l_3 , neboť $(BCA') = -\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|}$ atd.

Nyní uvedeme klasický důkaz Routhovy věty. Přidržíme se způsobu, který



Obrázek 5.15: Routhova věta - klasický důkaz

uveřejnili J. S. Kline a D. J. Velleman [46]:

Routhovu větu budeme dokazovat ve tvaru (5.24). Veďme např. bodem G rovnoběžky se stranami trojúhelníka ABC , obr. 5.15. Platí

$$\frac{\|JG\|}{\|GK\|} = \frac{\|BA'\|}{\|A'K\|} = l_1,$$

odkud $\|GK\| = \|JG\|/l_1$. Z podobnosti trojúhelníků LJG a GPM dostáváme

$$\frac{\|PM\|}{\|JG\|} = \frac{\|MG\|}{\|GL\|} = \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = l_2$$

a odtud $\|PM\| = l_2 \cdot \|JG\|$.

Dále platí

$$\begin{aligned} \|BC\| &= \|BP\| + \|PM\| + \|MC\| = \|JG\| + \|PM\| + \|GK\| = \\ &= \|JG\| + l_2 \cdot \|JG\| + \frac{1}{l_1} \cdot \|JG\|, \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{\|JG\|}{\|BC\|} = \frac{l_1}{l_1 l_2 + l_1 + 1}. \quad (5.25)$$

Trojúhelníky LJG a ABC jsou podobné s koeficientem podobnosti (5.25). Ve stejném poměru jsou i délky výšek na strany LJ a AB . Odtud plyne, že obsah trojúhelníka ABG ku obsahu trojúhelníka ABC je roven (5.25). Můžeme tedy psát

$$\frac{\|ABG\|}{\|ABC\|} = \frac{l_1}{l_1 l_2 + l_1 + 1}.$$

Analogicky pro obsahy trojúhelníků BCH a CAI vychází

$$\frac{\|BCH\|}{\|ABC\|} = \frac{l_2}{l_2 l_3 + l_2 + 1} \quad \text{a} \quad \frac{\|CAI\|}{\|ABC\|} = \frac{l_3}{l_3 l_1 + l_3 + 1}.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{\|GHI\|}{\|ABC\|} &= 1 - \frac{l_1}{l_1 l_2 + l_1 + 1} - \frac{l_2}{l_2 l_3 + l_2 + 1} - \frac{l_3}{l_3 l_1 + l_3 + 1} = \\ &= \frac{(l_1 l_2 l_3 - 1)^2}{(l_1 l_2 + l_1 + 1)(l_2 l_3 + l_2 + 1)(l_3 l_1 + l_3 + 1)}, \end{aligned}$$

což je vztah (5.24). Tím je důkaz věty proveden. \square

Poznámky:

1) Speciálním případem Routhovy věty je věta Cevova. Položíme-li totiž v (5.23) $l_1 l_2 l_3 = -1$, je obsah trojúhelníka GHI roven nule, a přímky AA' , BB' , CC' procházejí týmž bodem.

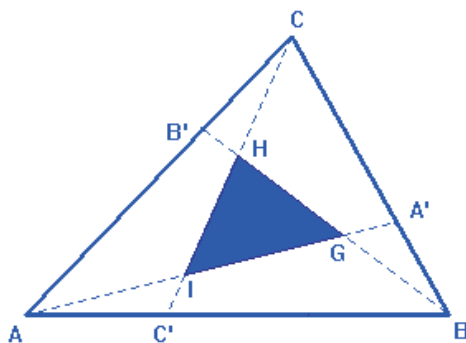
2) Jestliže body A' , B' , C' dělí strany $\triangle ABC$ ve stejném poměru, potom $l_1 = l_2 = l_3 = l$ a vzorec (5.23) má tvar

$$\frac{\|GHI\|}{\|ABC\|} = \frac{(l+1)^3}{l^3+1}. \quad (5.26)$$

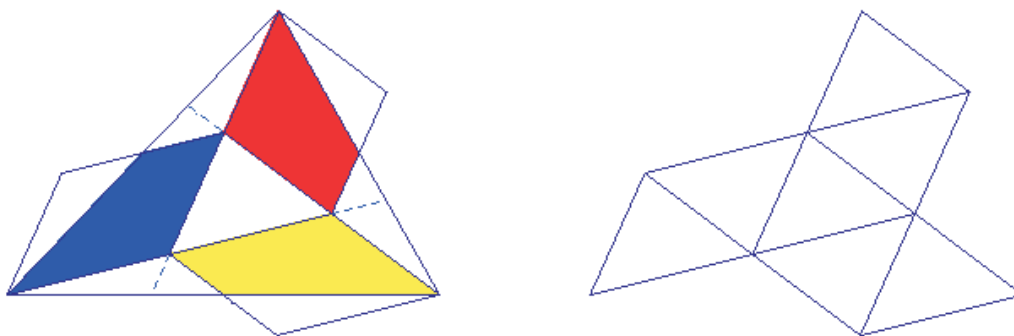
\square

Rozdělíme-li strany trojúhelníka na tři stejné díly, potom $l_1 = l_2 = l_3 = -1/2$ a z (5.26) plyne, že obsah trojúhelníka GHI je roven $1/7$ obsahu trojúhelníka ABC , obr. 5.16.

Ukážeme elegantní důkaz tohoto tvrzení, které uvádí R.B. Nelsen v publikaci *Proofs Without Words II* [62]. Důkaz uvedeme též beze slov, obr. 5.17:



Obrázek 5.16: Routhova věta pro hodnoty $l_1 = l_2 = l_3 = -1/2$



Obrázek 5.17: Routhova věta pro hodnoty $l_1 = l_2 = l_3 = -1/2$

Kapitola 6

Petr-Douglas-Neumannova věta

Petr-Douglas-Neumannova věta (PDN věta) má bohatou historii [56], [57], [68], [70], [73], [28]. Její jméno je úzce spjato se jménem českého matematika Karla Petra, který větu jako první publikoval v roce 1905, viz [75]. Snad v důsledku skutečnosti, že práce [75] byla napsána česky (ačkoliv o dva roky později vyšla německá verze), byli za objevitele této věty dlouho považováni J. Douglas [18] a B.H. Neumann [63], kteří své práce nezávisle publikovali ve 40. letech minulého století. Název Petrova věta je uveden též v [59]. Pojmenování Petr-Douglas-Neumannova věta uvedl v roce 1996 H. Martini v práci [57].

Existuje mnoho příkladů elementární geometrie v rovině, které mají souvislost s PDN větou, aniž si to mnohdy uvědomíme. Výčet příkladů souvisejících s PDN větou by jistě vydal na samostatnou publikaci.

V této kapitole uvedeme základní příklady PDN věty od trojúhelníka ke čtyřúhelníku a pětiúhelníku. Hodně prostoru budeme věnovat nejznámějšímu speciálnímu případu PDN věty, kterým je Napoleonova věta.

Při řešení uvedené problematiky budeme postupovat stejně jako v ostatních kapitolách. Nejprve problém vyřešíme (dokážeme, odvodíme či objevíme) pomocí počítače a poté problém dokážeme klasickým způsobem. V závěru kapitoly budeme řešit též prostorovou verzi PDN věty.

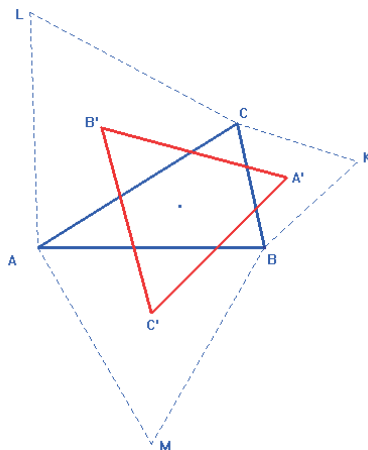
6.1 Napoleonova věta

V této kapitole se budeme zabývat větou, která se nazývá *Napoleonova věta*. Věta bývá připisována Napoleonovi [24], [88], ačkoliv existují pochybnosti o tom, zda známý vojevůdce měl dostatek vědomostí k tomu, aby větu dokázal.

Napoleonova věta zní, obr. 6.1:

Nad stranami libovolného trojúhelníka sestrojme rovnostranné trojúhelníky (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy těchto rovnostranných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

Větu se nejprve pokusíme "objevit" pomocí počítače. Nad stranami trojú-



Obrázek 6.1: Napoleonova věta - trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný

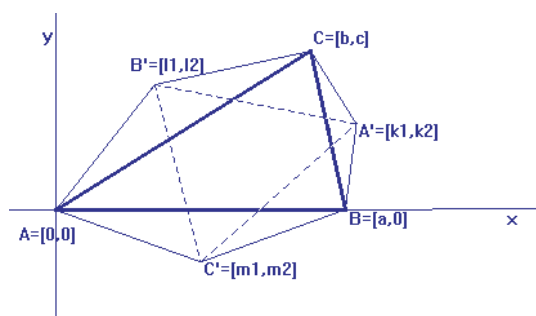
helníka ABC sestrojíme *podobné rovnoramenné* trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' . Budeme hledat takové rovnoramenné trojúhelníky, jejichž vrcholy tvoří rovnostranný trojúhelník, obr. 6.2.

Zvolme soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [b, c]$, $A' = [k_1, k_2]$, $B' = [l_1, l_2]$, $C' = [m_1, m_2]$. Sestrojme nad stranami trojúhelníka ABC např. vně *libovolné* podobné rovnoramenné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' , obr. 6.2. Problém této úlohy spočívá ve vyjádření pojmu "vně" pouze pomocí algebraických rovnic. Důkazové metody, které užíváme, se opírají o Hilbertovu větu Nullstellensatz, která platí v algebraicky uzavřeném tělese, např. oboru komplexních čísel. Komplexní čísla však, jak známo, nelze uspořádat, proto nemůžeme pro vyjádření poloroviny použít nerovností. Použijeme následující způsob, který použil D. Wang [101].

Vrchol A' je koncovým bodem vektoru, jehož počáteční bod je ve středu strany BC , má délku $v|BC|$ a též směr jako vektor \overrightarrow{CB} otočený o úhel 90° v kladném smyslu. Tedy pro souřadnice k_1, k_2 bodu A' platí $(k_1 - (a+b)/2, k_2 - c/2) = v(c, a-b)$. Analogické vztahy platí pro ostatní vrcholy. Pro souřadnice vrcholů A', B', C' dostáváme následující podmínky:

$$\begin{aligned}h_1 &: 2k_1 - a - b - 2vc = 0, \\h_2 &: 2k_2 - c - 2va + 2vb = 0, \\h_3 &: 2l_1 - b + 2vc = 0, \\h_4 &: 2l_2 - c - 2vb = 0, \\h_5 &: 2m_1 - a = 0, \\h_6 &: m_2 + va = 0.\end{aligned}$$

Hledáme takové reálné v , pro které bude trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný. Požadujeme splnění podmínek $|A'B'| = |A'C'|$ a $|A'B'| = |B'C'|$, tj.



Obrázek 6.2: Napoleonova věta - důkaz pomocí počítače

$$\begin{aligned}h_7 &: (k_1 - l_1)^2 + (k_2 - l_2)^2 - (m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 = 0, \\h_8 &: (k_1 - l_1)^2 + (k_2 - l_2)^2 - (m_1 - l_1)^2 + (m_2 - l_2)^2 = 0.\end{aligned}$$

Nejprve požadujeme platnost rovnosti $|A'B'| = |A'C'|$. V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_7)$ provedeme eliminaci závisle proměnných $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2$

```
Use R ::= Q[k[1..2] l[1..2] m[1..2] abc v];
I := Ideal(2k[1] - a - b - 2vc, 2k[2] - c - 2va + 2vb, 2l[1] - b + 2vc, 2l[2] - c - 2vb,
2m[1] - a, m[2] + va, (k[1] - l[1])^2 + (k[2] - l[2])^2 - (m[1] - k[1])^2 - (m[2] - k[2])^2);
Elim(k[1]..m[2], I);
```

Výsledný eliminační ideál dává jedinou podmínku

$$(12v^2 - 1)(a^2 - b^2 - c^2) = 0,$$

ze které plyne:

a) $a^2 = b^2 + c^2$, tedy trojúhelník ABC je rovnoramenný, $|AB| = |AC|$ a v je libovolné,
nebo

b) $v = \sqrt{3}/6$ nebo $v = -\sqrt{3}/6$ a trojúhelník ABC je libovolný.

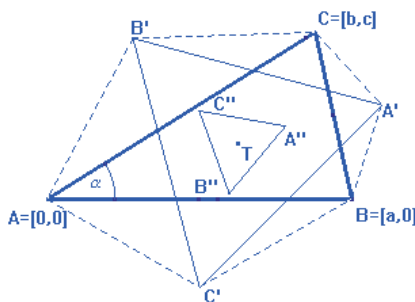
Pokud je trojúhelník ABC rovnoramenný, věta zřejmě platí pro každé v . Nás však více zajímají hodnoty $v = \sqrt{3}/6$ a $v = -\sqrt{3}/6$. Pro tyto hodnoty a libovolný trojúhelník ABC tvrzení ověříme. Máme

```
Use R := Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]abcv];
J := Ideal(2k[1]-a-b-2vc, 2k[2]-c-2va+2vb, 2l[1]-b+2vc, 2l[2]-c-2vb,
2m[1]-a, m[2]+va, 12v^2-1);
NF((k[1]-l[1])^2+(k[2]-l[2])^2-(m[1]-l[1])^2-(m[2]-l[2])^2, J);
```

Výsledek 0 znamená, že pro hodnoty $v = \sqrt{3}/6$ nebo $v = -\sqrt{3}/6$ platí $|A'B'| = |A'C'|$.

Analogicky dokážeme, že pro tytéž hodnoty $v = \sqrt{3}/6$ nebo $v = -\sqrt{3}/6$ platí $|A'B'| = |B'C'|$. Tedy $|A'B'| = |B'C'| = |A'C'|$.

Pro $v = \sqrt{3}/6$ tak získáme *vnější Napoleonův trojúhelník* $A'B'C'$, pro $v = -\sqrt{3}/6$ dostáváme *vnitřní Napoleonův trojúhelník* $A''B''C''$, obr. 6.3. Hodnotám



Obrázek 6.3: Vnější a vnitřní Napoleonův trojúhelník

$v = \sqrt{3}/6$ resp. $v = -\sqrt{3}/6$ odpovídají rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $2\pi/3$ při hlavním vrcholu, sestrojené nad stranami trojúhelníka ABC vně resp. dovnitř. Napoleonovu větu jsme tímto dokázali (a objevili). \square

Ukážeme zajímavou vlastnost Napoleonových trojúhelníků:

Součet (orientovaných) obsahů Napoleonových trojúhelníků $A'B'C'$ a $A''B''C''$ je roven obsahu trojúhelníka ABC .

Označme $A'' = [n_1, n_2]$, $B'' = [o_1, o_2]$, $C'' = [p_1, p_2]$. Obdobně jako pro body A' , B' , C' se ukáže, že pro A'' , B'' , C'' platí vztahy

$$2n_1 - a - b + 2vc = 0,$$

$$\begin{aligned}
2n_2 - c + 2va - 2vb &= 0, \\
2o_1 - b - 2vc &= 0, \\
2o_2 - c + 2vb &= 0, \\
2p_1 - a &= 0, \\
p_2 - va &= 0.
\end{aligned}$$

Označme orientované obsahy trojúhelníků ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ po řadě f, g, h . Pro obsah f platí $2f - ac = 0$, pro obsahy g, h je

$$g = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad h = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 1 \\ o_1 & o_2 & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

V ideálu I provedeme eliminaci všech proměnných kromě f, g, h . Vychází

```

Use R:=Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]n[1..2]o[1..2]p[1..2]abcvfhg];
I:=Ideal(2k[1]-a-b-2vc,2k[2]-c-2va+2vb,2l[1]-b+2vc,2l[2]-c-2vb,
2m[1]-a,m[2]+va,2n[1]-a-b+2vc,2n[2]-c+2va-2vb,2o[1]-b-2vc,2o[2]
-c+2vb,2p[1]-a,p[2]-va,12v^2-1,2f-ac,2g-(k[1]l[2]+l[1]m[2]+m[1]
k[2]-m[1]l[2]-k[1]m[2]-k[2]l[1]),2h-(n[1]o[2]+o[1]p[2]+p[1]n[2]
-p[1]o[2]-n[1]p[2]-n[2]o[1]));
Elim(k[1]..v,I);

```

jediný vztah $f = g + h$. Snadno ověříme, že $\text{NF}(f-g-h, I) = 0$. Tvrzení je dokázáno. \square

Dále dokážeme, že:

Trojúhelník ABC a Napoleonovy trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ mají společné těžiště.

Ukážeme dokonce více, totiž že společné těžiště mají trojúhelníky analogické Napoleonovým trojúhelníkům pro libovolné v , a ne pouze pro hodnoty $v = \pm\sqrt{3}/6$. Pro společné těžiště platí rovnost $1/3(A' + B' + C') = 1/3(A'' + B'' + C'')$. Dokážeme, že platí $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. To vyjadřují rovnice $k_1 + l_1 + m_1 - n_1 - o_1 - p_1 = 0$ a $k_2 + l_2 + m_2 - n_2 - o_2 - p_2 = 0$. V CoCoA zadáme

```

Use R:=Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]n[1..2]o[1..2]p[1..2]abcvt];
I:=Ideal(2k[1]-a-b-2vc,2k[2]-c-2va+2vb,2l[1]-b+2vc,2l[2]-c-2vb,
2m[1]-a,m[2]+va,2n[1]-a-b+2vc,2n[2]-c+2va-2vb,2o[1]-b-2vc,2o[2]
-c+2vb,2p[1]-a,p[2]-va);
NF(k[1]+l[1]+m[1]-n[1]-o[1]-p[1],I);

```

a dostaneme odpověď 0. Analogicky se ukáže, že

```

NF(k[2]+l[2]+m[2]-n[2]-o[2]-p[2],I)=0.

```

\square

Ještě ukážeme další vlastnost, obr. 6.4:

Jsou-li K, L, M vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami trojúhelníka ABC , potom:

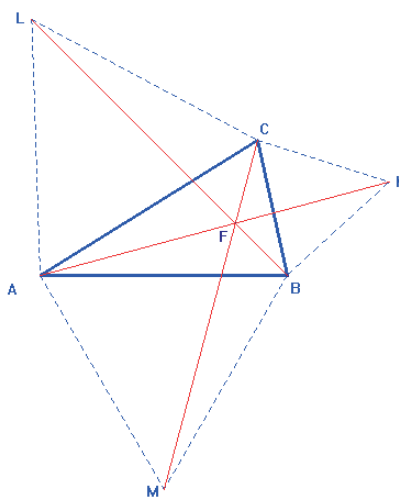
1) *Přímky AK, BL, CM se protínají v jednom bodě.*

2) *Platí*

$$|AK| = |BL| = |CM|. \quad (6.1)$$

Ad 1) Skutečnost, že se přímky AK, BL, CM protínají v bodě F , dokážeme později.

Ad 2) Při důkazu rovností $|AK| = |BL| = |CM|$ budeme postupovat obdob-



Obrázek 6.4: Přímky AK, BL, CM se protínají v bodě F a platí: $|AK| = |BL| = |CM|$.

ným způsobem jako u Napoleonovy věty. Platí:

$$|AK| = |BL| \Leftrightarrow k_1^2 + k_2^2 = (l_1 - a)^2 + l_2^2,$$

$$|BL| = |CM| \Leftrightarrow (l_1 - a)^2 + l_2^2 = (m_1 - b)^2 + (m_2 - c)^2.$$

Budeme hledat pro jakou hodnotu v platí $|AK| = |BL|$ a zároveň $|BL| = |CM|$. Nejprve vyšetříme případ $|AK| = |BL|$. V ideálu I eliminujeme všechny proměnné kromě a, b, c, v . Dostaneme

```
Use R := Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]abcv];
```

```
I := Ideal(2k[1]-a-b-2vc, 2k[2]-c-2va+2vb, 2l[1]-b+2vc, 2l[2]-c-2vb,
2m[1]-a, m[2]+va, k[1]^2+k[2]^2-(l[1]-a)^2-l[2]^2);
```

Elim(k[1]..m[2],I);

polynom $(4v^2 - 3)a(a - 2b)$, odkud plyne

a) $a - 2b = 0$, tj. $|BC| = |AC|$ a rovnost $|AK| = |BL|$ platí pro libovolnou hodnotu v ,

nebo

b) $4v^2 - 3 = 0$, tj. $v = \sqrt{3}/2$ nebo $v = -\sqrt{3}/2$ a libovolný trojúhelník ABC (případ $a = 0$ vyloučíme).

Pro hodnotu $v = \sqrt{3}/2$ dostáváme rovnostranné trojúhelníky BCK a ACL sestrojené vně trojúhelníka ABC , pro $v = -\sqrt{3}/2$ dostaneme trojúhelníky BCK a ACL , sestrojené dovnitř. Ty by měly být řešením úlohy. Ověříme, zda tomu tak skutečně je.

Use R :=Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]abcvt];

I:=Ideal(2k[1]-a-b-2vc,2k[2]-c-2va+2vb,2l[1]-b+2vc,2l[2]-c-2vb,

2m[1]-a,m[2]+va,4v^2-3,a(a-2b)t-1);

NF(k[1]^2+k[2]^2-(l[1]-a)^2-l[2]^2,I);

Odpověď 0 znamená, že platí $|AK| = |BL|$. Analogickým způsobem dokážeme, že platí také $|BL| = |CM|$. \square

Nyní dokážeme Napoleonovu větu klasickým způsobem. Důkazů Napoleonovy věty je celá řada. My použijeme důkaz, který využívá kosinové věty [92], viz obr. 6.3. Důkaz provedeme pro vnější Napoleonův trojúhelník.

Označme $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a na trojúhelník $AB'C'$ použijme kosinovou větu. Pro velikost strany $B'C'$ vychází

$$|B'C'|^2 = |AB'|^2 + |AC'|^2 - 2|AB'||AC'| \cos(\alpha + 60^\circ).$$

Protože je $|AB'| = b/\sqrt{3}$, $|AC'| = c/\sqrt{3}$, a $\cos(\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$, dosazením do předchozího vztahu dostáváme

$$|B'C'|^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right).$$

Dále, protože $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, platí

$$|B'C'|^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{6} + \frac{2bc\sqrt{3}}{6} \sin \alpha.$$

Konečně, s použitím vztahu $S = 1/2bc \sin \alpha$ pro obsah S trojúhelníka ABC dostáváme

$$|B'C'|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}S. \quad (6.2)$$

Protože délka strany $B'C'$ je vyjádřena formulí (6.2), která je symetrická v a, b, c , je zřejmé, že totéž vyjde pro zbývající dvě strany $C'A'$ a $A'B'$. Tedy trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný a Napoleonova věta je dokázána. \square

Při důkazu Napoleonovy věty pro vnitřní Napoleonův trojúhelník $A''B''C''$ vyjde analogicky k (6.2) formule

$$|B''C''|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}S, \quad (6.3)$$

která se od (6.2) liší pouze znaménkem.

Označíme-li S' , S'' po řadě obsahy Napoleonových trojúhelníků $A'B'C'$ a $A''B''C''$ potom ze vztahů (6.2) a (6.3) plyne

$$S' - S'' = S.$$

Opět tak dostáváme vlastnost, že součet orientovaných obsahů trojúhelníků $A'B'C'$, $A''B''C''$ je roven obsahu původního trojúhelníka ABC (zde jsme vzali obsah S'' s opačným znaménkem, protože $\triangle A''B''C''$ je opačně orientován).

Pro délku strany trojúhelníka $A'B'C'$ platí (6.2). Protože $\triangle AB'C'$ je podobný $\triangle ACM$ s koeficientem podobnosti $\sqrt{3}$, obr. 6.1, potom $|CM| = \sqrt{3}|B'C'|$ a z (6.2) plyne, že

$$|AK| = |BL| = |CM|,$$

což je vztah (6.1).

Poznámka:

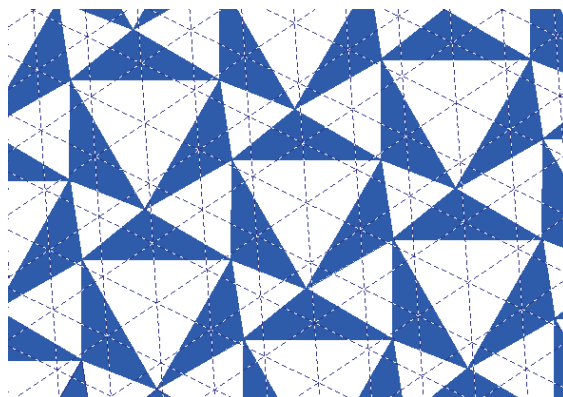
Protože je vždy $|B''C''|^2 \geq 0$, dostaneme z formule (6.3) analogii izoperimetrické nerovnosti pro trojúhelník

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S \geq 0, \quad (6.4)$$

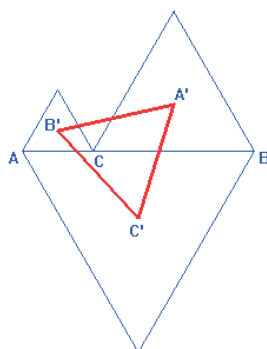
s rovností pouze pro rovnostranný trojúhelník, viz [11]. \square

Důkaz Napoleonovy věty plyne i z této úvahy, kterou publikoval J.F. Rigby [81]. V situaci na obr. 6.5 tvoří středy malých rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami tmavých trojúhelníků pravidelnou trojúhelníkovou síť, která pokrývá celou rovinu. Středy ostatních rovnostranných trojúhelníků tvoří středy této trojúhelníkové sítě. Dostáváme tak novou, jemnější pravidelnou trojúhelníkovou síť. Odtud již plyne naše tvrzení.

Je zajímavé, že Napoleonova věta platí i v případě, když vrcholy trojúhelníka ABC leží na jedné přímce, obr. 6.6. Potom jsou Napoleonovy trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ shodné a součet jejich orientovaných obsahů je roven nule.



Obrázek 6.5: Napoleonova věta - mozaika

Obrázek 6.6: Trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný

Dále dokážeme větu, která je připisována L. Kiepertovi [45], [57], protože ji použil při řešení úlohy: sestrojte trojúhelník ABC , znáte-li vrcholy A', B', C' vnějších Napoleonových trojúhelníků. J.F. Rigby v práci [81] zmiňuje, že následující větu měl známý holandský grafik M.C. Escher uvedenou ve svých poznámkách:

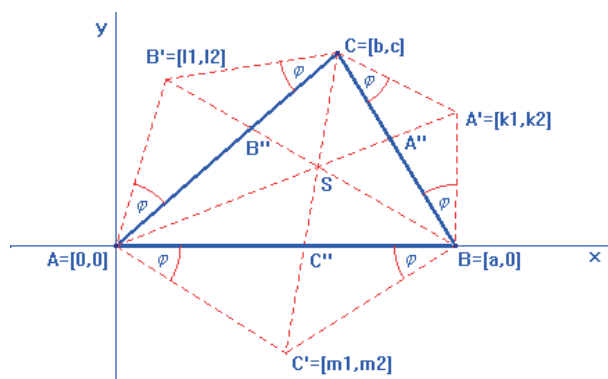
Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojte podobné rovnoramenné trojúhelníky ABC', BCA', CAB' (všechny vně nebo dovnitř) s libovolným úhlem při hlavním vrcholu. Potom se přímky AA', BB', CC' protínají v jediném bodě S .

Ve zvolené kartézské soustavě platí $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [b, c], A' = [k_1, k_2], B' = [l_1, l_2], C' = [m_1, m_2]$, obr. 6.7. Budeme postupovat obdobným způsobem jako při důkazu Napoleonovy věty. Vrchol A' je koncovým bodem

vektoru, jehož počátečním bodem je střed strany BC a jehož (orientovaná) délka je $v|BC|$, kde v je neznámé číslo. Tento vektor má stejný směr jako vektor $B-C$ otočený o úhel 90° v kladném smyslu, t.j. platí $(k_1 - (a+b)/2, k_2 - c/2) = v(c, a-b)$. Analogicky postupujeme u vrcholů B' a C' .

Přímka AA' má rovnici $k_1y - k_2x = 0$, přímka BB' : $(l_1 - a)y - (x - a)l_2 = 0$, přímka CC' : $(b - m_1)(y - m_2) - (x - m_1)(c - m_2) = 0$. Předpokládejme, že $S = [s_1, s_2]$ je společný bod přímek AA' a BB' . Chceme dokázat, že S leží také na přímce CC' . Máme

```
Use R := Q[k[1..2] l[1..2] m[1..2] s[1..2] abc v];
I := Ideal(2k[1] - a - b - 2vc, 2k[2] - c - 2va + 2vb, 2l[1] - b + 2vc, 2l[2] - c - 2vb,
2m[1] - a, m[2] + va, k[1]s[2] - k[2]s[1], (l[1] - a)s[2] - (s[1] - a)l[2]);
NF((b - m[1])(s[2] - m[2]) - (s[1] - m[1])(c - m[2]), I);
```



Obrázek 6.7: Přímky AA' , BB' , CC' se protínají v S

Odpověď 0 znamená, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v bodě S . \square

Následuje klasický důkaz hořejšího tvrzení, který publikoval O. Bottema [10]. Tento důkaz je krátký a elegantní a myslíme si, že je na místě jej reprodukovat. Důkaz je založen na *areální* metodě [31], [101], kterou známe z kapitoly o příčkách v mnohoúhelnících. Podle obr. 6.7 platí

$$\begin{aligned} |AC''|/|C''B| &= \text{obsah } \triangle ACC' / \text{obsah } \triangle BCC' = \\ &= |AC||AC'| \sin(A + \varphi) / |BC||BC'| \sin(B + \varphi) = \\ &= |AC| \sin(A + \varphi) / |BC| \sin(B + \varphi) \end{aligned}$$

a podobně

$$|BA''|/|A''C| = |AB| \sin(B + \varphi) / |AC| \sin(C + \varphi),$$

$$|CB''|/|B''A| = |BC| \sin(C + \varphi)/|AB| \sin(A + \varphi).$$

Dospíváme k rovnosti

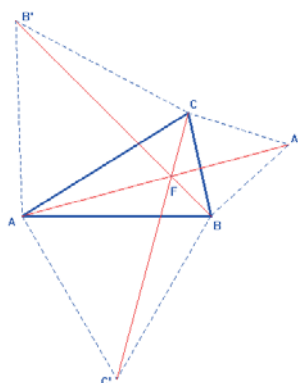
$$\frac{|AC''|}{|C''B|} \frac{|BA''|}{|A''C|} \frac{|CB''|}{|B''A|} = 1,$$

ze které plyne naše tvrzení z Cevovy věty. \square

Předchozí věta má široké použití. Pro různé hodnoty úhlu φ dostáváme různé podobné rovnoramenné trojúhelníky, kterým přísluší různé body S .

Např. pro $\varphi = 0^\circ$ tvoří vrcholy rovnoramenných trojúhelníků středy stran trojúhelníka ABC a jejich spojnice s protějšími vrcholy se protínají v těžišti trojúhelníka.

Pro hodnotu $\varphi = 60^\circ$ dostaneme rovnostranné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' , sestrojené vně trojúhelníka ABC , obr. 6.8. Spojnice jejich vrcholů A' , B' , C' po řadě s vrcholy A , B , C se podle věty protínají v jediném bodě, který jsme označili F . Tento bod se nazývá *Fermatův bod* (někdy též *Torriceliho*), který má ze všech bodů roviny trojúhelníka ABC (v případě, že jeho úhly jsou menší než 120°) nejmenší součet vzdáleností od vrcholů A , B , C . Tento nejmenší součet vzdáleností $|FA| + |FB| + |FC|$ je roven vzdálenosti $|AA'|$, která je stejná jako $|BB'|$ a $|CC'|$, což jsme dokázali v předchozím příkladu. Bod F je rovněž *izogonální* bod trojúhelníka ABC - tj. takový bod, z něhož vidíme strany trojúhelníka pod stejnými úhly 120° . \square



Obrázek 6.8: Přímky AA' , BB' , CC' se protínají ve Fermatově bodě

6.1.1 Kiepertova hyperbola

V předchozí části jsme dokázali, že přímky AA' , BB' , CC' mají společný bod S , který se ovšem mění, podle toho, jak se mění podobné rovnoramenné trojúhel-

níky ABC' , BCA' , CAB' sestrojené nad stranami trojúhelníka ABC . Ukažme jakou množinu tvoří body S , při měnící se hodnotě v .

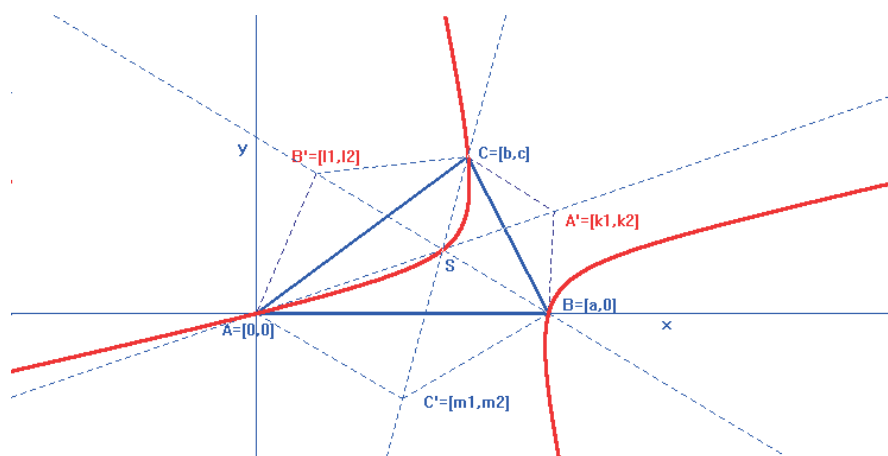
Při označení jako v v posledním příkladu eliminujeme v ideálu I proměnné k_1 , k_2 , l_1 , l_2 , m_1 , m_2 , v . Eliminační ideál bude v tomto případě obsahovat pouze polynomy v proměnných a , b , c , s_1 , s_2 . Dostaneme

```
Use R:=Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]vs[1..2]abc];
I:=Ideal(2k[1]-a-b-2vc,2k[2]-c-2va+2vb,2l[1]-b+2vc,2l[2]-c-2vb,
2m[1]-a,m[2]+va,k[1]s[2]-k[2]s[1],(1[1]-a)s[2]-(s[1]-a)l[2]);
Elim(k[1]..v,I);
```

jediný polynom, který dává rovnici kuželosečky (kde píšeme $[x, y]$ místo $[s_1, s_2]$)

$$x^2c(a-2b)+2xy(a^2-ab+b^2-c^2)+y^2c(2b-a)+xac(2b-a)+ya(c^2-ab-b^2)=0, \quad (6.5)$$

kteřá se nazývá *Kiepertova hyperbola*, [45], [57], obr. 6.9. Bod S tedy leží na



Obrázek 6.9: Bod S leží na Kiepertově hyperbole

hyperbole (6.5). Vyplní body S celou hyperbolu nebo jen její část? Pro libovolný bod $S = [x, y]$, splňující (6.5) vypočítáme hodnotu v . Po krátkém výpočtu zjistíme, že pro hodnoty $x = b$, $y = (a - b)b/c$, které odpovídají průsečíku výšek trojúhelníka, hodnota v neexistuje. Hledanou množinou bodů je tedy hyperbola (6.5) bez průsečíku výšek trojúhelníka ABC . \square

Kiepertova hyperbola (6.5) má mnoho zajímavých vlastností, které můžeme získat z rovnice (6.5). Je to rovnoosá hyperbola, procházející vrcholy trojúhelníka ABC . (Které rovnoramenné trojúhelníky dávají vrcholy trojúhelníka

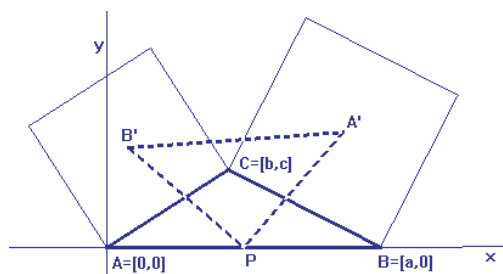
ABC ?) Obsahuje také další "významné" body trojúhelníka ABC jako těžiště, průsečík výšek, vnější a vnitřní Fermatův (Torricelliho) bod. Kiepertova hyperbola je také úzce spjata s Wallaceovou-Simsonovou přímkou, Feuerbachovou kružnicí apod., viz [57].

6.1.2 Finneyova věta

Existuje řada úloh, které jsou svázány s PDN větou. Jednou z nich je věta, kterou publikoval R.L. Finney [23]:

Nechť A', B' jsou středy čtverců sestavených po řadě nad stranami BC, AC trojúhelníka ABC (oba vně nebo dovnitř) a necht P je střed strany AB . Potom $A'B'P$ je pravoúhlý trojúhelník, pro který platí $A'P \perp B'P$ a $|A'P| = |B'P|$.

Větu "objevíme" a poté dokážeme.



Obrázek 6.10: Finneyova věta - $A'B'P$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník

Zvolme soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [b, c]$. Dále označme $A' = [k_1, k_2], B' = [l_1, l_2], P = [p, 0]$, obr. 6.10. Místo pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků sestojíme nad stranami AC, BC jako základnami trojúhelníka ABC libovolné podobné rovnoramenné trojúhelníky ACB', CBA' . Bod B' je koncový bod vektoru, jehož počátek je ve středu strany AC , který má stejný směr jako vektor \overrightarrow{AC} otočený o 90° v kladném smyslu, o délce $v|AC|$. Pro souřadnice l_1, l_2 bodu B' platí $(l_1 - b/2, l_2 - c/2) = v(-c, b)$. Obdobně definujeme bod A' , pro který $(k_1 - (a+b)/2, k_2 - c/2) = v(c, a-b)$. Hledáme takové reálné číslo v , pro které bude platit

$$A'P \perp B'P \Leftrightarrow (k_1 - p)(l_1 - p) + k_2 l_2 = 0$$

a zároveň

$$|A'P| = |B'P| \Leftrightarrow (k_1 - p)^2 + k_2^2 = (l_1 - p)^2 + l_2^2.$$

Nejprve zkoumejme, kdy je splněna podmínka $A'P \perp B'P$. Eliminací proměnných k_1, k_2, l_1, l_2, p

```

Use R := Q[k[1..2]l[1..2]pabcv];
I := Ideal(2k[1]-a-b-2vc, 2k[2]-c-2va+2vb, 2l[1]-b+2vc, 2l[2]-c-2vb,
2p-a, (k[1]-p)(l[1]-p)+k[2]l[2]);
Elim(k[1]..p, I);

```

dostaneme rovnici $(2v + 1)(2v - 1)(ab - b^2 - c^2) = 0$, která dává podmínky $v = 1/2$ nebo $v = -1/2$ nebo podmínku $ab - b^2 - c^2 = 0$, která znamená, že $AC \perp BC$, tj. trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Nyní zkoumejme druhou podmínku $|A'P| = |B'P|$. Nahradíme-li $(k_1 - p)(l_1 - p) + k_2l_2$ v ideálu I polynomem $(k_1 - p)^2 + k_2^2 - (l_1 - p)^2 - l_2^2$, dostaneme rovnici $(2v + 1)(2v - 1)a(a - 2b) = 0$, která dává hodnoty $v = 1/2$ nebo $v = -1/2$ nebo $|AC| = |BC|$ nebo $a = 0$, kdy trojúhelník ABC degeneruje. Poslední podmínku vyloučíme tím, že budeme předpokládat $a \neq 0$, tj. $A \neq B$. Mohou nastat dvě možnosti:

- pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC , pro který $|AC| = |BC|$, $AC \perp BC$ má trojúhelník $A'B'P$ vždy požadované vlastnosti, *nezávisle* na v ,
- pro *libovolný* trojúhelník ABC přicházejí v úvahu pouze hodnoty $v = 1/2$ nebo $v = -1/2$.

Tuto skutečnost nyní ověříme.

```

Use R := Q[k[1..2]l[1..2]pabcv];
I := Ideal(2k[1]-a-b-2vc, 2k[2]-c-2va+2vb, 2l[1]-b+2vc, 2l[2]-c-2vb,
2p-a, 2v-1);
NF((k[1]-p)^2+k[2]^2-(l[1]-p)^2-l[2]^2, I);

```

Odpověď NF=0.

Analogicky dostaneme $\text{NF}((k[1]-p)(l[1]-p)+k[2]l[2], I) = 0$.

Finneyova věta je dokázána. □

Klasický důkaz Finneyovy věty plyne z důkazu Thébaultovy věty, kterou uvádíme v následující části.

Poznámka:

Pro $v = 1/2$ sestrojíme čtverce vně trojúhelníka ABC a pro $v = -1/2$ dovnitř. □

6.2 PDN věta pro čtyřúhelník

V této části uvedeme několik speciálních příkladů PDN věty pro čtyřúhelník. Nejprve bude vyšetřována PDN věta pro rovnoběžník, která je spíše známa

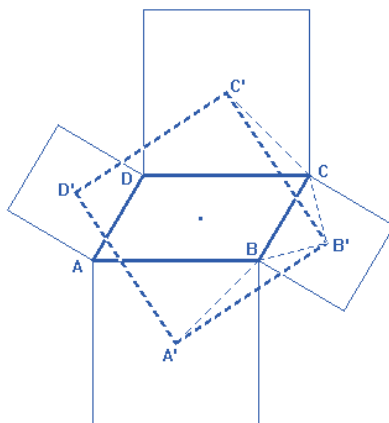
jako Thébaultova věta. V další části se budeme zabývat větou, kterou publikoval M.H. van Aubel. V závěru uvedeme obecné znění PDN věty pro čtyřúhelník.

6.2.1 Thébaultova věta

Následující větu publikoval v roce 1937 V. Thébault [97], obr. 6.11:

Nad stranami rovnoběžníka sestrojme čtverce (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy čtverců tvoří čtverec.

Důkaz (a objevení) pomocí počítače plyne z důkazu Finneyovy věty v před-



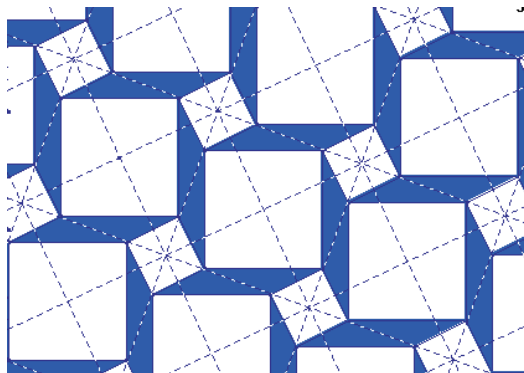
Obrázek 6.11: Thébaultova věta - body A', B', C', D' tvoří čtverec

chozí části. Finneyova věta je ekvivalentní Thébaultově větě. Toto je zřejmé, doplníme-li na obr. 6.10 trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$.

Klasicky lze Thébaultovu větu dokázat následujícím způsobem (vnější případ), obr. 6.11.

Trojúhelníky $A'B'B$ a $C'B'C$ jsou shodné, neboť $|B'B| = |B'C|$, $|BA'| = |CC'|$ a $|\angle B'BA'| = |\angle B'CC'|$. V otočení o úhel 90° se středem v bodě B' se zobrazí trojúhelník $A'B'B$ do trojúhelníku $C'B'C$. Odtud $|A'B'| = |C'B'|$ a $A'B' \perp C'B'$. Obdobně pro ostatní strany. Obdobný důkaz se provede, sestrojíme-li čtverce dovnitř. \square

Důkaz Thébaultovy věty můžeme nahlédnout i z této úvahy [74]. Na obrázku 6.12 můžeme sledovat konfiguraci z obr. 6.11, kterou jsme využili k vytvoření mozaiky. Středů malých čtverců, sestrojených nad stranami rovnoběžníků,



Obrázek 6.12: PDN věta - mozaika

tvoří čtvercovou síť, která pokrývá celou rovinu. Středů velkých čtverců tvoří středy této čtvercové sítě. Dostáváme tak novou - jemnější čtvercovou síť. Odtud plyne naše tvrzení.

Připomeňme, že tato věta je jednak speciálním případem Petrovy věty [75], jejíž znění uvedeme později, jednak speciálním případem tzv. Barlottiho věty [3] pro $n = 4$:

Nad stranami afinně-regulárního n -úhelníka sestrojme pravidelné n -úhelníky (všechny vně nebo všechny dovnitř). Potom středy těchto pravidelných n -úhelníků tvoří pravidelný n -úhelník.

Afinně pravidelným n -úhelníkem rozumíme afinní obraz pravidelného n -úhelníka (či zjednodušeně řečeno - jeho rovnoběžný průmět.) Tedy afinním obrazem pravidelného (rovnostanného) trojúhelníka je libovolný trojúhelník, zatímco afinním obrazem čtverce je rovnoběžník. Jedná se o speciální případy shora uvedené věty. Na obr. 6.13 je zobrazen případ Barlottiho věty pro $n = 6$.

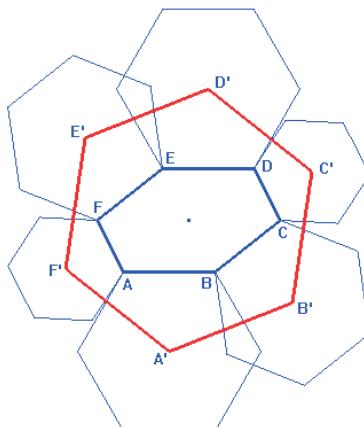
6.2.2 Van Aubelova věta

Dále uvedeme několik speciálních případů PDN věty, které jsou zajímavé samy o sobě. Jednou z nich je následující věta, kterou uveřejnil v roce 1878 M.H. van Aubel [1], obr. 6.14:

Nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$ sestrojte rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich vrcholy tvoří čtyřúhelník $A'B'C'D'$, pro který platí

$$A'C' \perp B'D', \quad |A'C'| = |B'D'|. \quad (6.6)$$

Vlastnost (6.6) dokážeme pomocí počítače. Nad stranami čtyřúhelníka se-



Obrázek 6.13: Barlottiho věta - body A', B', C', D', E', F' tvoří pravidelný šestiúhelník

strojíme rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ABA', BCB', CDD', DAD' . Zvolme soustavu souřadnic tak, aby $A = [0, 0], B = [x, 0], C = [y, z], D = [w, t]$. Nechť dále $A' = [g_1, h_1], B' = [a_1, b_1], C' = [c_1, d_1], D' = [e_1, f_1]$. Bod B' je koncovým bodem vektoru, jehož počáteční bod je ve středu strany BC , který jsme dostali otočením vektoru \overrightarrow{CB} o 90° v kladném smyslu, o velikosti $1/2|BC|$, t.j. $(a_1 - (x + y)/2, b_1 - z/2) = 1/2(z, x - y)$. Analogicky definujeme ostatní vrcholy. Platí

$$2g_1 - x = 0, 2h_1 + x = 0, 2a_1 - x - y - z = 0, 2b_1 - z - x + y = 0, 2c_1 - y - w - t + z = 0, 2d_1 - z - t - y + w = 0, 2e_1 - w + t = 0, 2f_1 - t - w = 0.$$

Nejprve se ptáme, zda platí

$$|A'C'| = |B'D'| \Leftrightarrow (c_1 - g_1)^2 + (d_1 - h_1)^2 = (e_1 - a_1)^2 - (f_1 - b_1)^2.$$

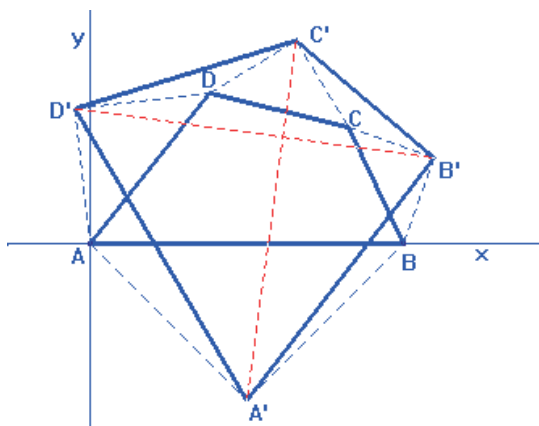
V CoCoA zadáme

```
Use R ::= Q[a[1..2]b[1..2]c[1..2]d[1..2]e[1..2]f[1..2]g[1..2]
h[1..2]xyzwt];
I := Ideal(2g[1]-x, 2h[1]+x, 2a[1]-x-y-z, 2b[1]-z-x+y, 2c[1]-y-w-t+z,
2d[1]-z-t-y+w, 2e[1]-w+t, 2f[1]-t-w);
NF((c[1]-g[1])^2+(d[1]-h[1])^2-(e[1]-a[1])^2-(f[1]-b[1])^2, I);
```

Odpověď $NF=0$ znamená, že $|A'C'| = |B'D'|$.

Nyní zkoumejme, zda platí podmínka

$$A'C' \perp B'D \Leftrightarrow (c_1 - g_1)(e_1 - a_1) + (d_1 - h_1)(f_1 - b_1).$$



Obrázek 6.14: Van Aubelova věta - $A'C' \perp B'D'$, $|A'C'| = |B'D'|$

Zadáme

```
Use R := Q[a[1..2]b[1..2]c[1..2]d[1..2]e[1..2]f[1..2]g[1..2]
h[1..2]xyzwt];
I := Ideal(2g[1]-x, 2h[1]+x, 2a[1]-x-y-z, 2b[1]-z-x+y, 2c[1]-y-w-t+z,
2d[1]-z-t-y+w, 2e[1]-w+t, 2f[1]-t-w);
NF((c[1]-g[1])(e[1]-a[1])+(d[1]-h[1])(f[1]-b[1]), I);
```

a dostaneme odpověď $NF=0$, tedy vlastnost (6.6) skutečně platí. Věta je dokázána. \square

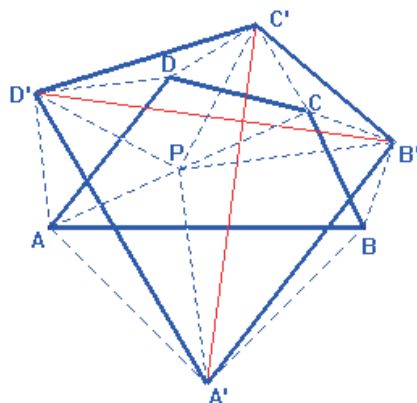
Provedme ještě klasický důkaz Van Aubelovy věty. Vyjdeme z Finneyovy věty, aplikované na trojúhelníky ABC a ACD . Podle této věty platí, že $A'PB'$, $C'PD'$ jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, kde P je střed úhlopříčky AC , obr. 6.15. Trojúhelníky $A'PC'$ a $B'PD'$ jsou zřejmě shodné (podle věty *sus*). Při otočení se středem v bodě P o 90° se zobrazí $\triangle A'PC'$ do $\triangle B'PD'$. Odtud $|A'C'| = |B'D'|$ a $A'C' \perp B'D'$. \square

Uvedeme větu, která souvisí s předchozí větou a která je též připisována M.H. van Aubelovi [56], [25], obr. 6.16.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojte pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' . Potom $A'B' \perp CC'$ a $|A'B'| = |CC'|$.

Řešení plyne ihned z Van Aubelovy věty, položíme-li $C = D$.

Nyní navážeme na Van Aubelovu větu a budeme uvažovat speciální čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé a mají stejnou délku.



Obrázek 6.15: Van Aubelova věta - klasický důkaz

Uvažujme čtyřúhelník $A'B'C'D'$, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé a mají stejnou délku, tj. $A'C' \perp B'D'$, $|A'C'| = |B'D'|$. Označme A'', B'', C'', D'' po řadě středy stran $A'B', B'C', C'D', D'A'$. Potom $A''B''C''D''$ je čtverec.

Důkaz je zřejmý a nebudeme jej provádět, obr. 6.17. \square

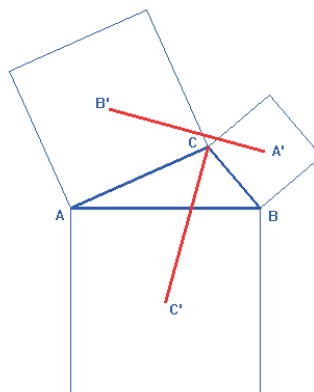
Obě poslední věty můžeme shrnout do následující PDN věty pro čtyřúhelník, obr. 6.17:

Nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$ sestrojme rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich vrcholy tvoří čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Potom středy stran A'', B'', C'', D'' čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ tvoří čtverec.

Všimněte si, že k tomu, abychom z libovolného čtyřúhelníka $ABCD$ dostali čtverec, potřebujeme dvě operace. V prvním kroku jsme obdrželi čtyřúhelník $A'B'C'D'$ a ve druhém kroku čtverec $A''B''C''D''$.

Ukažme dále, že čtyřúhelníky $A'B'C'D'$ a $ABCD$ z PDN věty (a tedy také $A''B''C''D''$) mají stejné těžiště T . Stačí ukázat, že např. $A + B + C + D = A' + B' + C' + D'$, tj. $x + y + w = g_1 + a_1 + c_1 + e_1$ a $z + t = h_1 + b_1 + d_1 + f_1$, protože, jak známo, pro těžiště čtyřúhelníka $ABCD$ platí $T = 1/4(A + B + C + D)$. Zadáme

```
Use R ::= Q[a[1..2]b[1..2]c[1..2]d[1..2]e[1..2]f[1..2]g[1..2]
h[1..2]xyzwt];
I := Ideal(2g[1]-x, 2h[1]+x, 2a[1]-x-y-z, 2b[1]-z-x+y, 2c[1]-y-w-t+z,
2d[1]-z-t-y+w, 2e[1]-w+t, 2f[1]-t-w);
NF(x+y+w-g[1]-a[1]-c[1]-e[1], I);
```

Obrázek 6.16: $A'B' \perp CC'$ a $|A'B'| = |CC'|$

a vyjde $NF=0$. Stejně se ukáže, že platí $z + t = h_1 + b_1 + d_1 + f_1$. \square

Další speciální příklad PDN věty pro čtyřúhelník pochází od dvojice autorů H. Hadwiger a P. Finsler [34], obr 6.18:

Jsou dány dva čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ se společným vrcholem $C = C'$. Potom středy X, Y čtverců $ABCD$, $A'B'C'D'$ a středy U, V úseček BB' , CC' tvoří čtverec.

Hadwiger-Finslerova věta plyne z PDN věty použité na (degenerovaný) čtyřúhelník $ACA'C'$. \square

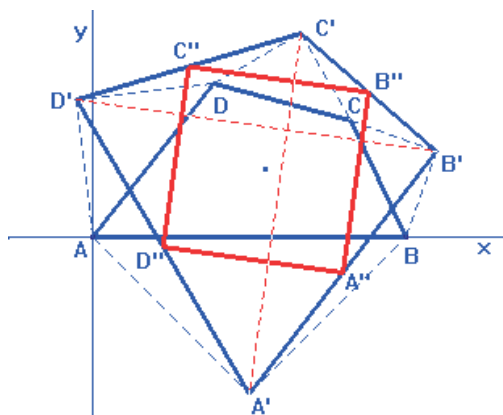
K tomu, abychom v procesu "regularizace" obdrželi z libovolného čtyřúhelníka čtverec, můžeme postupovat také způsobem, kdy pořadí obou operací prohodíme:

Je dán rovinný čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojíme středy stran A', B', C', D' čtyřúhelníka $ABCD$, které tvoří rovnoběžník. Dále sestrojíme nad stranami rovnoběžníka $A'B'C'D'$ rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Potom jejich vrcholy A'', B'', C'', D'' tvoří čtverec

Důkaz této věty je snadný a přenecháváme jej čtenáři (druhá část věty obsahuje větu Thébaulovu.)

Nyní zformulujeme PDN větu pro čtyřúhelník v obecném tvaru:

Nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$ sestrojíme rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $i \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $i \in \{1, 2, 3\}$. Vrcholy rovnoramenných trojúhelníků tvoří čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Nad stranami čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ sestrojíme rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $j \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu,

Obrázek 6.17: PDN věta - $A''B''C''D''$ je čtverec

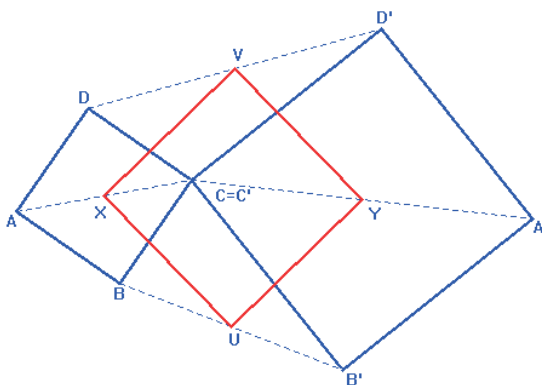
kde $j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i$. Potom vrcholy rovnoramenných trojúhelníků tvoří pravidelný čtyřúhelník $A''B''C''D''$. Sestrojíme-li nad stranami čtyřúhelníka $A''B''C''D''$ rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $k \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $k \in \{1, 2, 3\}, k \neq i, j$, dostaneme bod - společné těžiště čtyřúhelníků $ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D''$.

Poznámky:

1) Konstrukce rovnoramenných trojúhelníků s úhlem $i \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $i \in \{1, 2, 3\}$, nad stranami čtyřúhelníka připouští i úhly větší než 180° . Např. při konstrukci rovnoramenného trojúhelníka ABA' nad stranou AB pro úhel 90° je vrchol A' vně čtyřúhelníka $ABCD$, protože orientovaný úhel, který svírají vektory $B - A', A - A'$ je 90° , zatímco pro hodnotu 270° je vrchol A' uvnitř, neboť orientovaný úhel vektorů $B - A', A - A'$ je 270° .

2) Podle PDN věty pro čtyřúhelník sestrojíme postupně nad stranami čtyřúhelníka rovnoramenné trojúhelníky s úhly, které vybíráme z množiny $90^\circ, 180^\circ$ a 270° . Podle pořadí úhlů dostáváme různé typy vět. Proces však pro jakoukoliv volbu pořadí úhlů skončí ve společném těžišti všech čtyřúhelníků.

3) Znění PDN věty pro libovolný n -úhelník je obdobné jako právě vyslovená PDN věta pro čtyřúhelník [75]. V obecném případě provedeme na daný rovinný n -úhelník $n - 1$ operací, přičemž úhly vybíráme z množiny $i \cdot 2\pi/n$, kde $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Při libovolném pořadí úhlů se po $n - 1$ krocích vždy dostaneme do společného těžiště všech n -úhelníků. Předposlední n -úhelník je k -pravidelný, kde $k \cdot 2\pi/n$ je poslední hodnota z množiny $\{1 \cdot 2\pi/n, 2 \cdot 2\pi/n, \dots, (n - 1) \cdot 2\pi/n\}$. \square



Obrázek 6.18: Hadwiger-Finslerova věta: Body X, U, Y, V tvoří čtverec

6.3 PDN věta v prostoru

PDN větu zobecníme na n -úhelníky v prostoru. Prostorové zobecnění PDN věty ukážeme na příkladu pětiúhelníka.

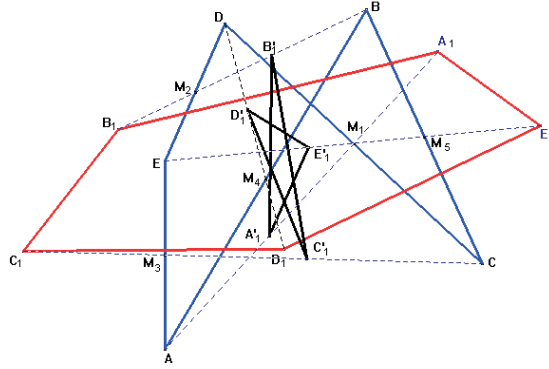
6.3.1 Douglasův pětiúhelník

V roce 1960 publikoval J. Douglas větu [18], která je prostorovým zobecněním PDN věty. Podle této věty umíme, zhruba řečeno, přiřadit libovolnému prostorovému pětiúhelníku rovinný, afinně pravidelný pětiúhelník. Větu dokážeme užitím teorie automatického dokazování a objevování vět. Douglasova věta zní:

Je dán prostorový pětiúhelník $ABCDE$. Označme po řadě M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 středy stran, ležících proti vrcholům A, B, C, D, E . Sestrojíme polopřímku AM_1 a nanese na ni z bodu M_1 vně úsečky AM_1 vzdálenost $1/\sqrt{5}|AM_1|$. Získaný bod označme A_1 . Podobně na polopřímku BM_2 nanese z bodu M_2 vně vzdálenost $1/\sqrt{5}|BM_2|$, získáme B_1 , atd. až dostaneme pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$. Potom je pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$ rovinný a afinně pravidelný. Budeme-li nanášet stejné vzdálenosti dovnitř, dostaneme jiný pětiúhelník $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$. Tento pětiúhelník je opět rovinný a afinně pravidelný.

Větu "objevíme" (a následně dokážeme) pomocí počítače, obr. 6.19. Protože se jedná o problém afinní geometrie v prostoru (vyskytují se zde pouze poměry vzdáleností) zvolíme afinní soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0, 0], B = [x, 0, 0], C = [0, y, 0], D = [0, 0, z], E = [u, v, w]$.

Pro středy stran zřejmě platí $M_1 = [0, y/2, z/2], M_2 = [u/2, v/2, (z+w)/2]$,

Obrázek 6.19: Douglasův pětiúhelník A_1, B_1, C_1, D_1, E_1

$M_3 = [u/2, v/2, w/2]$, $M_4 = [x/2, 0, 0]$, $M_5 = [x/2, y/2, 0]$. Na polopřímku AM_1 nanese se z bodu M_1 vně délku $k|AM_1|$, kde k je zatím neznámé reálné číslo a dostaneme bod A_1 . Takto získáme body A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 . Označíme-li $A_1 = [a_1, a_2, a_3]$, $B_1 = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D_1 = [d_1, d_2, d_3]$, $E_1 = [e_1, e_2, e_3]$ potom

$$A_1 - M_1 = k(M_1 - A), B_1 - M_2 = k(M_2 - B), C_1 - M_3 = k(M_3 - C), D_1 - M_4 = k(M_4 - D), E_1 - M_5 = k(M_5 - E).$$

Hledáme takové k , aby body A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 byly v jedné rovině. Tato podmínka je jistě splněna budeme-li požadovat, aby čtveřice bodů A_1, B_1, C_1, D_1 a A_1, B_1, C_1, E_1 ležely v jedné rovině, tj. aby platilo

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{a zároveň} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

Nejprve hledáme k takové, aby body A_1, B_1, C_1, D_1 byly v jedné rovině. Eliminujeme všechny proměnné kromě x, y, z, u, v, w, k a dostaneme

```
Use R:=Q[xyzuvw[1..3]b[1..3]c[1..3]d[1..3]e[1..3]k];
I:=Ideal(a[2]-y/2-ky/2, a[3]-z/2-kz/2, b[1]-u/2-k(u/2-x), b[2]-v/2
-kv/2, b[3]-(z+w)/2-k(z+w)/2, c[1]-u/2-ku/2, c[2]-v/2-k(v/2-y), c[3]
-w/2-kw/2, d[1]-x/2-kx/2, d[3]+kz, e[1]-x/2-k(x/2-u), e[2]-y/2-k(y/2
-v), e[3]+kw, -b[1]c[2]d[3]-d[1]b[2]c[3]+b[3]c[2]d[1]+d[3]b[2]c[1]
+d[1]a[2]c[3]-a[3]c[2]d[1]-d[3]a[2]c[1]-d[1]a[2]b[3]+a[3]b[2]d[1]
+d[3]a[2]b[1]+b[1]c[2]a[3]+c[1]a[2]b[3]-a[3]b[2]c[1]-c[3]a[2]b[1]);
Elim(a[1]..e[3],I);
```

jedinou podmínku

$$z(5k^2 - 1)(3xyk - yuk - xvk + xy - yu - xv) = 0.$$

Analogicky pro čtveřici A_1, B_1, C_1, E_1 vyjde

$$x(5k^2 - 1)(yzk - zvk + 2ywk + yz - zv) = 0.$$

Vidíme, že obě podmínky (8.2) (body A_1, B_1, C_1, D_1 a A_1, B_1, C_1, E_1 leží v jedné rovině) jsou splněny pro $k = 1/\sqrt{5}$ nebo $k = -1/\sqrt{5}$. Platnost podmínek $k = 1/\sqrt{5}$ nebo $k = -1/\sqrt{5}$ ověříme.

```
Use R:=Q[xyzuvw[1..3]b[1..3]c[1..3]d[1..3]e[1..3]kt];
I:=Ideal(a[2]-y/2-ky/2,a[3]-z/2-kz/2,b[1]-u/2-k(u/2-x),b[2]-v/2
-kv/2,b[3]-(z+w)/2-k(z+w)/2,c[1]-u/2-ku/2,c[2]-v/2-k(v/2-y),c[3]
-w/2-kw/2,d[1]-x/2-kx/2,d[3]+kz,e[1]-x/2-k(x/2-u),e[2]-y/2-k(y/2
-v),e[3]+kw,5k^2-1,(-b[1]c[2]d[3]-d[1]b[2]c[3]+b[3]c[2]d[1]+d[3]
b[2]c[1]+d[1]a[2]c[3]-a[3]c[2]d[1]-d[3]a[2]c[1]-d[1]a[2]b[3]+a[3]
b[2]d[1]+d[3]a[2]b[1]+b[1]c[2]a[3]+c[1]a[2]b[3]-a[3]b[2]c[1]-c[3]
a[2]b[1])t-1);
NF(1,I);
```

Odpověď $\text{NF}=0$ znamená, že pro obě hodnoty $k = \pm 1/\sqrt{5}$ dostaneme rovinný pětiúhelník. Pro $k = 1/\sqrt{5}$ dostaneme *konvexní* afinně pravidelný pětiúhelník A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 , zatímco pro hodnotu $k = -1/\sqrt{5}$ dostaneme *nekonvexní* hvězdicový afinně pravidelný pětiúhelník $A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1$, obr. 6.19. \square

Poznámky:

- 1) Oba afinně pravidelné pětiúhelníky A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a $A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1$ leží v různých rovinách, které procházejí jejich společným těžištěm, které je též těžištěm původního pětiúhelníka $ABCDE$, jak se dá snadno ukázat.
- 2) Douglasovu větu pro prostorový pětiúhelník lze zobecnit na libovolný prostorový n -úhelník [86], [70], [73]. \square

Kapitola 7

Geometrické nerovnosti

V následující části podáme některé geometrické nerovnosti objevené a dokázané pomocí počítače. Je nutné si ovšem uvědomit, že pracujeme v algebraicky uzavřeném tělese, v našem případě v tělese komplexních čísel, které, jak známo, nelze uspořádat. Nemůžeme tedy např. používat znaky $>$ nebo $<$. Nejprve budeme vyšetřovat tzv. rovnost rovnoběžníka. Poté tuto rovnost zobecníme na nerovnost mezi stranami a úhlopříčkami mnohoúhelníka. Další nerovností, kterou se budeme zabývat je Eulerova nerovnost. Kromě důkazů pomocí počítače ukážeme i klasická řešení.

7.1 Nerovnost mezi úhlopříčkami n -úhelníka

Nejznámější geometrickou nerovností je bezesporu trojúhelníková nerovnost, která říká, že součet dvou stran trojúhelníka je větší než strana třetí. My se budeme zabývat nerovností, která platí mezi stranami a úhlopříčkami n -úhelníka. Pro zjednodušení budeme v této části používat slovo úhlopříčka i pro stranu n -úhelníka. Nejprve budeme zkoumat čtyřúhelník. Začneme vyšetřováním rovností mezi stranami a úhlopříčkami, které platí pro různé typy čtyřúhelníků.

7.1.1 Rovnoběžníkové pravidlo

V této části se budeme nejprve zabývat rovností, která platí mezi součtem čtverců stran a součtem čtverců úhlopříček rovnoběžníka. Tuto rovnost budeme nazývat *rovnoběžníkové pravidlo* jako analogii k anglickému *parallelogram law* [26]:

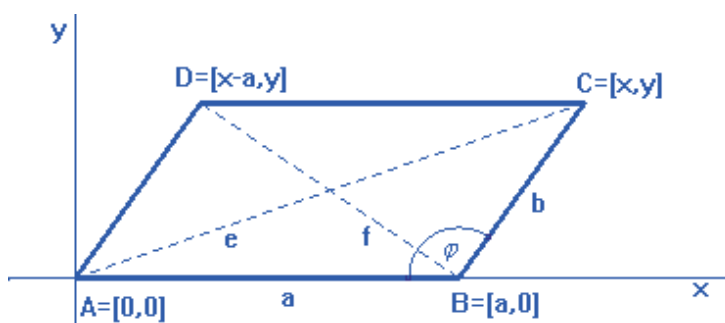
Je dán rovnoběžník se stranami délek a, b a úhlopříčkami o délkách e, f . Potom

platí

$$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2. \quad (7.1)$$

Pokusme se vztah (7.1) dokázat. Označme vrcholy rovnoběžníka písmeny A, B, C, D a jeho strany a úhlopříčky $a = |AB| = |CD|, b = |BC| = |DA|, e = |AC|, f = |BD|$ a zvolme soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [x, y], D = [x - a, y]$, obr. 7.1. Potom platí

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2, u^2 + v^2 = d^2, x^2 + y^2 = e^2, (x - 2a)^2 + y^2 = f^2.$$



Obrázek 7.1: Rovnoběžníkové pravidlo: $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

Závěr tvrzení má tvar

$$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$

Podmínky zadáme a dostaneme

```
Use R:=Q[axybef];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,x^2+y^2-e^2,(x-2a)^2+y^2-f^2,
(2(a^2+b^2)-(e^2+f^2))t-1);
NF(1,I);
```

odpověď 0, což znamená, že rovnoběžníkové pravidlo je dokázáno. \square

Klasický důkaz rovnosti (7.1) může být např. tento:

Podle kosinové věty platí v trojúhelníku ABC , obr. 7.1

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

Analogicky v trojúhelníku ABD platí

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \varphi).$$

Sečtením obou rovností dostaneme (7.1).

Poznámka:

Rovnoběžníkové pravidlo (7.1) bylo známo v trochu jiném tvaru již starým Řekům. Stalo se však velmi známým od roku 1935, kdy Jordan a von Neumann ukázali, že Banachův prostor, v němž platí (7.1), je prostor Hilbertův. \square

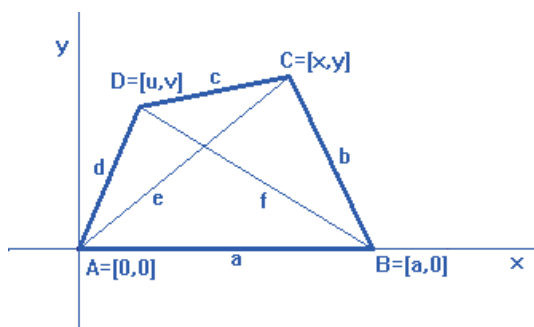
Relace (7.1) je nutnou podmínkou pro to, aby $ABCD$ byl rovnoběžník. Je (7.1) též podmínkou postačující? Dokážeme následující tvrzení [26]:

Je dán čtyřúhelník $ABCD$ o stranách délek a, b, c, d a úhlopříčkách o délkách e, f . Potom $ABCD$ je rovnoběžník právě když platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2. \quad (7.2)$$

Jednu část tvrzení jsme již dokázali. Předpokládejme nyní, že platí (7.2) a budeme zkoumat všechny čtyřúhelníky, pro které platí (7.2). Ukážeme, že $ABCD$ je rovnoběžník.

Označme $a = |AB|, b = |BC|, c = |CD|, d = |DA|, e = |AC|, f = |BD|$ a zvolme soustavu souřadnic tak aby $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [x, y], D = [u, v]$, obr. 7.2. Platí:



Obrázek 7.2: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \Leftrightarrow$ je $ABCD$ rovnoběžník

$$\begin{aligned} |BC| = b &\Leftrightarrow h_1 : (x - a)^2 + y^2 = b^2, \\ |CD| = c &\Leftrightarrow h_2 : (x - u)^2 + (y - v)^2 = c^2, \\ |DA| = d &\Leftrightarrow h_3 : u^2 + v^2 = d^2, \\ |AC| = e &\Leftrightarrow h_4 : x^2 + y^2 = e^2, \\ |BD| = f &\Leftrightarrow h_5 : (u - a)^2 + v^2 = f^2, \\ h_6 &: a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2. \end{aligned}$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_6)$ budeme eliminovat závisle proměnné b, c, d, e, f . Dostaneme

```
Use R:=Q[xyuvabcdef];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2,u^2+v^2-d^2,x^2
+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2);
Elim(b..f,I);
```

jedinou podmínku $x^2 + y^2 - 2xu + u^2 - 2yv + v^2 - 2xa + 2ua + a^2 = 0$, kterou upravíme na tvar

$$(x - u - a)^2 + (y - v)^2 = 0. \quad (7.3)$$

Podmínka (7.3) znamená, že čtyřúhelník je rovnoběžník, neboť pro reálná x, y, u, v, a odtud plyne $x - u - a = 0$ a $y - v = 0$, tj. $A - D = B - C$. Ověřme, zda tomu tak skutečně je.

Položme $h_7 : (x - u - a)^2 + (y - v)^2 = 0$ a zkoumejme zda $h_7 \in I$.

```
Use R:=Q[xyuvabcdef];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2,u^2+v^2-d^2,x^2
+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2);
NF((x-u-a)^2+(y-v)^2,I);
```

Výsledek $NF((x - u - a)^2 + (y - v)^2, I) = 0$ znamená, že tvrzení platí. \square

Poznámka:

Kdybychom místo podmínky $(x - u - a)^2 + (y - v)^2 = 0$ zadali "ekvivalentní" podmínku $x - u - a = y - v = 0$, která též charakterizuje rovnoběžník, větu bychom nedokázali. Jaký je rozdíl mezi podmínkami

$$(x - u - a)^2 + (y - v)^2 = 0 \quad \text{a} \quad x - u - a = 0 \wedge y - v = 0?$$

"Jediný rozdíl" spočívá ve skutečnosti, že zatímco v reálném případě jsou obě podmínky stejné, v případě komplexních čísel je $(x - u - a)^2 + (y - v)^2 = (x - u - a + i(y - v))(x - u - a - i(y - v))$, tj. dostáváme dvě podmínky $x - u - a + i(y - v) = 0 \vee x - u - a - i(y - v) = 0$.

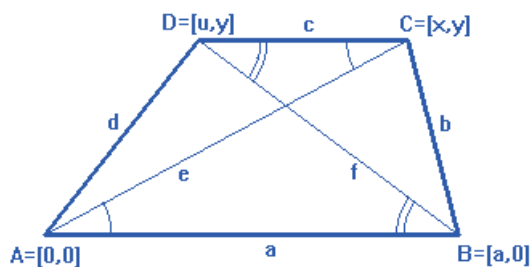
Tento příklad budiž poučením, že je vždy nutné uvažovat takové podmínky, které systém žádá (a poskytuje). Jakékoliv "úpravy" těchto podmínek, byť správně popisují skutečnost, většinou k úspěchu nevedou. \square

Rovnoběžníkové pravidlo (7.1) lze zobecnit na lichoběžník, jak uvádí [64]:

V lichoběžníku se základnami a, c , rameny b, d a úhlopříčkami e, f platí, obr. 7.3

$$b^2 + d^2 + 2ac = e^2 + f^2. \quad (7.4)$$

Důkaz pomocí počítače je následující. Označme A, B, C, D vrcholy lichoběžníka a necht' dále $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$,

Obrázek 7.3: V lichoběžníku platí $b^2 + c^2 + 2ac = e^2 + f^2$

$D = [u, y]$, obr. 7.3. Potom platí

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2, (u-x)^2 + (v-y)^2 = c^2, u^2 + v^2 = d^2, x^2 + y^2 = e^2, (x-a)^2 + y^2 = f^2, y = v.$$

Závěr tvrzení má tvar

$$b^2 + d^2 + 2ac = e^2 + f^2.$$

V CoCoA dostaneme

```
Use R:=Q[abcdefxyuvt];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2, u^2+v^2-d^2,
x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,y-v,(b^2+d^2+2ac-e^2-f^2)t-1);
NF(1,I);
```

odpověď 1. Tedy nevíme, zda tvrzení (7.4) je či není pravdivé. V ideálu I budeme eliminovat pomocnou proměnnou t , abychom zjistili případné dodatečné podmínky. Dostaneme

```
Use R:=Q[abcdefxyuvt];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2, u^2+v^2-d^2,
x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,y-v,(b^2+d^2+2ac-e^2-f^2)t-1);
Elim(t,I);
```

podmínku $x - u + c = 0$, kterou musíme vyloučit. Pokud by totiž platilo $x - u + c = 0$, potom by lichoběžník nebyl konvexní a protínal by sám sebe. Dostaneme

```
Use R:=Q[abcdefxyuvst];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2, u^2+v^2-d^2,
x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,y-v,(x-u+c)s-1,(b^2+d^2+2ac-e^2-
-f^2)t-1);
NF(1,I);
```

odpověď 0 a tvrzení (7.4) platí. \square

Klasický důkaz (7.4) může být tento. V trojúhelnících ABC a ACD platí podle kosinové věty, obr. 7.3

$$b^2 = a^2 + e^2 - 2ae \cos(\angle CAB), \quad d^2 = c^2 + e^2 - 2ce \cos(\angle ACD).$$

Podobně v trojúhelnících ABD a BDC platí

$$d^2 = a^2 + f^2 - 2af \cos(\angle ABD), \quad b^2 = c^2 + f^2 - 2cf \cos(\angle BDC).$$

Sečtením levých a pravých stran získáme

$$b^2 + d^2 = e^2 + f^2 + a^2 + c^2 - (a + c)(e \cos(\angle CAB) + f \cos(\angle ABD)),$$

což vzhledem k rovnosti $e \cos(\angle CAB) + f \cos(\angle ABD) = a + c$ dává (7.4). \square

7.1.2 Nerovnost mezi úhlopříčkami čtyřúhelníka

V předchozí části jsme ukázali, že vztah (7.2) platí pouze pro rovnoběžník. Větu dále zobecníme. Platí [26]:

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d a úhlopříčkami o délkách e, f . Potom platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2. \quad (7.5)$$

Rovnost v (7.5) nastává právě když je $ABCD$ rovnoběžník.

Speciálním případem (7.5) je právě rovnoběžníkové pravidlo (7.1). Nerovnost (7.5) dokonce platí i pro prostorový čtyřúhelník $ABCD$, jak ukážeme později. Abychom (7.5) dokázali, zkusíme vyjádřit rozdíl $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (e^2 + f^2)$. Označme

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (e^2 + f^2) = k \quad (7.6)$$

a zkoumejme ideál $J = I \cup \{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 - k\}$, kde I je ideál z předchozího příkladu. Eliminací závisle proměnných b, c, d, e, f v ideálu J dostaneme

```
Use R:=Q[x,y,u,v,a,b,c,d,e,f,k];
J:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,(x-u)^2+(y-v)^2-c^2,u^2+v^2-d^2,x^2+y^2-e^2,(u-a)^2+v^2-f^2,a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2-k);
Elim(b..f,J);
```

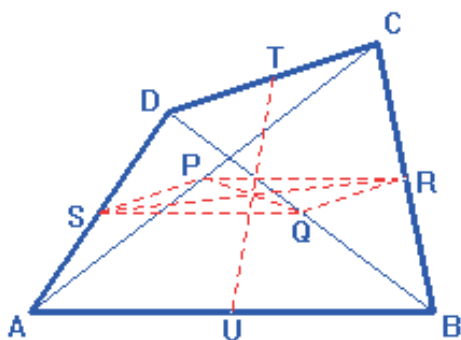

Z rovnosti (7.9) plyne nerovnost (7.5), přičemž rovnost v (7.5) nastává právě když $|PQ| = 0$, tj. pro rovnoběžník. Důkaz je proveden. \square

Poznámky:

1) Vztah (7.9) a tedy i nerovnost (7.5) platí pro libovolný *prostorový* čtyřúhelník, jak plyne z důkazu.

2) Všimněme si, že pro výraz na pravé straně (7.8) platí $(x-u-a)^2 + (y-v)^2 = |(B-C) - (A-D)|^2 = 4|PQ|^2$, neboť je $P = (B+D)/2$, $Q = (A+C)/2$ a odtud $|PQ| = 1/2|(B+D) - (A+C)|$.

3) Vztah (7.9) lze dokázat i následovně, obr 7.5. Označme P, Q po řadě středy



Obrázek 7.5: V prostorovém čtyřúhelníku platí: $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|PQ|^2$

úhlopříček $e = AC, f = BD$ a R, T, S, U po řadě středy stran $b = BC, c = CD, d = DA, a = AB$.

Potom je $QRPC$ rovnoběžník, v němž platí $|QR| = |SP| = c/2$ a $|RP| = |SQ| = a/2$. Podle (7.1) platí $2(|SQ|^2 + |QR|^2) = |PQ|^2 + |SR|^2$, tj. $a^2/2 + c^2/2 = |PQ|^2 + |SR|^2$.

Analogicky z rovnoběžníků $PUQT$ a $RTSU$ dostaneme $b^2/2 + d^2/2 = |PQ|^2 + |TU|^2$ a $e^2/2 + f^2/2 = |SR|^2 + |TU|^2$. Sečtením prvních dvou vztahů s následným odečtením třetí rovnosti dostaneme (7.9). \square

7.1.3 Obecný případ

Nerovnost (7.5) je speciálním případem následující věty, kterou uveřejnil v roce 1980 L. Gerber [26]:

Nechť $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ je uzavřený prostorový n -úhelník v E^N . Potom

platí

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k P_{k+2}|^2 \leq 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |P_k P_{k+1}|^2, \quad (7.10)$$

s rovností právě když je Π rovinný afinně regulární n -úhelník.

Pro $n = 4$ dostaneme vztah (7.5), neboť afinním obrazem čtverce je rovnoběžník. Nerovnost (7.10) byla dále zobecněna v roce 1990, viz [69] takto:

Nechť $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ je uzavřený prostorový n -úhelník v E^N a necht' $P_{n+j} = P_j$ pro $j = 0, 1, \dots$. Potom pro všechna $p = 0, 1, \dots, n-1$ platí

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |P_k P_{k+p}|^2 \leq \sin^2 \left(p \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} |P_k P_{k+1}|^2, \quad (7.11)$$

s rovností právě když je Π rovinný afinně regulární n -úhelník.

Pro $p = 2$ dostaneme z (7.11) nerovnost (7.10).

7.2 Eulerova nerovnost

V roce 1765 publikoval L. Euler [21] vztah, který vyjadřuje vzdálenost d středů kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

$$d = \sqrt{r(r-2p)}, \quad (7.12)$$

kde r je poloměr kružnice opsané a p poloměr kružnice vepsané, obr. 7.6.

V [60] je uvedeno, že H. Wieleitner v [103] se zmiňuje, že vztah (7.12) uveřejnil ještě dříve Angličan W. Chapple v roce 1746.

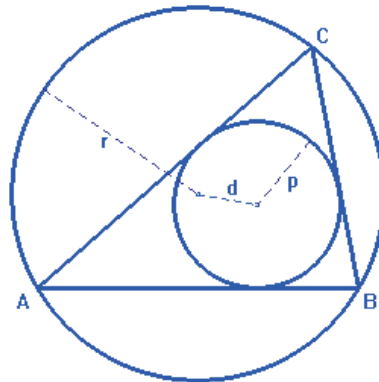
Velmi zajímavá je následující nerovnost, která plyne z (7.12)

$$r \geq 2p, \quad (7.13)$$

kterou nazveme *Eulerova nerovnost* [10]. Je zřejmé, že rovnost v (7.13) nastává právě když je trojúhelník rovnostranný, neboť právě jen v tomto případě středy kružnice opsané a vepsané trojúhelníku splývají a v (7.12) je $d = 0$.

Nejprve Eulerovu nerovnost (7.13) dokážeme pomocí počítače. Budeme postupovat podobným způsobem jako W. Koepf v [47] bez použití soustavy souřadnic.

Mějme dán libovolný trojúhelník ABC o stranách délek a, b, c . Označme r a p po řadě jeho poloměr kružnice opsané a vepsané a dále necht' f značí jeho



Obrázek 7.6: Eulerův vztah: $d = \sqrt{r(r - 2p)}$

obsah. Pro obsah trojúhelníka platí následující známé vztahy:

$$h_1 : f - p(a + b + c)/2 = 0 ,$$

$$h_2 : f - abc/(4r) = 0 ,$$

$$h_3 : 16f^2 - (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 0 .$$

Výraz $r - 2p$ se pokusíme vyjádřit ve tvaru, ze kterého bude zřejmé, že tento výraz je větší nebo roven nule. Předpokládejme, že a, b, c, p, r, f jsou kladná čísla. Označme $r - 2p = k$, tj. necht' platí:

$$h_4 : r - 2p - k .$$

V ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ budeme eliminovat proměnné p, r . Dostaneme

Use R := Q[abcprfk];

I := Ideal(2f-p(a+b+c), 4fr-abc, 16f^2-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c), r-2p-k);

Elim(p..r,I);

několik polynomů, z nichž následující, po vydělení nenulovým faktorem f , vede na rovnici tvaru

$$4fk = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 3abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3 . \quad (7.14)$$

Výraz $k = r - 2p$ je nezáporný právě když je nezáporný polynom na pravé straně v (7.14). Snadno se ukáže, že platí rovnost

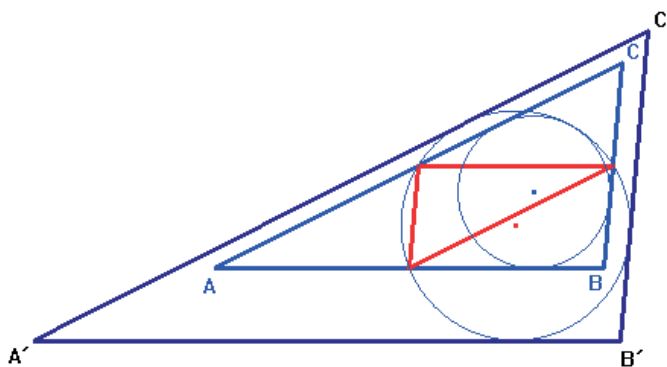
$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 3abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3 =$$

$$= 1/2[(a + b - c)(a - b)^2 + (b + c - a)(b - c)^2 + (c + a - b)(c - a)^2]. \quad (7.15)$$

Výraz na pravé straně rovnosti (7.15) je nezáporný, neboť se jedná o součet nezáporných výrazů – jednak jde o čtverce $(a - b)^2 \geq 0, \dots$, jednak o výrazy typu $a + b - c, \dots$, které jsou kladné v důsledku trojúhelníkové nerovnosti. Rovnost v (7.13) nastává právě když na pravé straně (7.15) je $a = b = c$, tj. právě když je trojúhelník rovnostranný, srovnej [47]. \square

Klasický důkaz Eulerovy nerovnosti (7.13) provedeme způsobem, který je připisován mladému maďarskému matematikovi I. Ádámovi [60]. Jedná se o velmi vtipný důkaz:

Středy stran A_1, B_1, C_1 trojúhelníka ABC tvoří trojúhelník, jehož kružnice opsaná má poloměr $r/2$, obr. 7.7. Nyní sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, je-



Obrázek 7.7: Klasický důkaz Eulerovy nerovnosti

hož strany jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníka ABC tak, aby kružnice opsaná trojúhelníku A_1, B_1, C_1 byla jeho kružnicí vepsanou. Protože $\triangle ABC \subseteq \triangle A'B'C'$, platí pro poloměry $p, r/2$ jím vepsaných kružnic vztah $p \leq r/2$. Důkaz je proveden. \square

Právě provedený důkaz lze snadno aplikovat na čtyřstěn a obecně na libovolný simplex v E^n . Pro poloměry kulových ploch p a r čtyřstěnu vepsaných a opsaných platí analogicky k (7.13)

$$r \geq 3p, \quad (7.16)$$

kdy středy stran trojúhelníka nahradíme těžišti jednotlivých stěn čtyřstěnu.

Kapitola 8

Pravidelné mnohoúhelníky

S pravidelnými mnohoúhelníky se v životě často setkáváme - ve stavitelství a architektuře, v umění, v živé či neživé přírodě a mnoha dalších oborech lidské činnosti. Pravidelné mnohoúhelníky hrály v historii důležitou roli při odvození vzorce pro obsah a obvod kruhu atd. Představa pravidelného mnohoúhelníka je přístupná i žákům na základní škole a tedy by se zdálo, že nic nového zde nemůžeme objevit. S jedním ze zajímavých objevů je svázána následující příhoda.

Před vánočními dny roku 1969 navštívili známého matematika B.L. van der Waerdena dva chemici A. Dreiding a J.D. Dunitz. Druhý z nich vyprávěl o pevných a pohyblivých tvarech cyklohexanů a cyklooktanů. Zmínil také cyklopentan a tvrdil, že pětiúhelník v prostoru, který má stejné délky stran a stejné úhly, musí být nutně rovinný. Van der Waerden byl tímto tvrzením překvapen, neboť žádná z jemu známých teorií takto "jednoduché" tvrzení nezmiňovala.

Již v 10. února 1970 měl B.L. van der Waerden na matematickém kolokviu v Zürichu přednášku "Ein Satz über räumliche Fünfecke", jejímž tématem byl důkaz následující věty [99]:

Prostorový pětiúhelník, který má stejné všechny strany a všechny úhly, je rovinný.

Po zveřejnění článku [99] byla tato věta během krátké doby dokázána řadou matematiků několika způsoby, viz [55], [93], [12], [40], [44], [100], [19], [54]. V článku [19] je zmíněno, že tuto význačnou vlastnost pětiúhelníka znal již v roce 1944 J. Waser [102]. B. Grünbaum [29] píše, že tuto vlastnost pravidelného prostorového pětiúhelníka (tj. rovnostranného a rovnoúhlého) znal již v roce 1911 A. Auric [2]. Podrobnější informace o této problematice podává přehledový článek [29], kde je uvedeno, že úplnou charakteristiku pravidelných n -úhelníků v prostoru provedli v roce 1962 V.A. Jefremovič a Ju.S. Il'jaščenko [41]. Nejnovější odkaz viz [7].

Nejprve uvedeme definici pravidelného mnohoúhelníka.

Mnohoúhelník P_0, P_1, \dots, P_{n-1} , jehož všechny strany mají stejnou délku, tj. $|P_j P_{j+1}|$ je konstantní pro všechna $j = 0, 1, \dots, n-1$, nazýváme *rovnostranný*. Podobně n -úhelník je *k-rovnostranný*, jestliže $|P_j P_{j+\nu}| = d_\nu$ pro všechna $j = 0, 1, \dots, n-1$ a $\nu = 1, 2, \dots, k$, kde konstanty d_ν jsou *parametry*. Mnohoúhelník nazýváme *pravidelný*, jestliže pro všechna $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ je délka úseček $P_j P_{j+\nu}$ nezávislá na j , nebo jinými slovy, jestliže je mnohoúhelník $(n-1)$ -rovnostranný.

Tedy rovnostranný n -úhelník je 1-rovnostranný s parametrem d_1 , 2-rovnostranný n -úhelník je rovnostranný a rovnoúhlý s parametry d_1, d_2 atd. Zavedeme-li $d_0 = 0$, potom je pravidelný n -úhelník charakterizován vztahy

$$|P_j P_{j+\nu}| = d_\nu, \quad \text{pro všechna } j, \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (8.1)$$

což znamená, že všechny úhlopříčky "téhož" typu (ob jeden vrchol, ob dva vrcholy,...) mají stejnou délku.

Ještě zavedeme pojem dimenze mnohoúhelníka. Budeme říkat, že n -úhelník má *dimenzi* d , jestliže d je dimenze nejmenšího podprostoru afinního prostoru A^N , ve kterém je mnohoúhelník obsažen.

8.1 Pravidelný pětiúhelník

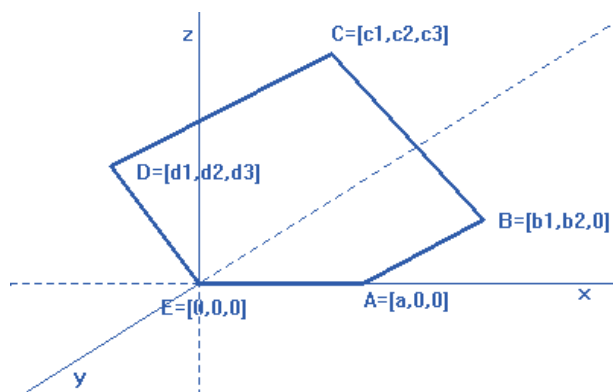
Dokážeme následující, nahoře zmíněnou větu:

V prostoru E^3 je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Potom je tento pětiúhelník rovinný.

Větu nejprve dokážeme pomocí počítače. Předpokládejme, že pětiúhelník je rovnostranný s délkou strany a a rovnoúhlý s délkou úhlopříčky u .

Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pro vrcholy pětiúhelníka $ABCDE$ platilo $A = [a, 0, 0]$, $B = [b_1, b_2, 0]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$, $E = [0, 0, 0]$, obr. 8.1. Platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} |AB| = a &\Leftrightarrow h_1 : (b_1 - a)^2 + b_2^2 - a^2 = 0, \\ |BC| = a &\Leftrightarrow h_2 : (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + c_3^2 - a^2 = 0, \\ |CD| = a &\Leftrightarrow h_3 : (d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 + (d_3 - c_3)^2 - a^2 = 0, \\ |DE| = a &\Leftrightarrow h_4 : d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - a^2 = 0, \\ |AC| = u &\Leftrightarrow h_5 : (c_1 - a)^2 + c_2^2 + c_3^2 - u^2 = 0, \\ |BD| = u &\Leftrightarrow h_6 : (d_1 - b_1)^2 + (d_2 - b_2)^2 + d_3^2 - u^2 = 0, \\ |CE| = u &\Leftrightarrow h_7 : c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - u^2 = 0, \\ |DA| = u &\Leftrightarrow h_8 : (d_1 - a)^2 + d_2^2 + d_3^2 - u^2 = 0, \\ |EB| = u &\Leftrightarrow h_9 : b_1^2 + b_2^2 - u^2 = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 8.1: Pravidelný pětiúhelník

Body $ABCDE$ leží v jedné rovině \Leftrightarrow

$$z_1 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{a zároveň} \quad z_2 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.2)$$

Vyšetříme, zda oba polynomy z_1, z_2 závěru jsou prvkem radikálu ideálu I . Budeme tedy zjišťovat, zda $1 \in J$, kde $J = I \cup \{ab_2c_3t - 1\}$ a $I = (h_1, h_2, \dots, h_9)$. Budeme zkoumat každý polynom z_1, z_2 zvlášť. Pro z_1 vychází

```
Use R:=Q[aub[1..3]c[1..3]d[1..3]st];
J:=Ideal((b[1]-a)^2+b[2]^2-a^2,(c[1]-b[1])^2+(c[2]-b[2])^2+
c[3]^2-a^2,(d[1]-c[1])^2+(d[2]-c[2])^2+(d[3]-c[3])^2-a^2,
d[1]^2+d[2]^2+d[3]^2-a^2,(c[1]-a)^2+c[2]^2+c[3]^2-u^2,(d[1]-
b[1])^2+(d[2]-b[2])^2+d[3]^2-u^2,c[1]^2+c[2]^2+c[3]^2-u^2,
(d[1]-a)^2+d[2]^2+d[3]^2-u^2,b[1]^2+b[2]^2-u^2,ab[2]c[3]t-1);
NF(1,J);
```

normální forma $\text{NF}(1, J)=0$. To znamená, body A, B, C, E leží v jedné rovině. Obdobně se dokáže, že také body A, B, D, E leží v jedné rovině. Odtud již plyne tvrzení věty - pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ v prostoru je rovinný. \square

Poznámka:

V posledním příkladu jsme vyšetřovali $\text{NF}(1, J)$, kde ideál J obsahoval negaci závěru $ab_2c_3t - 1$. Výsledek $\text{NF}(1, J)=0$ znamená, že závěr ab_2c_3 je prvkem radikálu ideálu I , odkud plyne $ab_2c_3 = 0$.

Pripomeňme definíciu radikálu \sqrt{I} ideálu I : Je-li I ideál, potom *radikál* ideálu I , značíme jej \sqrt{I} , je množina $\{f; \exists m \in \mathbb{N} \text{ takové, že } f^m \in I\}$.

Vždy platí $I \subseteq \sqrt{I}$. Obvykle však stačí vyšetřit zda závěr ab_2c_3 je prvkom ideálu I . Provedme to. Dostaneme

```
Use R := Q[aub[1..3]c[1..3]d[1..3]st];
I := Ideal((b[1]-a)^2+b[2]^2-a^2, (c[1]-b[1])^2+(c[2]-b[2])^2+
c[3]^2-a^2, (d[1]-c[1])^2+(d[2]-c[2])^2+(d[3]-c[3])^2-a^2,
d[1]^2+d[2]^2+d[3]^2-a^2, (c[1]-a)^2+c[2]^2+c[3]^2-u^2, (d[1]-
b[1])^2+(d[2]-b[2])^2+d[3]^2-u^2, c[1]^2+c[2]^2+c[3]^2-u^2,
(d[1]-a)^2+d[2]^2+d[3]^2-u^2, b[1]^2+b[2]^2-u^2);
NF(ab[2]c[3], I);
```

výsledek ab_2c_3 a nikoliv nulu. Tedy polynom ab_2c_3 do ideálu I *nepatří!* Do radikálu \sqrt{I} ideálu I však ano, tj. existuje prirodzené m takové, že $(ab_2c_3)^m$ je prvkom ideálu I . Snadno zistíme, že v tomto prípade je $m = 3$, tj. $(ab_2c_3)^3 \in I$. S.Ch. Chou v [39] na strane 78 píše, že ve všech větách, kterými se v [39] zabýval, se ideál I rovnal svému radikálu \sqrt{I} ideálu I . Proto nebylo nutné vyšetřovat, zda závěr tvrzení patří do radikálu \sqrt{I} ideálu I . Obecně totiž I je podmnožinou svého radikálu ideálu, v našem prípade je I *vlastní* podmnožinou svého radikálu ideálu. Polynom ab_2c_3 *není* prvkom ideálu I , ale patří do jeho radikálu \sqrt{I} . Předchozí příklad se tak stal jedním z příkladů, kdy je nutné použít uvedený postup. \square

Nyní ukážeme klasický důkaz skutečnosti, že pravidelný pětiúhelník v prostoru E^3 je rovinný. Z mnoha známých důkazů není žádný elementární, u všech jsou nutné hlubší znalosti z algebry či geometrie. A navíc sotva lze některý z nich nazvat klasický. Uvedeme důkaz, který publikoval O. Bottema [12] v roce 1973, viz též [44].

Dokážeme větu:

Pravidelný pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ leží buď v E^4 nebo v E^2 , tj. má dimenzi 4 nebo 2.

Při důkazu věty použijeme následující vzorec pro objem simplexu. Zde připomeňme definíci simplexu:

Body A_1, A_2, \dots, A_{n+1} afinního prostoru A^n tvoří *simplex*, jestliže jsou vektory $A_1 - A_2, A_1 - A_3, \dots, A_1 - A_{n+1}$ lineárně nezávislé.

Např. úsečka je simplex na přímce, trojúhelník je simplex v rovině, čtyřstěn v třírozměrném prostoru, atd.

Objem V_n simplexu A_1, A_2, \dots, A_{n+1} v E^n lze vyjádřit pomocí všech vzájemných vzdáleností $|A_iA_j| = a_{ij}$ mezi vrcholy simplexu ve tvaru tzv. Cayley-

Mengerova determinantu. Označíme-li $a_{ij}^2 = d_{ij}$, potom platí [5]:

$$(-1)^{n+1} n^2 (n!)^2 V_n^2 = D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1,n+1} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & \dots & d_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_{n+1,1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.3)$$

Položíme-li $V_n = 0$ potom podle (8.3) také $D_n = 0$ a simplex A_1, A_2, \dots, A_{n+1} lze umístit do prostoru, jehož dimenze je menší než n .

Minimální dimenze prostoru, ve kterém můžeme uvažovat libovolný pětiúhelník, je čtyři. V Eukleidovském prostoru E^4 uvažujme pravidelný pětiúhelník $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Vrcholy pětiúhelníka v prostoru E^4 tvoří simplex, jehož objem V_4 lze vyjádřit pomocí vzájemných vzdáleností vrcholů mezi sebou.

Označme délky jeho stran a úhlopříček

$$|A_1 A_2| = |A_2 A_3| = |A_3 A_4| = |A_4 A_5| = |A_5 A_1| = a, \quad |A_1 A_3| = |A_3 A_5| = |A_5 A_2| = |A_2 A_4| = |A_4 A_1| = b.$$

Podle (8.3) pro simplex $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ v E^4 platí

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & b^2 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -5(a^2 + ab - b^2)^2 (a^2 - ab - b^2)^2. \quad (8.4)$$

Determinant (8.4) můžeme vypočítat přímo nebo lze využít např. příkaz `Det(M)` programu `CoCoA`, který matici M přiřadí její determinant. Zadáme

```
Use R:=Q[ab];
M:=Mat([[0,1,1,1,1,1],[1,0,a^2,b^2,b^2,a^2],[1,a^2,0,a^2,b^2,b^2],
[1,b^2,a^2,0,a^2,b^2],[1,b^2,b^2,a^2,0,a^2],[1,a^2,b^2,b^2,a^2,0]]);
Det(M);
```

a dostaneme polynom $-5a^8 + 30a^6b^2 - 55a^4b^4 + 30a^2b^6 - 5b^8$, ze kterého příkazem `Factor` obdržíme shora uvedený výsledek (8.4). Je-li $D_4 = 0$, potom lze pětiúhelník $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ umístit v prostoru, jehož dimenze je menší než čtyři.

Nyní uvažujme čtyři za sebou jdoucí vrcholy pětiúhelníka, např. A_1, A_2, A_3, A_4 , které tvoří simplex v prostoru E^3 a zkoumejme jeho objem. Podle (8.3)

stačí v determinantu (8.4) vynechat poslední řádek a sloupec. Vychází

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -2(a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab - b^2). \quad (8.5)$$

V rozkladu (8.5) se objevují tytéž polynomy jako v (8.4). Tedy $D_4 = 0$ implikuje $D_3 = 0$. To znamená, že body A_1, A_2, A_3, A_4 leží v jedné rovině. Analogicky se dokáže, že čtveřice A_1, A_2, A_3, A_5 leží také v jedné rovině. Tedy pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ musí být rovinný. \square

Pravidelný pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ o straně a a úhlopříčce b splňuje podle (8.4) a (8.5) rovnici

$$(a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab - b^2) = 0, \quad (8.6)$$

ze které dostaneme poměr strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka, obr. 8.2. Z rovnice

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \quad (8.7)$$

plyne vztah

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618\dots,$$

který platí pro konvexní pravidelný pětiúhelník, obr. 8.2 vlevo, a z rovnice $a^2 - ab - b^2 = 0$ dostaneme vztah

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots,$$

který charakterizuje pravidelný hvězdicový pětiúhelník (někdy se též říká pentagram), obr. 8.2 vpravo.

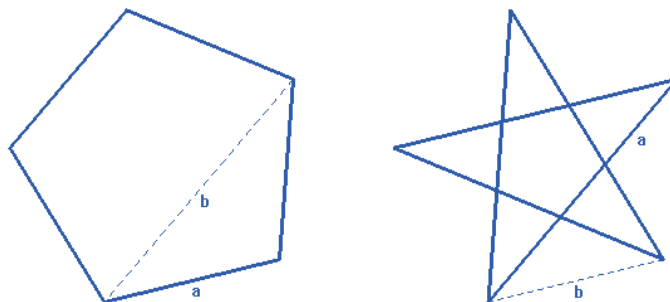
Číslo $\Phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618\dots$ se nazývá *zlatý poměr*. Vyskytuje v živé či neživé přírodě a v mnoha oborech lidské činnosti. Říkáme, že úsečka, která je rozdělena na dvě části v poměru Φ , je rozdělena tzv. *zlatým řezem*.

Rovnici (8.7) můžeme odvodit též přímo např. takto. V konvexním pravidelném pětiúhelníku platí, obr. 8.2 vlevo

$$a = 2R \sin \frac{\pi}{5}, \quad b = 2R \sin \frac{2\pi}{5}, \quad (8.8)$$

kde R je poloměr kružnice pětiúhelníku opsané. Vyjdeme ze vztahu

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5},$$



Obrázek 8.2: Konvexní a nekonvexní pravidelný pětiúhelník

který jistě platí. Vynásobením této rovnice výrazem $\sin \frac{2\pi}{5}$ s použitím vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu dostaneme

$$\sin^2 \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5}.$$

Užití vzorce pro převod ze součinu goniometrických funkcí na jejich součet dává

$$\sin^2 \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \left(\sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \right).$$

Odtud s pomocí (8.8) dostaneme (8.7).

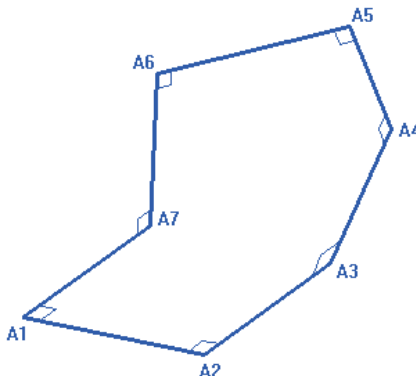
Obdobně se dokáže vztah pro nekonvexní pravidelný pětiúhelník. Stačí v (8.7) zaměnit a a b .

Ukažme ještě důkaz tvrzení, že rovnostranný a rovnoúhlý pětiúhelník v E^3 je nutně rovinný, který zaslali Van der Waerdenovi v roce 1972 G. Bol a H.S.M. Coxeter [100]. Tento důkaz je velmi elegantní:

Jsou-li dány délky stran a a úhly α , potom jsou určeny všechny vzdálenosti mezi vrcholy pětiúhelníka $A_1A_2A_3A_4A_5$. Potom existuje shodné zobrazení \mathcal{S} , které vrcholy cyklicky permutuje, tj. přiřadí dvojici A_iA_j dvojici $A_{i+1}A_{j+1}$ pro $i, j = 1, 2, \dots, 5$. Protože složené zobrazení \mathcal{S}^5 je identita, nemůže být shodným zobrazením rovinná souměrnost. Dále, zobrazení \mathcal{S} má samodružný bod - těžiště pětiúhelníka, můžeme proto vyloučit posunutí. Tedy \mathcal{S} je otočení a pětiúhelník leží v rovině, která je kolmá k ose otáčení. \square

8.2 Pravidelný sedmiúhelník

Případ pravidelného pětiúhelníka z předchozí části je velmi známý. Podívejme se nyní na pravidelný sedmiúhelník a jeho existenci v prostorech různé dimenze. Nechť $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ je pravidelný sedmiúhelník. Podle definice



Obrázek 8.3: Příklad rovnostranného a rovnoúhlého sedmiúhelníka, který není pravidelný

je pravidelný sedmiúhelník 3-rovnostranný. Zde upozorníme na skutečnost, že podmínky rovnostrannost a rovnoúhlost, které stačily v případě pravidelného pětiúhelníka, jsou u pravidelného sedmiúhelníka nedostačující. Např. na obr. 8.3 vidíme, že $|A_7A_3| \neq |A_1A_4|$.

V pravidelném sedmiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ označme

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5| = |A_5A_6| = |A_6A_7| = |A_7A_1| = a, \\ |A_1A_3| &= |A_3A_5| = |A_5A_7| = |A_7A_2| = |A_2A_4| = |A_4A_6| = |A_6A_1| = b, \\ |A_1A_4| &= |A_4A_7| = |A_7A_3| = |A_3A_6| = |A_6A_2| = |A_2A_5| = |A_5A_1| = c. \end{aligned}$$

Uvažujme sedmiúhelník v šesti-rozměrném eukleidovském prostoru E^6 , což je prostor nejmenší dimenze, do kterého můžeme libovolný sedmiúhelník vždy umístit. Podle vzorce (8.3) pro objem simplexu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ v E^6 platí

$$D_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 & c^2 & b^2 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 & c^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 & c^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & c^2 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \quad (8.9)$$

$$= -7(a^6 + 3a^4b^2 - 4a^2b^4 + b^6 - 4a^4c^2 - a^2b^2c^2 + 3b^4c^2 + 3a^2c^4 - 4b^2c^4 + c^6)^2.$$

Při výpočtu determinantu (8.9) jsme opět použili příkazy `Det` a `Factor` programu `CoCoA`. Nyní vyjádříme objem simplexu, který je určen body $A_1, A_2,$

A_3, A_4, A_5, A_6 tím, že v předchozím determinantu vyškrtáme poslední řádek a sloupec. Vychází

$$D_5 = 2(2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4)(a^6 + 3a^4b^2 - 4a^2b^4 + b^6 - 4a^4c^2 - a^2b^2c^2 + 3b^4c^2 + 3a^2c^4 - 4b^2c^4 + c^6).$$

Porovnáním determinantů D_6 a D_5 dostaneme, že $D_6 = 0$ implikuje $D_5 = 0$. Tedy není-li sedmiúhelník obsažen v šestiřozměrném prostoru, není ani v prostoru pětiřozměrném. Je proto obsažen v prostoru dimenze čtyři a menší.

Pokračujme dále a vyjádříme objem simplexu, který je určen body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Vychází

$$D_4 = -(a^4 - 12a^2b^2 + 8b^4 + 2a^2c^2 - 5b^2c^2 + c^4)(a^2 - bc - c^2)(a^2 + bc - c^2).$$

Položíme $D_4 = 0$. To znamená, že simplex $A_1A_2A_3A_4A_5$ leží v prostoru dimenze tři a menší. Zkoumejme dále objem čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ v E^3 . Dostaneme

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & a^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \quad (8.10)$$

$$= -2(a^2 - b^2 + ac)(a^2 - b^2 - ac)(a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Pokud by podmínka $D_4 = 0$ (za předpokladu, že platí i $D_6 = 0$) implikovala $D_3 = 0$, potom by čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 ležely v jedné rovině. Zopakujeme-li stejný postup pro další dvě čtveřice bodů, potom by odtud plynulo, že sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ leží v jedné rovině.

Determinanty D_4 a D_3 na první pohled stejné faktory neobsahují, a tak by se mohlo zdát, že uvedená implikace neplatí.

Výpočet provedeme pomocí počítače. Předpokládejme, že pro pravidelný sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ platí $D_6 = 0$ a $D_4 = 0$. Vyšetříme, zda potom platí $D_3 = 0$. Tedy je dán ideál $I = (D_6, D_4)$ a ptáme se zda D_3 je prvkem radikálu \sqrt{I} ideálu I . Zadáme

```
Use R:=Q[abct];
I:=Ideal(a^6+3a^4b^2-4a^2b^4+b^6-4a^4c^2-a^2b^2c^2+3b^4c^2+3a^2c^4-4b^2c^4+c^6,
(a^4-12a^2b^2+8b^4+2a^2c^2-5b^2c^2+c^4)(a^2-bc-c^2)(a^2+bc-c^2),
(a^2-b^2+ac)(a^2-b^2-ac)(a^2+2b^2-c^2)t-1);
NF(1,I);
```

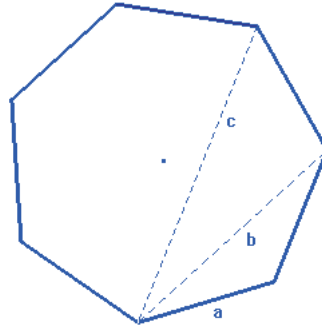
a dostaneme výsledek $\text{NF}(1, I) = 0$. Dokázali jsme větu:

Pravidelný sedmiúhelník leží buď v prostoru E^6 nebo E^4 nebo E^2 , tj. má dimenzi buď 6 nebo 4 nebo 2.

Z rovnic $D_4 = 0$ a $D_3 = 0$ dostáváme vztahy, za kterých můžeme vypočítat délky stran a úhlopříček a, b, c v pravidelném sedmiúhelníku. Soustava

$$a^2 + ac - b^2 = 0, \quad a^2 + bc - c^2 = 0 \quad (8.11)$$

charakterizuje pravidelný konvexní sedmiúhelník, obr. 8.4. Obdobně dosta-



Obrázek 8.4: Pravidelný konvexní sedmiúhelník

neme rovnice pro zbývající dva nekonvexní hvězdicové sedmiúhelníky, obr. 8.5. Pro sedmiúhelník na obr. 8.5 vlevo (tzv. 2-regulární sedmiúhelník) platí

$$c^2 + bc - a^2 = 0, \quad c^2 + ab - b^2 = 0$$

a pro sedmiúhelník na obr. 8.5 vpravo (tzv. 3-regulární sedmiúhelník)

$$b^2 + ab - c^2 = 0, \quad b^2 + ac - a^2 = 0.$$

Dokažme přímo např. první rovnici v (8.11)

$$a^2 + ac - b^2 = 0, \quad (8.12)$$

která platí pro pravidelný konvexní sedmiúhelník, obr. 8.4.

Platí

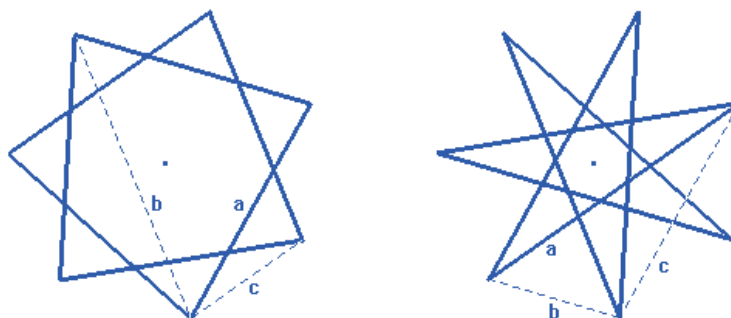
$$a = 2R \sin \frac{\pi}{7}, \quad b = 2R \sin \frac{2\pi}{7}, \quad c = 2R \sin \frac{3\pi}{7}, \quad (8.13)$$

kde R je poloměr kružnice sedmiúhelníku opsané. Vyjdeme ze vztahu

$$\sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{5\pi}{7}.$$

Vynásobením této rovnice výrazem $\sin \frac{2\pi}{7}$ s použitím vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu dostaneme

$$\sin^2 \frac{2\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7}.$$



Obrázek 8.5: Pravidelné nekonvexní sedmiúhelníky

Užití vzorce pro převod ze součiny goniometrických funkcí na jejich součet dává

$$\sin^2 \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right).$$

Tuto rovnici vynásobíme $4R^2$ a vzhledem k (8.13) dostaneme (8.12). Obdobná úloha byla řešena ve 22. ročníku matematické olympiády kat.A, [98].

Poznámky:

1) Při posledním výpočtu jsme dokázali, že polynom D_3 je prvkem radikálu \sqrt{I} ideálu I . Pokud bychom zkoumali, zda polynom D_3 je prvkem ideálu I a ne jeho radikálu, dostaneme

Use R::=Q[abct];

I:=Ideal(a^6+3a^4b^2-4a^2b^4+b^6-4a^4c^2-a^2b^2c^2+3b^4c^2
+3a^2c^4-4b^2c^4+c^6, (a^4-12a^2b^2+8b^4+2a^2c^2-5b^2c^2+c^4)
(a^2-bc-c^2)(a^2+bc-c^2));

NF((a^2-b^2+ac)(a^2-b^2-ac)(a^2+2b^2-c^2), I);

výsledek $-3a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 + 2a^4c^2 + a^2b^2c^2 - 4b^4c^2 - 2a^2c^4 + 4b^2c^4 - c^6$.

Tedy polynom $D_3 = (a^2 - b^2 + ac)(a^2 - b^2 - ac)(a^2 + 2b^2 - c^2)$ není prvkem ideálu I . Opět jsme se zde setkali se skutečností, že nestačí zkoumat, zda daný polynom patří do ideálu I , nýbrž je nutné vyšetřovat jeho existenci v radikálu \sqrt{I} ideálu I . Při bližším zkoumání zjistíme, že polynom D_3^3 je prvkem ideálu I .

2) Izoperimetrická nerovnost pro n -úhelníky v rovině [6] říká, že ze všech n -úhelníků daného obvodu má největší obsah pravidelný n -úhelník. Prostorová analogie izoperimetrické nerovnosti je následující [9]:

Ze všech n -úhelníků v prostoru E^d o daném obvodu naleznete ten, který má

maximální objem konvexního obalu.

Tato prostorová analogie izoperimetrické nerovnosti pro n -úhelníky je vyřešena v prostorech *sudé* dimenze d , kde jsou řešením jisté pravidelné n -úhelníky, které jsou vícedimenzionálními analogiemi pravidelných mnohoúhelníků v rovině [65].

V prostoru *liché* dimenze d úloha dosud vyřešena není. Je známo několik speciálních případů v E^3 pro prostorový čtyřúhelník [58], pětiúhelník a šestiúhelník [49], [50]. Zajímavý je zvláště optimální pětiúhelník, který podle právě uvedené teorie *nemůže* být pravidelný. Vzniká tedy přirozená otázka, jak vypadají v E^3 optimální n -úhelníky pro $n \geq 7$? \square

Uvedeme ještě znění věty pro n -úhelníky s libovolným počtem vrcholů. Platí, viz např. [7]:

Pravidelný mnohoúhelník s lichým počtem vrcholů má sudou dimenzi.

Kapitola 9

Různé

V této kapitole se budeme zabývat řešením několika dalších problémů, které pokládáme za zajímavé.

9.1 Neelementární konstrukční úloha

Díky moderním prostředkům jako jsou počítače, matematický software a teorie automatického dokazování vět jsme schopni vyřešit i úlohy, které nejsou elementární. Příkladem takové neelementární úlohy je následující problém, viz též [43]:

V rovině jsou dány čtyři přímky a, b, c, d . Sestrojte čtverec $KLMN$ tak, aby $K \in a, L \in b, M \in c, N \in d$.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $K = [k_1, k_2], L = [l_1, l_2], M = [m_1, m_2], N = [n_1, n_2]$ a necht' přímky a, b, c, d mají rovnice

$$a : a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad b : b_1x + b_2y + b_3 = 0, \quad c : c_1x + c_2y + c_3 = 0, \\ d : d_1x + d_2y + d_3 = 0.$$

Předpokládejme, že $K \in a$ a $L \in b$. Abychom zajistili, že $KLMN$ je čtverec, jehož vrcholy M, N leží např. po řadě na přímkách c, d , otočíme vektor $L - K$ o 90° v kladném smyslu. Dostaneme vektor $N - K$, který označíme $\text{rot}(L - K) = N - K$. Potom otočíme vektor $K - N$ o 90° v témže smyslu a dostaneme vektor $M - N$, atd., viz obr. 9.1. Dostáváme relace:

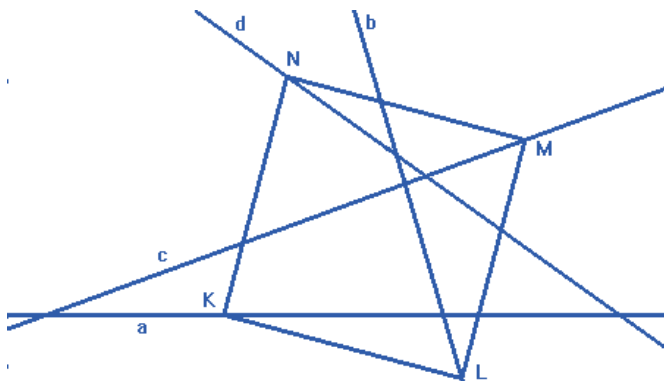
$$K \in a \Leftrightarrow a_1k_1 + a_2k_2 + a_3 = 0,$$

$$L \in b \Leftrightarrow b_1l_1 + b_2l_2 + b_3 = 0,$$

$$M \in c \Leftrightarrow c_1m_1 + c_2m_2 + c_3 = 0,$$

$$N \in d \Leftrightarrow d_1n_1 + d_2n_2 + d_3 = 0,$$

$$\text{rot}(L - K) = N - K \Leftrightarrow -(l_2 - k_2) = n_1 - k_1 \wedge l_1 - k_1 = n_2 - k_2,$$



Obrázek 9.1: Čtverec $KLMN$, jehož vrcholy jsou po řadě na daných přímkách a, b, c, d .

$$\text{rot}(K - N) = M - N \Leftrightarrow -(k_2 - n_2) = m_1 - n_1 \wedge k_1 - n_1 = m_2 - n_2,$$

$$\text{rot}(N - M) = L - M \Leftrightarrow -(n_2 - m_2) = l_1 - m_1 \wedge n_1 - m_1 = l_2 - m_2,$$

$$\text{rot}(M - L) = K - L \Leftrightarrow -(m_2 - l_2) = k_1 - l_1 \wedge m_1 - l_1 = k_2 - l_2.$$

Máme celkem 12 rovnic s 8 neznámými $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$. Eliminací všech proměnných kromě k_1 dostaneme

$$k_1 = \frac{b_2c_1 + b_2c_2 + c_1d_1 + c_2d_1 - b_2d_2 - c_1d_2 + c_2d_2 + c_1 - c_2 - d_1}{b_2c_1d_1 + b_2c_2d_1 - b_2c_1d_2 + c_1d_1 - c_1d_2 + c_2d_2}.$$

Podobně nalezneme další neznámé. Jedno z řešení můžeme vidět na obr. 9.1. Z konstrukce je vidět, že existují nejvýše čtyři čtverce K, L, M, N s danými vlastnostmi. \square

Můžeme postupovat také jiným způsobem, viz [43].

Označme souřadnice čtverce $KLMN$ a rovnice přímků a, b, c, d stejně jako nahoře a uvažujme čtverec $ABCD$ s vrcholy $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$, $D = [0, -1]$. Hledáme takovou podobnost φ

$$\varphi : x' = px - qy + r, \quad y' = qx + py + s,$$

kde p, q, r, s jsou neznámé reálné koeficienty, která zobrazí čtverec $ABCD$ do čtverce $KLMN$. Máme

$$\varphi([1, 0]) = [p + r, q + s],$$

$$\varphi([0, 1]) = [-q + r, p + s],$$

$$\varphi([-1, 0]) = [-p + r, -q + s],$$

$$\varphi([0, -1]) = [q + r, -p + s].$$

Odtud dostaneme systém rovnic

$$\begin{aligned}h_1 &: a_1(p+r) + a_2(q+s) + a_3 = 0, \\h_2 &: b_1(-q+r) + b_2(p+s) + b_3 = 0, \\h_3 &: c_1(-p+r) + c_2(-q+s) + c_3 = 0, \\h_4 &: d_1(q+r) + d_2(-p+s) + d_3 = 0.\end{aligned}$$

Budeme řešit soustavu algebraických rovnic $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0, h_4 = 0$ vzhledem k neznámým p, q, r, s . Dostaneme

```
Use R:=Q[a[1..3]b[1..3]c[1..3]d[1..3]pqrs];
I:=Ideal(a[1](p+r)+a[2](q+s)+a[3],b[1](-q+r)+b[2](p+s)+b[3],
c[1](-p+r)+c[2](-q+s)+c[3],d[1](q+r)+d[2](-p+s)+d[3],a[2]-1,
a[1],a[3],b[3]+1,c[3]+1,d[3]+1,b[1]-1,p+r-x,p+s-y);
Elim(q..s,I);
```

stejný výsledek jako nahoře. □

Poznámka:

Při řešení úloh pomocí počítače velmi záleží na tom, jakým způsobem úlohu řešíme. Můžeme např. použít různé druhy a volby soustavy souřadnic, geometrické veličiny můžeme vyjádřit několika způsoby, můžeme použít různé strategie řešení. To vše má vliv na konečný výsledek. Může se stát, že jednou metodou úlohu vůbec nevyřešíme, zatímco jiná metoda vede v krátkém čase k řešení.

Poslední příklad jsme řešili dvěma různými způsoby. Je zřejmé, že druhý způsob je efektivnější a vede k rychlejšímu řešení (méně neznámých, jednodušší rovnice aj.)

Pokud se nám nedaří úlohu vyřešit, je potřeba najít lepší a "sofistikovanější" metodu. Právě vyřešená úloha je vhodným příkladem. □

9.2 Množina bodů daných vlastností

V této kapitole budeme vyšetřovat množinu bodů daných vlastností metodou eliminace proměnných. Budeme řešit příklad:

Na stranách BC , CA a AB trojúhelníka ABC jsou po řadě dány body D , E , F , které dělí strany ve stejném poměru k , tj. pro které platí

$$k = (BCD) = (CAE) = (ABF),$$

kde k je dělicí poměr. Určete množinu středů kružnic opsaných trojúhelníku DEF při měnícím se k .

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pro souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC platilo $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [b, c]$. Označme dále $D = [d_1, d_2]$, $E = [e_1, e_2]$, $F = [f_1, f_2]$, přičemž

$$D \in BC \Leftrightarrow cd_1 + (a-b)d_2 - ac = 0,$$

$$E \in CA \Leftrightarrow ce_1 - be_2 = 0,$$

$$F \in AB \Leftrightarrow f_2 = 0.$$

Dále pro dělicí poměry platí

$$k = (BCD) \Leftrightarrow D - B = k(D - C) \Leftrightarrow (d_1 a, d_2) = k(d_1 - b, d_2 - c).$$

Analogicky

$$k = (CAE) \Leftrightarrow (e_1 - b, e_2 - c) = k(e_1, e_2),$$

$$k = (ABF) \Leftrightarrow (f_1, 0) = k(f_1 - a, 0).$$

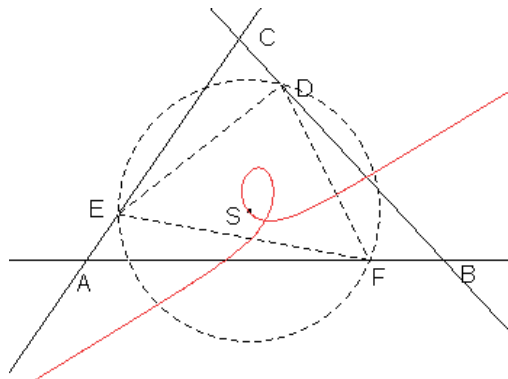
Pro střed $S = [x, y]$ kružnice opsané trojúhelníku DEF platí $S \in o_A \cap o_B$, kde o_A a o_B jsou osy stran EF a FD , tj.

$$S \in o_A \Leftrightarrow (e_1 - f_1)x + e_2 y - (e_1^2 - f_1^2 + e_2^2)/2 = 0$$

a

$$(d_1 - f_1)x + d_2 y - (d_1^2 - f_1^2 + d_2^2)/2 = 0.$$

Budeme eliminovat všechny proměnné kromě a, b, c, x, y . Napíšeme



Obrázek 9.2: Křivka 3. stupně jako množina bodů dané vlastnosti

```
Use R := Q[abckd[1..2]e[1..2]f[1..2]xy];
I := Ideal (cd[1]+(a-b)d[2]-ac, ce[1]-be[2], d[1]-a-k(d[1]-b), d[2]-
k(d[2]-c), f[1]-k(f[1]-a), e[1]-b-ke[1], e[2]-c-ke[2], (d[1]-f[1])
x+d[2]y-(d[1]^2-f[1]^2+d[2]^2)/2, (e[1]-f[1])x+e[2]y-(e[1]^2-
f[1]^2+e[2]^2)/2);
```

Elim(k..f [2], I);

a jako odpověď dostaneme jediný polynom třetího stupně v x, y , který vede na rovnici:

$$\begin{aligned}
 & -8x^3(a-2b)(2a^2+ab-b^2-c^2)(a^2-ab+b^2)+24cx^2y(a^4-2a^3b+4ab^3-2b^4-a^2c^2+ \\
 & 2abc^2-2b^2c^2)+-24c^2xy^2(a-2b)(a^2+ab-b^2-c^2)+8c^3y^3(a^2+2ab-2b^2-2c^2)+ \\
 & 4x^2(5a^6-9a^5b+a^3b^3-9ab^5+5b^6-5a^4c^2+7a^3bc^2+3a^2b^2c^2-14ab^3c^2+10b^4c^2+ \\
 & 3a^2c^4-5abc^4+5b^2c^4)-4cxy(5a^5-8a^4b-a^3b^2+8a^2b^3+13ab^4-10b^5-9a^3c^2+ \\
 & 8a^2bc^2+18ab^2c^2-20b^3c^2+5ac^4-10bc^4)+4c^2y^2(3a^4-2a^3b-5a^2b^2-4ab^3+5b^4- \\
 & 5a^2c^2-4abc^2+10b^2c^2+5c^4)-4x(2a^7-2a^6b-2a^5b^2-2a^2b^5-2ab^6+2b^7-3a^5c^2+ \\
 & 2a^4bc^2+3a^3b^2c^2-4a^2b^3c^2-5ab^4c^2+6b^5c^2+3a^3c^4-2a^2bc^4-4ab^2c^4+6b^3c^4-ac^6+ \\
 & 2bc^6)+4cy(a^6-a^5b-a^4b^2+a^3b^3+3a^2b^4+ab^5-2b^6-3a^4c^2+a^3bc^2+6a^2b^2c^2+ \\
 & 2ab^3c^2-6b^4c^2+3a^2c^4+abc^4-6b^2c^4-2c^6)+a^8-2a^6b^2-a^4b^4-2a^2b^6+b^8-2a^6c^2+ \\
 & 2a^4b^2c^2-6a^2b^4c^2+4b^6c^2+3a^4c^4-6a^2b^2c^4+6b^4c^4-2a^2c^6+4b^2c^6+c^8=0.
 \end{aligned}$$

Křivkou je zřejmě kubika, obr. 9.2. \square

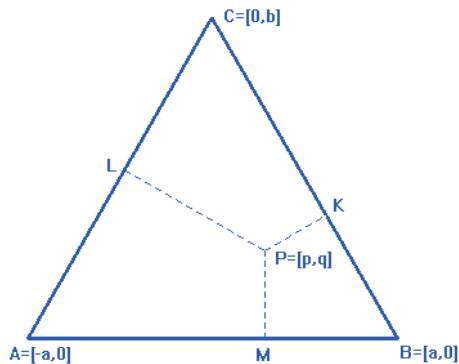
Ve speciálním případě pro $a = 2, b = 0, c = 2$ dostaneme rovnici třetího stupně

$$x^3 + y^3 - 3x^2 + xy - 3y^2 + 2x + 2y - 1 = 0, \quad (9.1)$$

která má jediný singulární bod $[1, 1]$. Substituce $x' = x + 1, y' = y + 1$ do (9.1) vede na rovnici

$$x'^3 + x'y' + y'^3 = 0,$$

což je známý *Descartesův list*.



Obrázek 9.3: Vivianiho věta: Součet vzdáleností bodu P od stran rovnostranného $\triangle ABC$ je konstantní

9.3 Vivianiho věta

Vivianiho věta [8] elementární geometrie říká, obr. 9.3:

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a libovolný bod P uvnitř trojúhelníka nebo na jeho hranici. Potom součet vzdáleností bodu P od stran trojúhelníka ABC je konstantní a je roven délce výšky h trojúhelníka ABC , tj.

$$|PK| + |PL| + |PM| = h, \quad (9.2)$$

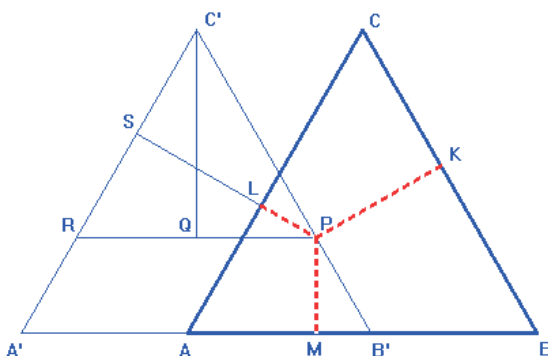
kde K, L, M jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany BC, CA, AB .

Změníme pořadí metod důkazů a větu nejprve dokážeme klasickým způsobem. Uvedeme elegantní důkaz, který pochází z [8], viz též [61].

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho shodný posunutý obraz $A'B'C'$ tak, že strana $B'C'$ prochází bodem P , obr. 9.4. Potom platí

$$h = |C'Q| + |PM| = |SP| + |PM| = |SL| + |LP| + |PM| = |PK| + |PL| + |PM|. \quad \square$$

Nyní budeme vyšetřovat Vivianiho větu pomocí počítače. Pokusíme se větu



Obrázek 9.4: Klasický důkaz Vivianiho věty: Součet vzdáleností bodu P od stran rovnostranného $\triangle ABC$ je konstantní

odvodit. Dokonce se nám podaří ještě více - větu zobecníme.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = [-a, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [0, b]$, $P = [p, q]$, $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, l_2]$, $M = [m, 0]$, obr. 9.3. Platí:

$$PK \perp BC \Leftrightarrow h_1 : a(p - k_1) - b(q - k_2) = 0,$$

$$K \in BC \Leftrightarrow h_2 : ab - bk_1 - ak_2 = 0,$$

$$PL \perp AC \Leftrightarrow h_3 : a(p - l_1) + b(q - l_2),$$

$$L \in AC \Leftrightarrow h_4 : bl_1 - al_2 + ab,$$

$$PM \perp AB \Leftrightarrow h_5 : a(p - m) = 0.$$

Označme dále $|PK| = u$, $|PL| = v$, $|PM| = w$. Potom

$$|PK| = u \Leftrightarrow h_6 : (p - k_1)^2 + (q - k_2)^2 - u^2,$$

$$|PL| = v \Leftrightarrow h_7 : (p - l_1)^2 + (q - l_2)^2 - v^2,$$

$$|PM| = w \Leftrightarrow h_8 : (p - m)^2 + q^2 - w^2.$$

V rovnostranném trojúhelníku ABC s délkou strany $2a$ platí

$$|AB| = |BC| = |CA| = 2a \Leftrightarrow h_9 : 3a^2 - b^2 = 0.$$

Abychom objevili (9.2), budeme hledat vztah mezi vzdálenostmi u, v, w a délkou strany $\triangle ABC$. V ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_9)$ eliminujme všechny proměnné kromě a, u, v, w . Dostaneme

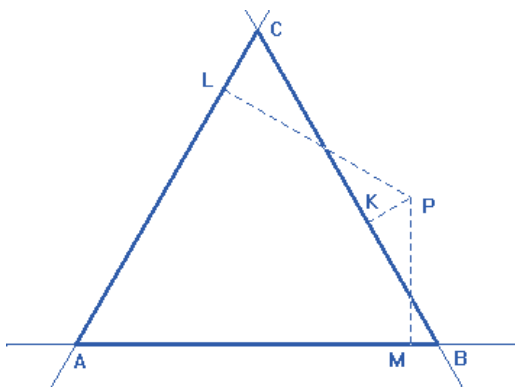
```
Use R := Q[a,u,v,w,p,q,b,k[1..2],l[1..2],m];
I := Ideal(a(p-k[1])-b(q-k[2]), ab-bk[1]-ak[2], a(p-l[1])+b(q-
l[2]), b1[1]-al[2]+ab, a(p-m), (p-k[1])^2+(q-k[2])^2-u^2, (p-
l[1])^2+(q-l[2])^2-v^2, (p-m)^2+q^2-w^2, 3a^2-b^2);
Elim(p..m,I);
```

jedinou rovnicí

$$a^2((-u+v+w)^2-3a^2)((u-v+w)^2-3a^2)((u+v-w)^2-3a^2)((u+v+w)^2-3a^2) = 0. \quad (9.3)$$

V rozkladu se vyskytuje výraz $(u+v+w)^2-3a^2$, který je ekvivalentní $|u+v+w| = a\sqrt{3}$, což je vztah (9.2). Avšak zřejmě existují i jiné možnosti. Jaký je geometrický význam rovnosti (9.3)? Podmínka $a \neq 0$ je podmínka degenerace trojúhelníka, kdy všechny tři vrcholy splývají. Tuto podmínku vyloučíme. Podmínky $(-u+v+w)^2-3a^2 = 0$, $(u-v+w)^2-3a^2 = 0$, $(u+v-w)^2-3a^2 = 0$ vyjadřují fakt, že "součet" vzdáleností bodu P od stran trojúhelníka ABC je konstantní i v případě, že bod P leží vně $\triangle ABC$. Pro vyjádření dané skutečnosti je vhodné zavést pojem orientované vzdálenosti bodu od přímky. *Orientovanou vzdáleností* bodu P od přímky AB je jeho vzdálenost od přímky AB , opatřená znaménkem $+$, pokud je směr postupu po obvodu trojúhelníka od P do A a B proti směru hodinových ručiček, tj. kladný. V opačném případě je orientovaná vzdálenost opatřená znaménkem $-$. Orientovanou vzdálenost bodu P od přímky AB značíme $\|P, AB\|$. Tedy např. $\|P, AB\| = -\|P, BA\|$. Odvodili jsme následující zobecnění Vivianiho věty pro libovolný bod roviny trojúhelníka, obr. 9.5.:

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a libovolný bod P roviny trojúhelníka.



Obrázek 9.5: $\|P, AB\| + \|P, BC\| + \|P, CA\| = u - v + w = h$.

Potom pro součet orientovaných vzdáleností bodu P od stran trojúhelníka platí

$$\|P, AB\| + \|P, BC\| + \|P, CA\| = h, \quad (9.4)$$

kde h je velikost výšky trojúhelníka ABC .

Připojíme ještě klasický důkaz (9.4). Pro obsah $|ABC|$ rovnostranného trojúhelníka ABC platí vztah

$$|ABC| = \|PAB\| + \|PBC\| + \|PCA\|, \quad (9.5)$$

kde $\|PAB\|$, $\|PBC\|$, $\|PCA\|$ jsou orientované obsahy trojúhelníků PAB , PBC , PCA . Předpokládejme, že délka strany $\triangle ABC$ je rovna $2a$. Rozepsáním vzorců pro obsah trojúhelníka z (9.5) dostaneme

$$ah = a\|P, AB\| + a\|P, BC\| + a\|P, CA\|.$$

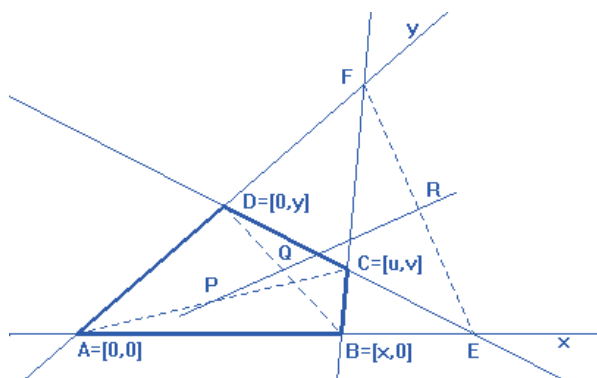
Odkud plyne (9.4). □

9.4 Gaussova přímka

Následující problém [48] uvedeme pod názvem *Gaussova přímka*. Uvádí jej též D. Wang v [101].

Střed úsečky, která spojuje průsečíky protilehlých stran čtyřúhelníka $ABCD$, leží na přímce, která spojuje středy úhlopříček.

Přímka, na níž zmíněné středy leží, se nazývá *Gaussova přímka*, obr. 9.6. Zvolme lineární soustavu souřadnic tak, že



Obrázek 9.6: Gaussova přímka

$A = [0, 0]$, $B = [x, 0]$, $C = [u, v]$, $D = [0, y]$, $E = [e, 0]$, $F = [0, f]$, $P = [p_1, p_2]$,
 $Q = [q_1, q_2]$, $R = [r_1, r_2]$.

Platí vztahy:

$$E \in AB \cap CD \Leftrightarrow h_1 : ev + uy - ey = 0,$$

$$F \in AD \cap BC \Leftrightarrow h_2 : fu + vx - fx = 0,$$

$$P \text{ je střed } AC \Leftrightarrow h_3 : 2p_1 - u = 0 \wedge h_4 : 2p_2 - v = 0,$$

$$Q \text{ je střed } BD \Leftrightarrow h_5 : 2q_1 - x = 0 \wedge h_6 : 2q_2 - y = 0,$$

$$R \text{ je střed } EF \Leftrightarrow h_7 : 2r_1 - e = 0 \wedge h_8 : 2r_2 - f = 0.$$

Závěr tvrzení z má tvar

$$PQR \text{ jsou kolineární} \Leftrightarrow z : p_1q_2 + q_1r_2 + r_1p_2 - r_1q_2 - r_2p_1 - p_2q_1 = 0.$$

Vychází

```
Use R := Q[xyuvefp[1..2]q[1..2]r[1..2]];
```

```
I := Ideal(ev+uy-ey, fu+vx-fx, 2p[1]-u, 2p[2]-v, 2q[1]-x, 2q[2]-y,  
2r[1]-e, 2r[2]-f);
```

```
NF(p[1]q[2]+q[1]r[2]+r[1]p[2]-r[1]q[2]-r[2]p[1]-p[2]q[1], I);
```

$NF(z, I) = 0$. Tedy normální forma polynomu z je rovna nule a tvrzení je dokázáno. \square

Nyní uvedeme klasický důkaz, který je podle [48] připisován přímo K.F. Gaussovi, obr. 9.6. Zápisem $\|ABC\|$ označujeme orientovaný obsah trojúhelníka ABC , atd.

Pro střed P úhlopříčky AC platí

$$\|PAB\| + \|PCD\| = \|PBC\| + \|PDA\| = \frac{1}{2}\|ABCD\|.$$

Analogicky pro střed Q úhlopříčky BD platí

$$\|QAB\| + \|QCD\| = \|QBC\| + \|QDA\| = \frac{1}{2}\|ABCD\|.$$

Předpokládejme, že R je střed úsečky EF . Potom platí

$$\|RAB\| = \frac{1}{2}\|FAB\|, \quad \|RDC\| = \frac{1}{2}\|FDC\|$$

a

$$\|RCB\| = \frac{1}{2}\|ECB\|, \quad \|RDA\| = \frac{1}{2}\|EDA\|.$$

Potom

$$\|RAB\| + \|RCD\| = \|RAB\| - \|RDC\| = \frac{1}{2}(\|FAB\| - \|FDC\|) = \frac{1}{2}\|ABCD\|$$

a

$$\|RDA\| + \|RBC\| = \|RDA\| - \|RCB\| = \frac{1}{2}(\|EDA\| - \|ECB\|) = \frac{1}{2}\|ABCD\|.$$

Tedy

$$\|RAB\| + \|RCD\| = \|RDA\| + \|RBC\|.$$

Odtud již plyne, že bod R leží na přímce PQ . □

Závěr

V této knize jsme se v několika geometrických příbězích seznámili se základy teorie automatického dokazování, automatického odvozování a automatického objevování vět elementární geometrie. Na mnoha příkladech jsme poznali podstatu této teorie, která zvláště v posledních letech, díky zvyšující se výkonnosti počítačů a novým algoritmům, nabývá na významu.

Řešení téměř všech příkladů byla doplněna i řešením klasickým. Snahu autora bylo, aby nejen klasická, ale i počítačová řešení měla v sobě nějakou myšlenku a dala tak vyniknout kráse nejen geometrie, ale i algebry. V žádném případě bychom neměli dávat přednost pouze počítačovému nebo pouze klasickému způsobu řešení. Každý z obou způsobů má své silné, ale i slabé stránky. Nemůžeme tedy říci, že jedna metoda je lepší než metoda druhá. Metody by se měly vzájemně doplňovat.

Vyskytly se i případy, kdy klasická metoda nebyla k dispozici nebo alespoň nebyla autorovi známa. V tom případě jsme byli odkázáni na některou z naznačených počítačových metod. Je pro nás výzvou, pokusit se v i těchto případech klasické řešení nalézt. Jedná se např. o zobecnění Heronovy formule v případě tětíového pětiúhelníka a dalších tětíových n -úhelníků pro vyšší n .

Existují i případy, kdy úlohu umíme vyřešit klasickou metodou, ale selhává naopak počítačový způsob řešení. To je další výzva – doplnit teorii automatického dokazování vět tak, aby tato metoda vždy vedla k nějakému konci; tj. k rozhodnutí, zda dané tvrzení je či není pravdivé.

Některé problémy vyžadovaly velké nasazení paměti počítače. To neumožňuje řešit problémy, které jsou složitější. Jako příklad opět může posloužit zobecnění Heronova vzorce pro tětíové n -úhelníky pro $n \geq 6$, který neumíme použitými metodami vyřešit. Je další výzvou pokusit se o takové strategie řešení, které nejsou tolik náročné na výkon počítače. To nám umožní vyřešit mnohem širší okruh problémů.

Jistý pokrok přinese zvýšená výkonnost počítačů, ale ten hlavní a podstatný pokrok v řešení problémů lze očekávat v lepších a sofistikovanějších algoritmech a důmyslnějším způsobu řešení problému.

Kromě již zmíněných dvou základních metod důkazů – klasické a syntetické

metody – by kniha měla čtenářům přinést, jak autor pevně doufá, radost a užitek kvůli mnoha známým či méně známým výsledkům v geometrii. Užitek by tedy měl mít i takový čtenář, který počítačové metody v oblibě nemá. V takovém případě se stačí soustředit na klasická řešení problémů.

Literatura

- [1] M.H. VAN AUBEL: *Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque*. Nouv. Corresp. Math. **4** (1878), 40-44.
- [2] A. AURIC: *Question 3867*. Intermed. Math. **18** (1911), 122.
- [3] A. BARLOTTI: *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -gono regolare*. Bol. Unione Math. Ital. **3** (1955), 96-98.
- [4] H.J. BARTSCH: *Matematické vzorce*. SNTL, Praha 1983.
- [5] M. BERGER: *Geometry I*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1987.
- [6] W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel*. Walter de Gruyter & Co, Berlin 1956.
- [7] F. VAN DER BLIJ: *Regular Polygons in Euclidean Space*. Lin. Algebra and Appl. **226-228** (1995), 345-352.
- [8] A. BOGOMOLNY: <http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml>
- [9] T. BONNESEN, W. FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper*. Springer, Berlin 1934.
- [10] O. BOTTEMA: *Hoofstukken uit de elementaire meetkunde*. Servire, Den Haag, 1944, Epsilon, Utrecht 1987.
- [11] O. BOTTEMA A KOL.: *Geometric inequalities*. Groningen 1969.
- [12] O. BOTTEMA: *Pentagons with equal sides and equal angles*. Geom. Dedicata **2** (1973), 189-191.
- [13] B. BUCHBERGER: *Groebner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory*. In: Multidimensional Systems Theory, ed. N.K. Bose, Reidel, Dordrecht 1985, 184-232.

- [14] B. BYDŽOVSKÝ: *Úvod do algebraické geometrie*. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 1948.
- [15] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA: *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Second Edition, Springer 1997.
- [16] H.S.M. COXETER, S.L. GREITZER: *Geometry revisited*. Toronto – New York 1967.
- [17] B.H. DÖRRIE: *Triumph der Mathematik*. Breslau 1933.
- [18] J. DOUGLAS: *A theorem on skew pentagons*. Scripta Math. **25** (1960), 5-9.
- [19] J.D. DUNITZ, J. WASER: *The Planarity of the Equilateral, Isogonal Pentagon*. Elem. der Math. **27** (1972), 25-32.
- [20] M. ERNESTOVÁ: *Soustavy algebraických rovnic*. Učitel matematiky **10** (2002), 193-208.
- [21] L. EULERI: *Novi commentarii academicae scientiarum Petropolitanae* **11** (1765), 1767, 103-123.
- [22] L. EULER: *Geometrica et sphaerica quaedam*. Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Peterbourgh **5** (1812), 96-114.
- [23] R.L. FINNEY: *Dynamic proofs of Euclidean theorems*. Math. Mag. **43** (1970), 177-186.
- [24] W. FISCHER: *Ein geometrischer Satz*. Arch. Math. Phys. **40** (1863), 460-462.
- [25] H. FORDER: *The Calculus of Extension*. Chelsea, New York, 1960.
- [26] L. GERBER: *Napoleon's theorem and the parallelogram inequality for affine-regular polygons*. Amer. Math. Monthly **87** (1980), 644-648.
- [27] O. GIERING: *Affine and Projective Generalization of Wallace Lines*. J. Geom. and Graphics **1** (1997), 119-133.
- [28] STEPHEN B. GRAY: *Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N -gons*. Amer. Math. Monthly **110** (2003), 210-227.
- [29] B. GRÜNBAUM: *Polygons*. In: *The Geometry of Metric and Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **490** (1975), 147-184.

- [30] B. GRÜNBAUM: *Cyclic ratio sums and products*. Crux.Math. **24** (1998), 20-25.
- [31] B. GRÜNBAUM, G.C. SHEPHARD : *Ceva, Menelaus, and the Area Principle*. Math. Magazine **68** (1995), 254-268.
- [32] B. GRÜNBAUM, G.C. SHEPHARD : *Ceva, Menelaus, and Selftransversality*. Geometriae Dedicata **65** (1997), 179-192.
- [33] M. DE GUZMÁN: *An Extension of the Wallace-Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions*. Amer. Math. Monthly **106** (1999), 574-580.
- [34] H. HADWIGER, P. FINSLER: *Einige Relationen im Dreieck*. Comment. Math. Helv. **10** (1937/38), 316-326.
- [35] H. HADWIGER: *Altes und neues über konvexe Körper*. Birkhäuser Verlag, 1955.
- [36] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN: *Anschauliche Geometrie*. Berlin 1932.
- [37] J. HORA: *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole, II. díl*, Pedagogické centrum, Plzeň 1998.
- [38] J. HORA, P. PECH: *Using computer to discover some theorems in geometry*. Acta Acad. Paed. Agriensis **29** (2002), 67-75.
- [39] S.C. CHOU: *Mechanical Geometry Theorem Proving*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1987.
- [40] H. IRMINGER: *Zu einem Satz über räumliche Fünfecke*. Elem. der Math. **25** (1970), 135-136.
- [41] B.A. JEFREMOVIČ, JU.S. ILJAŠČENKO: *Pravil'nyje mnogougol'niki*. Vestnik Mosk. Univ. **17** (1962), 18-24.
- [42] D. KAPUR: *A Refutational Approach to Geometry Theorem Proving*. Artificial Intelligence Journal **37** (1988), 61-93.
- [43] A. KARGER: *Classical Geometry and Computers*. Journal for Geometry and Graphics **2** (1998), 7-15.
- [44] F. KÁRTESZI: *Contributo al pentagono equilatero ed isogonale*. Ann. Univ. Sci. Budapest, Roland Eötvös Sect. **16** (1973), 63-64.
- [45] L. KIEPERT: *Solution de question 864*. Nou. Ann. Math. **8** (1869), 40-42.

- [46] J.S. KLINE, D.J. VELLEMAN: *Yet another proof of Routh's theorem*. *Crux. Math.* **21** (1995), 37-40.
- [47] W. KOEPF: *Gröbner Bases and Triangles*. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* **4** (1997), 371-386.
- [48] A.G. KONFOROVIČ: *Významné matematické úlohy*. SPN, Praha 1989.
- [49] M. KOČANDRLOVÁ: *The Isoperimetric Inequality for a Pentagon in E^3 and Its Generalization in E^n* . *Čas. pěst. mat.* **107** (1982), 167-174.
- [50] M. KOČANDRLOVÁ: *Isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Raumsechsecke*. *Čas. pěst. mat.* **108** (1983), 248-257.
- [51] V. KOŘÍNEK: *Základy algebry*. ČSAV, Praha 1956.
- [52] G. KOWALEWSKI: *Einführung in die Determinantentheorie*. Veit & Comp., Leipzig 1909.
- [53] B. KUTZLER: *Careful algebraic translations of geometry theorems*. In: *Proceedings ISSAC '89*, Portland, ACM Press, New York 1989, pp. 254-263.
- [54] J. LAWRENCE: *K -equilateral $(2k + 1)$ -gons span only even-dimensional spaces*. In: *The Geometry of Metric and Linear Spaces*, *Lecture Notes in Mathematics* **490** (1975), 185-186.
- [55] W. LÜSSY, E. TROST: *Zu einem Satz über räumliche Fünfecke*. *Elem. der Math.* **25** (1970), 82-83.
- [56] H. MARTINI: *Neuere Ergebnisse der Elementargeometrie*. In: O. GIERING, J. HOSCHEK (eds): *Geometrie und Ihre Anwendungen*. Carl Hanser Verlag, München und Wien 1994, 9-42.
- [57] H. MARTINI: *On the theorem of Napoleon and related topics*. *Math. Semesterber.* **43** (1996), 47-64.
- [58] B. MÍŠEK: *$O(n + 1)$ -úhelníku v E^n s maximálním objemem konvexního obalu*. *Čas. pěst. mat.* **84** (1959), 93-103.
- [59] J. NAAS, H.L. SCHMID: *Mathematisches Wörterbuch*. Berlin-Leipzig 1967.
- [60] Z. NÁDENÍK: *Náměty k středoškolské geometrii*. Přednáška na konferenci matematické pedagogické sekce JČSMF v Pardubicích 5.12.1973. S úpravami přetištěno v čas. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **19**, č.6, (1974).

- [61] R. NELSEN: *Proofs Without Words*. MAA, 1993.
- [62] R. NELSEN: *Proofs Without Words II*. MAA, 2000.
- [63] B.H. NEUMANN: *Some remarks on polygons*. J. London Math. Soc. **16** (1941), 230-245.
- [64] S.I. NOVOSELOV: *Special'nyj kurs trigonometrii*. Nauka, Moskva 1953.
- [65] A.A. NUDEL'MAN: *Izoperimetričeskije zadači dlja vypuklych oboloček lomanyh i krivých v mnogomerných prostranstvach*. Mat. Sbornik **96** (1975), 294-313.
- [66] I. PAK: *The area of cyclic polygons: Recent progress on Robbins' Conjectures*. Mini přehled 5 stran, vyjde v Adv. Applied Math. (zvláštní vydání na paměť Davida Robbinse).
- [67] D. PEDOE: *Geometry*. Dover Publ. New York 1988.
- [68] P. PECH: *O Petrově větě*. Rozhledy matem. - fyzikální **67** (1988), 9-15.
- [69] P. PECH: *Inequality between sides and diagonals of a space n -gon and its integral analog*. Čas. pro pěst. mat. **115** (1990), 343-350.
- [70] P. PECH: *The harmonic analysis of polygons and Napolepon's theorem*. J. Geometry and Graphics **5** (2001), 13-22.
- [71] P. PECH: *Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides*. Lecture Notes in Computer Science, Springer. V tisku.
- [72] P. PECH: *On Simson-Wallace theorem and its generalizations*. J. Geometry and Graphics **9** (2005). V tisku.
- [73] P. PECH: *A Harmonic Analysis of Polygons*. Slov. časopis pro geometrii a grafiku **2** (2005). 17-36.
- [74] P. PECH: *Od Napoleonovy věty k mozaikám*. Sborník 18. semináře pro geometrii a počítačovou grafiku, Miloňov, VUT Brno, JČMF, 1998, 55-61.
- [75] K. PETR: *O jedné větě pro mnohoúhelníky rovinné*. Čas. pro pěst. mat. a fyz. **34** (1905), 166-172.
- [76] M.A. RASHID, A.O. AJIBADE: *Two conditions for a quadrilateral to be cyclic expressed in terms of the lengths of its sides*. Int. J. Math. Educ. Sci. Techn. **34**, No. 5, 2003, 739-742.

- [77] T. RECIO, H. STERK, M.P. VÉLEZ: *Project 1. Automatic Geometry Theorem Proving*. In: Some Tapas of Computer Algebra, A. Cohen, H. Cuipers, H. Sterk (eds), Algorithms and Computations in Mathematics, Vol. 4, Springer, 1998, 276-296.
- [78] T. RECIO, M.P. VÉLEZ: *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry*. J. Automat. Reason. **12** (1998), 1-22.
- [79] L. RÉDEY, B.SZ. NAGY: *Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron*. Publ. Math. Debrecen **1** (1949), 42-50.
- [80] R. RIESINGER: *On Wallace Loci from the Projective Point of View*. J. Geom. and Graphics **8** (2004), 201-213.
- [81] J.F. RIGBY: *Napoleon, Escher and Tessalations*. Structural Topology **17** (1991), 17-23.
- [82] E. ROANES M., M. ROANES-LOZANO: *Automatic Determination of Geometric Loci. 3D-Extension of Simson-Steiner Theorem*. J.A. Campbell and E. Roanes-Lozano (Eds.): AISC 2000, LNAI 1930, Springer 2001, 157-173.
- [83] D.P. ROBBINS: *Areas of polygons inscribed in a circle*. Discrete Comput. Geom. **12** (1994), 223-236.
- [84] E.J. ROUTH: *A Treatise on Analytical Statics, with Numerous Examples*. Vol. I, 2nd ed., Cambridge University Press, London 1896.
- [85] S. SADOV: *Sadov's Cubic Analog of Ptolemy's Theorem*.
<http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/sadov.html>
- [86] I.J. SCHOENBERG: *The Harmonic Analysis of Skew polygons as a Source of Outdoor Sculptures*. The Coxeter Festschrift, Geometric Vein, Springer, Berlin 1982, 165-176.
- [87] P. SCHREIBER: *On the Existence and Constructibility of Inscribed Polygons*. Beiträge zur Algebra und Geometrie **34** (1993), 195-199.
- [88] CH.J. SCRIBA: *Wie kommt "Napoleon Satz" zu seinem Namen?* Hist. Math. **8** (1980), 458-459.
- [89] G.C. SHEPHARD: *Euler's Triangle Theorem*. Crux Math. **25** (1999), 148-153.

- [90] G.C. SHEPHARD: *Cyclic sums for polygons*. Math. Magazine **72** (1999), 126-132.
- [91] M. SIMON: *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert*. Teubner, Leipzig 1906.
- [92] D.O. ŠKLJARSKIJ, N.N. ČENCOV, I.M. JAGLOM: *Geometričskije neravenstva i zadači na maximum i minimum*. Nauka, Moskva 1970.
- [93] S. ŠMAKAL: *Eine Bemerkung zu einem Satz über räumliche Fünfecke*. Elem. der Math. **27** (1972), 62-63.
- [94] CH.R. STAUDT: *Über die Inhalte der Polygone und Polyeder*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **24** (1842), 252-256.
- [95] D. SVRTAN, D. VELJAN, V. VOLENEC: *Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins*. <http://arxiv.org/abs/math/0403503>
- [96] A. TARSKI: *The completeness of elementary algebra and geometry*. Institut Blaise Pascal, Paris 1967, iv + 55pp. Přetištěno podle stránkových korektur práce připravené k otištění v r. 1940 v nakladatelství Hermann & Cie, která nebyla vydána vzhledem k vypuknutí 2. světové války.
- [97] V. THÉBAULT: *Solution to Problem 169*. National Math. Mag. **12** (1937-38), 192-194.
- [98] J. VYŠÍN: *XXII. ročník matematické olympiády*. SPN, Praha, 1974, 140-141.
- [99] B.L. VAN DER WAERDEN: *Ein Satz über räumliche Fünfecke*. Elem. der Math. **25** (1970), 73-96.
- [100] B.L. VAN DER WAERDEN: *Nachtrag zu "Ein Satz über räumliche Fünfecke"*. Elem. der Math. **27** (1972), 63.
- [101] D. WANG: *Gröbner Bases Applied to Geometric Theorem Proving and Discovering*. In: Gröbner bases and applications. B. Buchberger, F. Winkler (eds), Lecture Notes of Computer Algebra, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 281-301.
- [102] J. WASER: Ph.D. thesis, Calif. Institute of Techn., Pasadena, 1944.
- [103] H. WIELEITNER: *Geschichte der Mathematik, II. Teil*. 1911-1921, ruský překlad 1958, 2. vydání 1966.

- [104] F. WINKLER: *Gröbner Bases in Geometry Theorem Proving and Simplest Degeneracy Conditions*. *Mathematica Pannonica* **1** (1990), 15-32.
- [105] W. WU: *On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem Proving in Elementary Geometry*. *Scientia Sinica* **21** (1978), 157-179.
- [106] W. WU: *Mechanical Theorem Proving in Geometries*. *Texts and Monographs in Symbolic Computation*, Springer, 1994.

doc. RNDr. Pavel Pech, CSc.

KLASICKÉ vs. POČÍTAČOVÉ METODY PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH
V GEOMETRII

Roku 2005 vydala Jihočeská univerzita

Náklad 200 kusů

Vlastimil Johanus TISKÁRNA

1. vydání

ISBN 80-7040-805-7