JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

Pavel Pech

České Budějovice 2004

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

ANALYTICKÁ GEOMETRIE
LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

Pavel Pech

České Budějovice 2004

OBSAH

PŘEDMLUVA

Učebnice Analytická geometrie lineárních útvarů seznamuje se základními vlastnostmi lineárních útvarů v geometrii. Text je rozdělen do dvou částí - Afinní prostor a Eukleidovský prostor.
Protože afinní a eukleidovské bodové prostory jsou zavedeny pomocí vektorového prostoru, je mnoho času věnováno vlastnostem vektorových prostorů. Všechny pojmy z teorie vektorových prostorů, které budeme potřebovat, jsou stručně zopakovány. Knížku tak může číst s porozuměním i ten, kdo nenavštěvoval základní kurz algebry. U čtenáře předpokládáme znalosti z matematiky v rozsahu středoškolské látky.
V první části jsou zavedeny základní geometrické útvary - bod, přímka, rovina, nadrovina apod. Jednotlivé podprostory afinního prostoru jsou popsány v parametrickém a neparametrickém tvaru a jsou zkoumány jejich afinní vlastnosti - vzájemná poloha, průnik, spojení apod.
Druhá část se zabývá metrickými vlastnostmi. Pomocí skalárního součinu vektorů je zavedena vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost bodů je zobecněna na vzdálenost dvou libovolných podprostorů. Dále jsou zkoumány objemy simplexů (např. obsah trojúhelníka, objem čtyřstěnu) a různé způsoby jejich vyjadřování. Závěr je věnován odchylce podprostorů (dvě přímky, přímka a nadrovina, dvě nadroviny).
Během výkladu byl kladen důraz na skutečnost, že shora uvedené pojmy nezávisí na volbě kartézské soustavy souřadnic.
Poděkování patří oběma recenzentům, paní doc. Ing. L. Vaňatové, CSc. a panu RNDr. J. Horovi, CSc. za pečlivé přečtení rukopisu a cenné rady a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění celého textu.

V Českých Budějovicích 20. září 2004

Pavel Pech

1. Vektorový prostor

V základním kurzu algebry byl zaveden pojem vektoru jako prvku vektorového prostoru V nad tělesem T, přičemž jsou stanoveny dvě operace - sčítání vektorů a násobení vektoru prvky z tělesa T, které splňují jisté vlastnosti (axiomy). Protože se základní vlastnosti vektorových prostorů používají v celém dalším textu, velmi stručně připomeneme, bez důkazů a komentáře, nejdůležitější pojmy. Vzhledem k potřebám geometrie budeme předpokládat, že těleso T je těleso reálných čísel R.

Definice 1.1
Vektorový prostor nad tělesem reálných čísel R je neprázdná množina prvků V, na které jsou definovány operace

a) sčítání dvojic prvků tak, že ke každé dvojici prvků $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$,

b) násobení prvků z V reálnými čísly tak, že každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$.

Uvedené operace musí splňovat pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a všechna $k, l \in R$ tyto podmínky:

1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,
2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$,
3) existuje prvek $\boldsymbol{o} \in V$ takový, že $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$ pro každé $\boldsymbol{u} \in V$,
4) ke každému $\boldsymbol{u} \in V$ existuje vektor $(-\boldsymbol{u}) \in V$ tak, že $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$,
5) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$,
6) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$,
7) $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$,
8) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Prvky vektorového prostoru V se nazývají *vektory*. Vektor $\boldsymbol{o}$ se nazývá *nulový vektor*.

Pojem vektorového prostoru je definicí 1.1 zaveden axiomaticky. Jestliže abstraktní pojem vektoru a sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem nahradíme konkrétními prvky, které splňují axiomy definice 1.1, vytvořili jsme model prostoru *V*.
Např. těleso komplexních čísel je vektorovým prostorem vzhledem k obvyklým operacím sčítání a násobení reálným číslem.

Definice 1.2
Lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ rozumíme každý vektor tvaru

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{u}_i ,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n \in R$. Lineární kombinace se nazývá *triviální*, jestliže $k_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. Je-li aspoň jedno $k_i \neq 0$ nazývá se *netriviální*.

Definice 1.3
Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, a platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o} .$$

Je-li podmínka splněna pouze když všechna $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ *lineárně nezávislé*.

Věta 1.1
Nechť vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé a nechť vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}$ jsou lineárně závislé. Pak vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ a koeficienty této kombinace jsou určeny jednoznačně.

Definice 1.4
Neprázdnou podmnožinu *W* vektorového prostoru *V* nazveme podprostorem prostoru *V*, jestliže *W* samotná je vektorovým prostorem ve smyslu definice 1.1. Označení $W \subseteq\subseteq V$.

Věta 1.2
Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem ve V, právě když pro každé dva prvky $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ a každé $k \in R$ je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ a $k\boldsymbol{u} \in W$.

Definice 1.5
Nechť V_1, V_2 jsou dva vektorové podprostory prostoru V. *Spojením* těchto podprostorů rozumíme množinu V_s všech vektorů tvaru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} \in V_1, \boldsymbol{v} \in V_2$. Označení $V_1 \vee V_2$.
Symbol $\vee$ v tomto případě nenahrazuje logickou spojku "nebo".
Průnikem V_p podprostorů V_1, V_2 je množina všech vektorů, které náleží současně do V_1 a V_2. Značíme $V_p = V_1 \cap V_2$.

Věta 1.3
Spojení a průnik dvou vektorových podprostorů prostoru V jsou vektorové podprostory prostoru V.

Věta 1.4
Množina všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ z vektorového prostoru V tvoří vektorový podprostor W prostoru V, který nazýváme *lineární obal* množiny vektorů $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ nazýváme generátory podprostoru W. Zapisujeme $W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k \rangle$.

Definice 1.6
Vektorový prostor V je *konečně generovaný*, jestliže ve V existuje konečná množina generátorů. Množina $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ vektorů z V se nazývá *báze prostoru* V, jestliže jsou vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ lineárně nezávislé a každý vektor prostoru V je jejich lineární kombinací tj. prostor V je generován vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$.

Věta 1.5
Každý konečně generovaný netriviální vektorový prostor má alespoň jednu bázi. Každé dvě jeho báze mají stejný počet vektorů. Počet

vektorů báze nazýváme *dimenzí vektorového prostoru*. Triviální vektorový prostor, obsahující pouze nulový vektor, má dimenzi nula.

Úmluva: V dalším textu budeme vektorový prostor dimenze k značit V_k.

Věta 1.6
Nechť V_h, V_k jsou podprostory vektorového prostoru V. Pro dimenzi s spojení V_s a dimenzi p průniku V_p těchto podprostorů platí vztah

$$s = h + k - p .$$

Věta 1.7
Nechť $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ tvoří bázi vektorového prostoru V_n. Každý vektor $\boldsymbol{u} \in V_n$ je možno vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i \ .$$

Tj. existuje jediná uspořádaná n-tice reálných čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$, která v dané bázi určuje vektor $\boldsymbol{u}$. Tuto n-tici nazýváme *souřadnicemi vektoru* $\boldsymbol{u}$ v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Značíme
$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i' \boldsymbol{e}_i$ je jiné vyjádření vektoru $\boldsymbol{u}$ v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Oba vektory od sebe odečteme a dostaneme

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i') \boldsymbol{e}_i \ .$$

Jedná se o lineární kombinaci vektorů báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, která se rovná nulovému vektoru. Proto všechny koeficienty $u_i - u_i'$, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou rovny nule. Odtud $u_i = u_i'$ a vektor $\boldsymbol{u}$ má v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ jediné souřadnice.

2. Afinní bodový prostor

V předcházejícím odstavci jsme připomněli nejdůležitější pojmy a vztahy při axiomatickém zavedení vektorového prostoru V. Je přirozené očekávat, že pojem bodového prostoru, jehož základními prvky jsou body, vybudujeme od základu podobně. Axiomatické budování bodového prostoru vyžaduje značný přehled o relacích, které je třeba pro základní prvky definovat, např. o incidenci a uspořádání. Proto se s tímto pojetím seznámí studenti až v závěru kurzu geometrie.

V této učebnici využijeme pro přesné budování pojmu afinní bodový prostor axiomaticky zavedený pojem vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel, obdobně jako německý matematik H. Weil (1885-1955), který tímto způsobem zavedl pojem afinního prostoru a spojil tak body a vektory. Důvody lze snadno vysvětlit pomocí středoškolské představy o pojmu vektor.

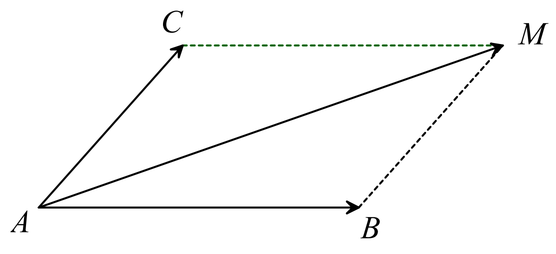
Na střední škole se orientovanou úsečkou AB rozumí úsečka, jejíž krajní body mají určené pořadí. Bod A je počáteční bod, bod B je koncový bod.

Reálným k násobkem orientované úsečky AB rozumíme orientovanou úsečku AB', kde B' je bod polopřímky AB, je-li k kladné číslo, resp. polopřímky opačné k AB, je-li k záporné číslo, přičemž pro velikosti úseček AB' a AB platí

$$|AB'| = |k||AB|.$$

Je-li $k = 0$, je orientovaná úsečka AB' nulová.

Součet orientovaných úseček se společným počátkem se opírá o fyzikální zkušenost při skládání sil znázorněných orientovanými úsečkami, viz obr.



Jsou dány dvě orientované úsečky *AB*, *AC*. Potom jejich součtem $AB + AC$ nazveme orientovanou úsečku AM, jejíž koncový bod *M* je obrazem bodu *A* ve středové souměrnosti, která zobrazuje bod *B* do bodu *C*.
Dále budeme definovat (volný) vektor. Všechny orientované úsečky, které mají týž směr (tzn. jsou souhlasně rovnoběžné) a touž velikost, reprezentují týž vektor. Nulové orientované úsečky reprezentují nulový vektor. Každá orientovaná úsečka *AB*, která reprezentuje vektor ***v***, je umístěním vektoru ***v***. Zapisujeme $\boldsymbol{v} = AB$. Operace s (volnými) vektory se realizují pomocí jejich umístění.

Jestliže $\boldsymbol{u} = AB$, $\boldsymbol{v} = AC$, pak $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ je vektor, jehož jedním umístěním je $AB + AC$, $k\boldsymbol{u}$ je vektor, jehož jedním umístěním je $k \cdot AB$.
Množina všech umístění téhož nenulového vektoru se skládá z orientovaných úseček XX', jejichž konec X' je obrazem počátku *X* v témž posunutí. Je-li vektor nulový, počátek všech umístění se zobrazí do konce umístění v identitě.
Zmíněná vlastnost všech umístění téhož vektoru zaručuje, že výsledek operací s volnými vektory nezáleží na tom, které umístění volných vektorů použijeme. Přitom lze snadno názorně ukázat, že operace s orientovanými úsečkami a také s vektory mají vlastnosti 1 až 8 z definice 1.1.
Při zavedení afinního bodového prostoru budeme vycházet z výše popsaných poznatků středoškolské geometrie o vztazích mezi orientovanými úsečkami, tedy orientovanými dvojicemi bodů a vektory. Tedy základními pojmy budou body, vektory a zobrazení, které přiřazuje každým dvěma bodům vektor. Pro studium vlastností bodového prostoru se pak využijí vlastnosti vektorového prostoru, které již byly přesně axiomaticky v algebře zavedeny a deduktivně odvozeny.

Za axiomy přijmeme dvě vlastnosti, které odpovídají reálné situaci známé ze středoškolské geometrie:

1) Zvolíme-li v bodovém prostoru pevně bod *A* a přiřadíme každému bodu *X* vektor, jehož umístění má počátek *A* a koncový bod *X*, dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru všech bodů na vektorový prostor.

2) Jsou-li A, B, C libovolné body, pak sečteme-li vektor AB s vektorem BC, dostaneme vektor AC.

Definice 2.1
Nechť V_n je vektorový prostor dimenze n nad tělesem reálných čísel, A_n neprázdná množina, jejíž prvky nazveme body. Nechť g je zobrazení, které každé uspořádané dvojici bodů z A_n přiřadí vektor z V_n tak, že platí:
1) Ke každému bodu $A \in A_n$ a vektoru $\boldsymbol{x} \in V_n$ existuje právě jeden bod $B \in A_n$ takový, že zobrazení g přiřazuje uspořádané dvojici bodů A, B vektor $\boldsymbol{x}$, což zapisujeme

$$g(A, B) = \boldsymbol{x} \quad \text{nebo} \quad B - A = \boldsymbol{x}.$$

2) Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí

$$g(A, B) + g(B, C) = g(A, C).$$

Množinu A_n nazýváme *afinním bodovým prostorem*, vektorový prostor V_n *je zaměřením afinního bodového prostoru* A_n. Dimenze zaměření V_n určuje dimenzi n afinního bodového prostoru A_n.

Poznámka
Zápis vlastnosti 1) lze též psát ve tvaru

$$A + \boldsymbol{x} = B \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = B - A. \tag{2.1}$$

Tedy zobrazení g nahrazujeme relačním znaménkem " - ".
Vlastnost 2) pak tvrdí

$$(B - A) + (C - B) = C - A. \tag{2.2}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$, pro který platí $A + \boldsymbol{x} = B$ je body A, B určen jednoznačně, neboť je-li $A + \boldsymbol{x} = A + \boldsymbol{y}$ pak podle 1) je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Pravidla pro počítání se znaménky "+" a "-".

Pro počítání s nově zavedenými znaménky "+" a "-" dává návod následující věta.

Věta 2.1
Nechť A, B, C, D jsou libovolné body afinního prostoru A_n a $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ libovolné vektory ze zaměření V_n. Potom

1. $A - A = \boldsymbol{o}$,
2. $A - B = -(B - A)$,
3. $(A + \boldsymbol{u}) - B = (A - B) + \boldsymbol{u}$,
4. $B - (A + \boldsymbol{u}) = (B - A) - \boldsymbol{u}$,
5. $(A + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = A + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$,
6. $(A - B) + (C - D) = (A - D) + (C - B)$,
7. $A - B = D - C \Leftrightarrow A - D = B - C$,
8. $A + \boldsymbol{u} = B + \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A - B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

Důkaz:
Ad 1) Pro speciální volbu $B = A, C = A$ v (2.2) je $(A - A) + + (A - A) = A - A$ a odtud $A - A = \boldsymbol{o}$ podle 4. vlastnosti z definice vektorového prostoru.
Ad 2) Pro volbu $C = A$ v (2.2) dostaneme $(A - B) + (B - A) = = A - A$ a odtud podle 1. tvrzení věty a 4. vlastnosti z definice vektorového prostoru.
Ad 3) Podle (2.1) existuje jediný bod C takový, že $A + \boldsymbol{u} = C \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = C - A$. Potom naše tvrzení má tvar $C - B = (A - B) + (C - A)$. To je podle 2. tvrzení věty rovno $(B - A) + (C - B) = C - A$, což je pravidlo (2.2).
Ad 4) Označíme $A + \boldsymbol{u} = C \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = C - A$. Naše tvrzení má po dosazení tvar $B - C = (B - A) - (C - A)$, který je ekvivalentní s pravidlem (2.2).

Analogicky se postupuje při důkazu dalších tvrzení.

V podstatě lze říci, že s nově zavedenými symboly " + " a " - " se zachází obdobně jako se znaménky "+" a "-" známými ze sčítání a odčítání reálných čísel až na určité výjimky. Např. nemá smysl zápis $X + Y$ pro body $X, Y \in A_n$ či $\boldsymbol{u} - Y$ pro $\boldsymbol{u} \in V_n, Y \in A_n$ apod.

3. Afinní podprostory

V definici 1.4 se vektorovým podprostorem rozumí podmnožina vektorového prostoru, která je sama vektorovým prostorem. Analogicky definujeme i afinní bodový podprostor.

Definice 3.1
Neprázdnou podmnožinu A_k afinního bodového prostoru A_n nazveme podprostorem prostoru A_n, jestliže je A_k afinním bodovým prostorem.

Věta 3.1
Nechť $A \in A_n$ je pevně zvolený bod, V_k vektorový podprostor zaměření V_n bodového prostoru A_n. Množina bodů *X*, pro které platí

$$X = A + \mathbf{x}\,, \tag{3.1}$$

kde **x** je libovolný vektor z podprostoru V_k , tvoří afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n. Označení $A_k \subseteq\subseteq A_n$.

Důkaz:
Dokážeme, že A_k je afinním prostorem tj. ověříme platnost axiomů 1) a 2) z definice 2.1.

1) Nechť X je libovolný bod z A_k a $\boldsymbol{u}$ libovolný vektor z V_k. Protože $A_k \subset A_n$ existuje podle definice afinního prostoru A_n jediný bod $Y \in A_n$ takový, že $Y = X + \boldsymbol{u}$. Protože $X \in A_k$, je podle (3.1) $X = A + \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in V_k$. Tedy $Y = A + \mathbf{x} + \boldsymbol{u}$ a odtud $Y \in A_k$ a vlastnost 1) afinního prostoru je dokázána.

2) Nechť X, Y, Z jsou tři libovolné body z množiny A_k. Potom rovnost

$$g(X,Y) + g(Y,Z) = g(X,Z)$$

je splněna automaticky, neboť $A_k \subset A_n$.

Některé afinní bodové podprostory mají tradiční názvy, které připomeneme v následující definici.

Definice 3.2
Afinní bodový podprostor dimenze $(n-1)$ prostoru A_n nazýváme *nadrovinou* prostoru A_n. Podprostor dimenze 1 nazveme *přímkou*, podprostor dimenze 2 *rovinou*.

V prostoru A_2 (tedy v rovině) je nadrovinou přímka, v A_3 je nadrovinou rovina, atd. Je-li V_n zaměření bodového prostoru A_n, pak každý netriviální vektorový podprostor $V_k \subseteq\subseteq V_n$ nazýváme *k*-směrem prostoru A_n. Vektor, který určuje zaměření přímky, nazýváme *směrovým vektorem* přímky.
Z věty 3.1 plyne, že afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subseteq A_n$ je určen bodem $A \in A_k$ a zaměřením V_k. Následující věta říká, že za bod *A* lze vzít libovolný bod podprostoru A_k.

Věta 3.2
Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen svým zaměřením V_k a libovolným ze svých bodů *A*. Zapisujeme $A_k = [A, V_k]$.

Důkaz:
Stačí dokázat, že bod můžeme zvolit libovolně. Nechť A_k je určen zaměřením V_k a bodem *A* resp. *B*. Máme dokázat $[A, V_k] = [B, V_k]$.
Protože $B \in A_k$, potom $B = A + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{b} \in V_k$ a odtud $A = B - \boldsymbol{b}$.
Nechť $X \in [A, V_k]$. Potom podle věty 3.1 $X = A + \boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{x} \in V_k$. Dosazením za *A* z předchozího vztahu dostaneme

$$X = B - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}.$$

Protože $\boldsymbol{b} \in V_k$, $\boldsymbol{x} \in V_k$, potom též $-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} \in V_k$ a tedy $X \in [B, V_k]$.
Obdobně se dokáže: je-li $X \in [B, V_k]$ potom je také $X \in [A, V_k]$.

Věta 3.3
Podprostor $A_k = [A, V_k]$ lze vyjádřit v parametrickém tvaru

$$X = A + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{u}_i \ , \qquad (3.2)$$

kde $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ je báze zaměření V_k, A je libovolný bod podprostoru A_k, $t_i \in R$. Reálná čísla t_i, $i = 1,2,\ldots,k$ nazýváme *parametry*. Říkáme, že afinní podprostor A_k je určen bodem A a zaměřením $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$, zapisujeme

$$A_k = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k] .$$

Důkaz:
Přímý důsledek věty 3.1 a věty 3.2.

Poznámka
Z definice 3.2 a věty 3.3 vyplývají následující parametrická vyjádření podprostorů afinního prostoru A_n :

- rovnice nadroviny $A_{n-1} = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}]$

$$X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \boldsymbol{u}_i \ ,$$

- rovnice přímky $A_1 = [A, \boldsymbol{u}]$

$$X = A + t\boldsymbol{u} ,$$

kde $\boldsymbol{u}$ je směrový vektor přímky A_1,

- rovnice roviny $A_2 = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$

$$X = A + t_1 \boldsymbol{u} + t_2 \boldsymbol{v} ,$$

kde $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ je zaměření roviny A_2.

Pro $k = n$ je vztah (3.2) vektorovým vyjádřením afinního bodového prostoru A_n.

4. Afinní souřadnice

Z důkazu věty 3.1 je zřejmé, že ke každému bodu $X \in A_n$ je při pevně zvoleném bodu A přiřazen jediný vektor $\boldsymbol{x} \in V_n$. Tomuto vektoru je jednoznačně přiřazena uspořádaná n-tice reálných čísel (souřadnic) v dané bázi vektorového prostoru V_n.
To nás opravňuje k zavedení pojmu afinních (lineárních) souřadnic bodů v prostoru A_n.

Definice 4.1
Nechť P je pevně zvolený bod z A_n a $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ báze zaměření V_n. *Afinní* nebo *lineární soustavou souřadnic S*, nebo též *repérem S* v A_n rozumíme $(n+1)$ - tici

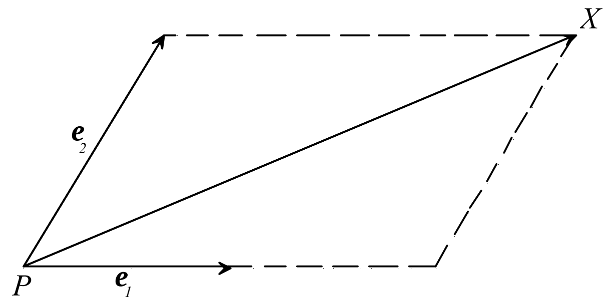
$$S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\},$$

kde P se nazývá *počátek soustavy souřadnic*.

Každému bodu $X \in A_n$ je v afinní soustavě souřadnic S jednoznačně přiřazena uspořádaná n-tice reálných čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ taková, že

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \tag{4.1}$$

neboť vztah (4.1) je podle pravidla (2.1) z definice afinního prostoru



ekvivalentní se vztahem $X - P = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou, jak známo, určena jednoznačně a proto je nazýváme *souřadnice bodu X* v soustavě souřadnic *S*. Vektor $X-P$ nazveme radiusvektorem bodu X vzhledem k soustavě *S*. Afinní prostor A_n, ve kterém je zvolena soustava souřadnic $S=\{P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ budeme dále zapisovat $A_n=[P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n]$.

V příkladu na obrázku jsou při dané afinní soustavě souřadnic $\{P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ souřadnice bodu X rovny $X=[2,1]$, protože pro vektor $X-P$ platí $X-P=2\boldsymbol{e}_1+1\boldsymbol{e}_2$.

Poznámky

1) Je-li soustava souřadnic S v prostoru A_n zvolena, je zvykem zapisovat souřadnice bodu X v této soustavě ve tvaru $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]$, i když z tohoto zápisu není zřejmá volba počátku P a báze $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$.

2) Souřadnice bodu X jsou současně souřadnicemi jeho radiusvektoru $X-P$, protože pro počátek P je zřejmě $P=[0,0,\dots,0]$.

Příklad

Nechť v lineární soustavě souřadnic $S=\{P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ mají body X,Y souřadnice $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]$, $Y=[y_1,y_2,\dots,y_n]$. Potom vektor $Y-X$ má v bázi $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ souřadnice $Y-X=$ $=(y_1-x_1,y_2-x_2,\dots,y_n-x_n)$.

Řešení:

Je totiž $X=P+x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\dots+x_n\boldsymbol{e}_n$ a $Y=P+y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+\dots y_n\boldsymbol{e}_n$ a odtud $X-P=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\dots+x_n\boldsymbol{e}_n$ a $Y-P=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+$ $+\dots+y_n\boldsymbol{e}_n$. Sečtením levých a pravých stran získáme $(Y-P)+$ $+(P-X)=(y_1-x_1)\boldsymbol{e}_1+(y_2-x_2)\boldsymbol{e}_2+\dots+(y_n-x_n)\boldsymbol{e}_n$. Tvrzení nyní dostaneme použitím pravidla (2.2) z definice afinního prostoru, neboť $(Y-P)+(P-X)=Y-X$.

Proto též říkáme, že vektor $Y-X$ má uvedené souřadnice v soustavě *S*.

Věta 4.1
Nechť je v afinním prostoru A_n dána nějaká lineární soustava souřadnic *S*. Potom podprostor $A_k = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k]$ prostoru A_n lze určit parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k1}t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k2}t_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_2 + ... + u_{kn}t_k \end{aligned} \qquad (4.2)$$

resp.

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij} t_i, \qquad j = 1,2,...,n,$$

kde bod $A \in A_k$ má souřadnice $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, vektory báze zaměření souřadnice $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ... u_{in})$, $i = 1,2,...,n$.

Důkaz:
Vztahy (4.2) jsou rozepsané vztahy (3.2) z věty 3.3.

Poznámka
Analogicky zapíšeme parametrické rovnice nadroviny, přímky atd. Je užitečné si všimnout, že

- V rovnicích (4.2) se vyskytuje *k* parametrů t_i, tj. stejný počet jako je dimenze zaměření V_k a tedy také podprostoru A_k.
- Počet rovnic soustavy (4.2) je roven dimenzi základního prostoru A_n, ve kterém uvažujeme daný podprostor A_k, a v němž je dána soustava souřadnic.

Proto např. parametrické rovnice přímky v prostoru A_2 resp. A_3 tvoří 2 resp. 3 rovnice s jedním parametrem, parametrické rovnice roviny v A_3 tvoří 3 rovnice se dvěma parametry atd.

Všimněme si parametrické rovnice přímky v A_n dané bodem $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, která má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_n + tu_n . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vypočteme-li z každé rovnice *t*, pak za předpokladu $u_i \neq 0$, $i = 1,2,\dots,n$ lze psát (4.3) ve tvaru

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n} , \tag{4.4}$$

který nazýváme *kanonický tvar rovnice přímky*. V případě, že $u_i = 0$ pro některé *i*, např. $u_1 = 0$, pak kanonický tvar zapisujeme jako soustavu

$$x_1 = a_1, \ \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n} ,$$

Kanonického tvaru rovnice přímky používáme zejména ve třírozměrném prostoru A_3. Přímka určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ má kanonický tvar

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3} ,$$

kde libovolný bod přímky má souřadnice $[x, y, z]$, u_1, u_2, u_3 jsou nenulová.

Rovina v prostoru A_4, která je určena bodem $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ a zaměřením $V_2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, má parametrické rovnice

$$x_1 = a_1 + tu_1 + sv_2$$
$$x_2 = a_2 + tu_2 + sv_2$$
$$x_3 = a_3 + tu_3 + sv_3$$
$$x_4 = a_4 + tu_4 + sv_4 .$$

Příklad
Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi:

a) $x_1 = 2 + t$
$x_2 = t$
$x_3 = -3$

b) $x_1 = 1 + t + r + s$
$x_2 = 2 - t$ t
$x_3 = 3r - s$
$x_4 = -5 + 2r$.

Řešení:
a) Přímka v A_3 určená bodem [2, 0, -3] a směrovým vektorem (1,1,0).
b) Třírozměrný prostor v A_4, určený bodem [1, 2, 0, -5] a zaměřením, které je určeno vektory (1,-1, 0, 0), (1, 0, 3, 2), (1, 0, -1, 0).

Zamysleme se ještě nad parametrickým vyjádřením (4.2) podprostoru A_k. Je zřejmé, že bod $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$ náleží podprostoru A_k, jestliže soustava lineárních rovnic

$$m_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij} t_i , \qquad j = 1,2,...,n$$

je jednoznačně řešitelná s neznámými $t_1, t_2, ..., t_k$. Jestliže si v soustavě (4.2) parametry $t_1, t_2, ..., t_k$ pevně zvolíme, dostaneme na levé straně soustavy souřadnice jediného bodu podprostoru A_k. Afinní bodový podprostor $A_k = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k]$ je sám o sobě afinním bodovým prostorem. Jestliže je určen parametrickými rovnicemi (4.2), lze považovat $\{A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ za afinní soustavu souřadnic v tomto prostoru A_k. Každý bod X prostoru A_k má nyní dvojí souřadnice. Jedny $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ v afinní soustavě souřadnic prostoru $A_n = [P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n]$ podle (4.1), a druhé $X = [t_1, t_2, ..., t_k]$ v afinní soustavě souřadnic prostoru $A_k = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k]$ podle (3.2). Soustava rovnic (4.2) stanoví vzájemný vztah mezi těmito dvojími souřadnicemi bodů podprostoru A_k.

Uvažujme nyní afinní bodový prostor A_n a napišme jeho parametrické rovnice. Jde vlastně o speciální případ rovnic (4.2), jestliže uvažujeme $k = n$. Předpokládejme, že v A_n jsou dány dvě soustavy souřadnic $S_1 = \{A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ a $S_2 = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$. Nechť v soustavě S_2 má bod A souřadnice $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, libovolný bod $X \in A_n$ souřadnice $X = [x'_1, x'_2, ..., x'_n]$, vektory $\boldsymbol{u}_i$ mají v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ souřadnice $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$. Nechť bod X má v soustavě S_1 souřadnice $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Pak podle (4.2) platí

$$x'_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_i, \qquad j = 1,2,...,n \tag{4.6}$$

resp. v maticovém zápisu

$$(x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nn} \end{pmatrix} + (a_1, a_2, ..., a_n). \tag{4.7}$$

Označíme-li matice v (4.7) $\boldsymbol{X}' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$,

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nn} \end{pmatrix},$$

můžeme vztah (4.7) napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}. \tag{4.8}$$

Rovnice (4.6) resp. (4.7) udávají závislost mezi souřadnicemi x_i, x_i' téhož bodu ve dvou afinních soustavách souřadnic. Říkáme, že určují transformaci nebo přechod od soustavy S_1 k soustavě S_2.
Matice $\boldsymbol{U} = (u_{ij}),\ \ i, j = 1, 2, ..., n$ se nazývá *matice přechodu od báze* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ *k bázi* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$.

Cvičení
1. V lineární soustavě souřadnic $S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ je dán bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ a vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ... v_n)$. Potom bod $Y = X + \boldsymbol{v}$ má souřadnice $Y = [x_1 + v_1, x_2 + v_2, ..., x_n + v_n]$. Dokažte.
Návod: Napište souřadnice bodu *X* ve tvaru (4.1) a souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$ v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ a potom vyjádřete bod $Y = X + \boldsymbol{v}$.

2. Určete kanonický tvar rovnice přímky určené bodem
A = [1, 2, 0] a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$ = (2, 0, 1).
Výsledek: $\dfrac{x-1}{2} = z,\ y = 2$.

3. Určete parametrické rovnice třírozměrného prostoru v A_4 určeného bodem *A* = [1, 0, 1, 3] a zaměřením $\boldsymbol{u}$ = (2, 3, 4, 5), $\boldsymbol{v}$ = (-1, 0, -1, 0), $\boldsymbol{w}$ = (0, 1, 0, 0).
Výsledek: $x_1 = 1 + 2t_1 - t_2$, $x_2 = 3t_1 + t_3$, $x_3 = 1 + 4t_1 - t_2$, $x_4 = 3 + 5t_1$.

5. Určení afinního podprostoru

Ve větě 3.2 bylo dokázáno, že afinní bodový podprostor je určen libovolným svým bodem a zaměřením. Ze školské geometrie je známo, že např. jednorozměrná přímka je určena dvěma různými body, dvojrozměrná rovina třemi body neležícími v přímce. Lze tedy očekávat, že analogicky *k*- rozměrný podprostor A_k bude určen $(k+1)$ body, které budou splňovat jistou podmínku. Abychom tuto podmínku mohli přesně stanovit, vyslovíme nejdříve definici lineární nezávislosti bodů.

Definice 5.1
Skupina $(k+1)$ bodů $A_0, A_1, \dots, A_k$ z prostoru A_n se nazývá *lineárně závislá* (*nezávislá*), jsou-li vektory $A_1 - A_0, A_2 - A_0, \dots, A_k - A_0$ lineárně závislé (nezávislé).

Věta 5.1
Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně $(k+1)$ lineárně nezávislými body.

Důkaz:
Jsou-li body $A_0, A_1, \dots, A_k$ lineárně nezávislé, jsou také vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, \dots, k$ lineárně nezávislé a určují zaměření V_k podprostoru A_k. Podprostor A_k je tedy určen, podle věty 3.2, jedním z bodů (např. A_0) a vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, \dots, k$. To znamená, že

$$A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, \dots, A_k - A_0].$$

Jednoznačnost plyne z nezávislosti vektorů $A_i - A_0$, $i = 1, 2, \dots, k$, které generují jediný vektorový prostor V_k - zaměření prostoru A_k.

Z věty 5.1 vyplývá, že nadrovina A_{n-1} je určena *n*-ticí lineárně nezávislých bodů, přímka je určena dvěma různými body, rovina je určena třemi nezávislými body (tj. body, které neleží v přímce).

Jestliže body B_1, B_2, B_3 leží na téže přímce, pak říkáme, že jsou *kolineární*. Jestliže body C_1, C_2, C_3, C_4 leží v téže rovině, říkáme, že jsou *komplanární*.

Věta 5.2
Vektorově parametrická rovnice podprostoru A_k, který je určen $(k+1)$ lineárně nezávislými body $A_0, A_1, \dots, A_k$, má tvar

$$X = A_o + \sum_{i=1}^{k} t_i \left(A_i - A_o\right), \tag{5.1}$$

kde X je libovolný bod podprostoru A_k, parametry $t_i \in R$.

Důkaz:
Plyne z věty 3.3, když položíme $\boldsymbol{u}_i = A_i - A_0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Z věty 5.2 vyplývají vektorově parametrické rovnice následujících speciálních podprostorů:

- přímka určená body A, B:

$$X = A + t(B - A) \tag{5.2}$$

- rovina určená body A, B, C:

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A),$$

- nadrovina určená body $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$:

$$X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \dots t_{n-1}(A_{n-1} - A_0). \tag{5.3}$$

Předpokládejme, že v prostoru A_n je určen podprostor A_k lineárně nezávislými body $A_0, A_1, \dots, A_k$. Nechť v A_n je zvolena soustava souřadnic $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, ve které mají body A_i souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Jestliže libovolný bod X podprostoru A_k má souřadnice $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, pak rovnici (5.1) rozepíšeme v jednotlivých souřadnicích a získáme parametrické rovnice podprostoru A_k

$$x_j = a_{0j} + \sum_{i=1}^{k} t_i (a_{ij} - a_{0j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Speciálními případy rovnic (5.4) jsou známé parametrické rovnice přímek a rovin, které si nyní přehledně připomeneme.
V rovině A_2 má přímka AB určená body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ parametrické rovnice

$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

V afinním prostoru A_3 má přímka určená body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ parametrické rovnice

$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2)$$
$$z = a_3 + t(b_3 - a_3).$$

V A_3 má rovina určená body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$ parametrické rovnice

$$x = a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2)$$
$$z = a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3).$$

Všimněme si ještě parametrů ve výše uvedených parametrických rovnicích. Je-li přímka určena různými body A, B a stanovíme-li její parametrickou rovnici (5.2), pak lze říci, že parametr t je souřadnice bodu X v soustavě souřadnic přímky AB, kde A je počátek, $B - A$ je vektor báze zaměření této přímky. Je ovšem zřejmé, že za počátek lze zvolit např. bod B, za vektor báze zaměření vektor např. $B - A$. Pak parametrická rovnice přímky AB je

$$X = B + r(B - A).$$

Parametr r je nyní souřadnice bodu X v soustavě souřadnic přímky AB, kde B je počátek a $B - A$ je vektor báze.
Podobně lze uvážit geometrický význam parametrů v rovnici roviny, obecně v parametrické rovnici (5.1) podprostoru A_k. Přitom podprostor A_k lze určit libovolným ze svých bodů např. A_3 (tedy ne nutně A_0) a za vektory báze zaměření nemusíme volit vektory

$A_i - A_0$, nýbrž jakoukoli jinou bázi, např. $A_i - A_3$, $i = 0,1,2,4,\dots,k$. Pak místo (5.1) máme vektorově parametrickou rovnic

$$X = A_3 + \sum_{i=0,i\neq 3}^{k} r_i (A_i - A_3). \qquad (5.5)$$

Je-li v prostoru A_n zvolena soustava souřadnic a body A_i určující podprostor A_k, mají souřadnice $A_i = [a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}]$, $i = 1,2,\dots,k$ dostaneme parametrické rovnice podprostoru A_k rozepsáním v souřadnicích některé z parametrických rovnic. Tedy nestanovíme nutně parametrické rovnice (5.4) rozepsáním rovnice (5.1), nýbrž např. rozepsáním v souřadnicích rovnice (5.5). Potom dostaneme parametrické rovnice prostoru A_k ve tvaru

$$x_j = a_{3j} + \sum_{i=0,i\neq 3}^{k} r_i (a_{ij} - a_{3j}), \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Příklad

V prostoru A_4 jsou dány body A = [1, 2, -1, 0], B = [0, 1, 2, -3], C = [4, 2, 1, -1], D = [0, 0, 1, 0]. Ukažte, že tyto body určují třírozměrný prostor A_3 a napište jeho parametrické rovnice.

Řešení:

Podle věty 5.1 je třírozměrný podprostor určen čtyřmi lineárně nezávislými body. Body A, B, C, D jsou lineárně nezávislé, jestliže vektory $B - A$, $C - A$, $D - A$ jsou lineárně nezávislé. Zapíšeme proto souřadnice těchto vektorů do řádků matice a známou úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 14 & -19 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tato matice má hodnost 3, tedy body A, B, C, D jsou lineárně nezávislé. Vektorově parametrická rovnice prostoru A_3 je

$$X = A + t_1 (B - A) + t_2 (C - A) + t_3 (D - A).$$

Rozepsáno v souřadnicích dostaneme parametrické rovnice

$$x_1 = 1 - t_1 + 3t_2 - t_3$$
$$x_2 = 2 - t_1 - 2t_3$$
$$x_3 = -1 + 3t_1 + 2t_2 + 2t_3$$
$$x_4 = -3t_1 - t_2 .$$

Zamysleme se ještě nad tím, jak může být určen afinní bodový podprostor A_k. Podle věty 3.2 je určen libovolným ze svých bodů A a svým zaměřením $V_k = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k \rangle$. Podle věty 5.1 je určen $(k+1)$ lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_k$. Přitom oprávněnost druhého tvrzení se prokazuje pomocí prvního, když položíme $A = A_0$, $\boldsymbol{u}_i = A_i - A_0$. To vede k myšlence, že podprostor A_k lze také určit skupinou lineárně nezávislých bodů $A_0, A_1, ..., A_j$, $j < k$ a skupinou lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_i$ ze zaměření V_k afinního prostoru A_k tak, že $j + i = k$. Podprostor A_k je pak určen např. bodem A_0 a zaměřením

$$V_k = \langle A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_j - A_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_i \rangle .$$

Příklad

Určete parametrické rovnice roviny určené body A = [1, 0, 1], B = [0, -1, 2] a směrem vektoru $\boldsymbol{u}$ = (3, 2, 1).

Řešení:

Vektorově parametrická rovnice roviny je

$$X = A + t(B - A) + r\boldsymbol{u} ,$$

po rozepsání dostaneme parametrické rovnice

$$x = 1 - t + 3r$$
$$y = -t + 2r$$
$$z = 1 + t + r .$$

6. Neparametrická rovnice nadroviny

Ze vztahu (5.4) najdeme parametrické rovnice nadroviny, která je určena n-ticí lineárně nezávislých bodů, které mají souřadnice $A_j = [a_{j1}, a_{j2}, ... a_{jn}]$, $j = 0,1,...,n-1$, když položíme $k = n-1$, tedy

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{01} + (a_{11} - a_{01})t_1 + (a_{21} - a_{01})t_2 + ... + (a_{n-1,1} - a_{01})t_{n-1} \\
x_2 &= a_{02} + (a_{21} - a_{02})t_1 + (a_{22} - a_{02})t_2 + ... + (a_{n-1,2} - a_{02})t_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= a_{0n} + (a_{1n} - a_{0n})t_1 + (a_{2n} - a_{0n})t_2 + ... + (a_{n-1,n} - a_{0n})t_{n-1} .
\end{aligned} \qquad (6.1)$$

Parametrické rovnice tvoří soustavu n rovnic, které obsahují $(n-1)$ parametrů $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$. Lze tedy parametry vyloučit a dostaneme jednu rovnici, která neobsahuje parametry. Je neparametrická typu

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + c_0 = 0 .$$

Přesné určení koeficientů c_i pro $i = 0,1,...,n-1$ stanoví následující věty.

Věta 6.1

Nechť je nadrovina A_{n-1} určena n lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, které mají v nějaké afinní soustavě souřadnic prostoru A_n souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in}]$, $i = 0,1,...,n-1$. Potom každý bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ nadroviny splňuje rovnici

$$\begin{vmatrix}
x_1, & x_2, & ..., & x_n, & 1 \\
a_{01}, & a_{02}, & ..., & a_{0n}, & 1 \\
... & ... & ... & ... & \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & ..., & a_{n-1,n}, & 1
\end{vmatrix} = 0 \qquad (6.2)$$

kterou nazýváme *neparametrická* nebo *obecná rovnice nadroviny*.

Důkaz:
Vektorově parametrickou rovnici (5.3) nadroviny lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{o} = t_0(X - A_0) + t_1(A_1 - A_0) + \ldots + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0)$$

Jde o netriviální lineární kombinaci vektorů, neboť soustava bodů $X, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ je pro $X \in A_{n-1}$ lineárně závislá. Rozepíšeme-li tento vztah v souřadnicích, dostáváme homogenní soustavu n rovnic o n neznámých $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$

$$\begin{aligned}
0 &= t_0(x_1 - a_{01}) + t_1(a_{11} - a_{01}) + \ldots + t_{n-1}(a_{n-1,1} - a_{01})\\
0 &= t_0(x_2 - a_{02}) + t_1(a_{12} - a_{02}) + \ldots + t_{n-1}(a_{n-1,2} - a_{02})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= t_0(x_n - a_{0n}) + t_1(a_{1n} - a_{0n}) + \ldots + t_{n-1}(a_{n-1,n} - a_{0n}).
\end{aligned}$$

Tato soustava má netriviální řešení, právě když determinant soustavy je nulový, tj.

$$\begin{vmatrix}
x_1 - a_{01}, & x_2 - a_{02}, & \ldots., & x_n - a_{0n}\\
a_{11} - a_{01}, & a_{12} - a_{02} & \ldots., & a_{1n} - a_{0n}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
a_{n-1,1} - a_{01}, & a_{n-1,2} - a_{02}, & \ldots., & a_{n-1,n} - a_{0n}
\end{vmatrix} = 0. \quad (6.3)$$

Determinant (6.3) má vzhledem k soustavě rovnic zaměněny řádky za sloupce. Nyní ho formálně rozšíříme o jeden sloupec a řádek takto:

$$\begin{vmatrix}
x_1 - a_{01}, & x_2 - a_{02}, \ldots, & x_n - a_{0n}, & 0\\
a_{11} - a_{01}, & a_{12} - a_{02}, \ldots, & a_{1n} - a_{0n}, & 0\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
a_{n-1,1} - a_{01}, & a_{n-1,2} - a_{02}, \ldots, & a_{n-1,n} - a_{0n}, & 0\\
a_{01}, & a_{02}, \ldots\ldots, & a_{0n}, & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Tento determinant je zřejmě roven (6.3). Přičtením posledního řádku k ostatním a jeho přemístěním na místo druhého řádku dostáváme tvar (6.2).

Věta 6.2
Souřadnice každého bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ nadroviny A_{n-1} prostoru A_n splňují neparametrickou (obecnou) rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0, \qquad (6.4)$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_{n,} c_0$ jsou po řadě algebraické doplňky prvků $x_1, x_2, \dots, x_n, 1$ prvního řádku determinantu (6.2) z věty 6.1.

Důkaz:
Rozvedením determinantu levé strany (6.2) dostáváme rovnici (6.4).

Z důkazu věty 6.1 plyne, že každá lineární rovnice tvaru (6.4) je rovnicí nadroviny A_{n-1}, nejsou-li všechny koeficienty u x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ rovny nule.
V rovině A_2 je nadrovinou přímka, jejíž neparametrická rovnice typu (6.4) je

$$ax + by + c = 0,$$

kde jsme z tradičních důvodů označili $c_1 = a,\ c_2 = b,\ c_0 = c,$ $x_1 = x,\ x_2 = y$.
V prostoru A_3 je nadrovinou rovina, jejíž obecná rovnice má tvar

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Rovnice (6.3) z důkazu věty 6.1 je rovněž obecnou (neparametrickou) rovnicí nadroviny. Rovnice přímky v rovině $\mathbf{A}_2$, která je určena body $A = [x_1, y_1],\ B = [x_2, y_2]$, je podle (6.2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice roviny typu (6.3) v prostoru A_3, která je určena body $A = [x_1, y_1, z_1],\ B = [x_2, y_2, z_2],\ C = [x_3, y_3, z_3]$, je

$$\begin{vmatrix} x - x_{1,} & y - y_1, & z - z_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Věta 6.3

Je-li $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ rovnicí nadroviny, potom rovnice $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ je neparametrickou rovnicí téže nadroviny ve stejné soustavě souřadné, kde $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo.

Důkaz:
Podmínka (6.3) z důkazu věty 6.1 zůstává v platnosti, jestliže determinant násobíme nenulovým číslem *k*. Rozvedením determinantu získáme hledanou rovnici, která představuje stejnou nadrovinu.

Poznámka
Uvažujme ještě nadrovinu, která je určená bodem $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a vektory zaměření $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Jestliže v rovnici nadroviny (6.3) označíme vektory $A_i - A_0 = \boldsymbol{u}_i$, tzn. v souřadnicích $a_{ij} - a_{0j} = u_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, má uvažovaná nadrovina rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1, & x_2 - a_2, & \ldots, & x_n - a_n \\ u_{11}, & u_{12}, & \ldots, & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots, & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2}, & \ldots, & u_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.5)$$

Příklad
Napište neparametrickou rovnici nadroviny A_3 v prostoru A_4, která je určena body *A* = [1, 2, 3, 4], *B* = [2, 2, 4, 4] a směrovými vektory ***u*** = (0, 1, 0, 1), ***v*** = (1, 1, 1, 0).

Řešení:
Nadrovinu určíme bodem *A* a směrovými vektory $B - A$, ***u***, ***v***, které jsou lineárně nezávislé, jak se můžeme snadno přesvědčit. Užitím (6.5) dostaneme rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2-2 & x_3-3 & x_4-4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Rozvinutím determinantu podle prvního řádku pak vyjde obecná rovnice nadroviny

$$x_1 - x_3 + 2 = 0 .$$

Ještě se zamysleme nad možnostmi stanovení neparametrické rovnice nadroviny, která je určena n lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, jsou-li dány jejich souřadnice. Rovnici lze určit dosazením do (6.2) nebo do (6.3). Mohli bychom ovšem, jako na střední škole stanovujeme rovnici přímky v rovině či roviny v A_3, dosadit souřadnice bodů A_i do rovnice (6.4). Tím získáme soustavu n rovnic pro neznámé $c_1, c_2, ..., c_n, c_0$. Vzhledem k větě 6.3 lze jednu z těchto neznámých, která je nenulová, zvolit, ostatní jsou soustavou určeny jednoznačně. Můžeme také nejdříve napsat parametrické rovnice nadroviny typu (5.4) a vyloučit parametry $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$.

Někdy potřebujeme nadrovinu, která je dána neparametrickou rovnicí $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$, vyjádřit pomocí parametrických rovnic. Z odstavce 3 víme, že parametrické rovnice závisí na volbě souřadnicového systému uvnitř nadroviny a ten lze volit mnoha způsoby. Můžeme proto např. jednoduše položit

$$x_1 = t_1, x_2 = t_2, ..., x_{n-1} = t_{n-1} .$$

Dosazením do neparametrické rovnice pak vypočteme

$$x_n = \frac{1}{c_n}\left(-\sum_{j=1}^{n-1} c_j t_j - c_0 \right),$$

za předpokladu, že $c_n \neq 0$.

Příklad
Určete parametrické rovnice roviny $x-2y+3z-5=0$ v prostoru A_3.
Řešení:
Položme $x=t_1, y=t_2$ a potom dosazením do obecné rovnice vychází

$$z=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2 .$$

Cvičení
1. V A_4 určete rovnici nadroviny ρ, která je určena body A,B,C,D, kde $A=[0, 0, 10, -2]$, $B=[1, 0, 12, -3]$, $C=[-1, 2, 9, -2]$, $D=[0, 1, 7, -2]$.
Výsledek: ρ: $5x_1+3x_2+x_3+7x_4+4=0$.

2. V prostoru A_4 určete neparametrickou rovnici roviny $\alpha=[A,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$, jestliže $A=[1, 1, 0]$, $\boldsymbol{u}=(2, 1, 3)$, $\boldsymbol{v}=(0, 0, 1)$.
Výsledek: $\alpha: x-2y+1=0$.

3. V A_3 určete parametrické rovnice roviny $\beta: 3x+2y-z+5=0$.
Výsledek: Např. β: $x=t_1$, $y=t_2$, $z=3t_1+2t_2+5$.

7. Vzájemná poloha afinních podprostorů

Na základní a střední škole se zjišťuje vzájemná poloha přímek a rovin. Víme, že dvě přímky v rovině mohou být různoběžné, rovnoběžné nebo splývající. V třírozměrném prostoru mohou být navíc ještě mimoběžné. Tedy vzájemná poloha přímek závisí na prostoru, ve kterém se přímky uvažují.
V tomto odstavci budeme uvažovat v afinním bodovém prostoru A_n dva bodové podprostory A_h, A_k. Jejich jednotlivé polohy definujeme podobně jako se ve školské geometrii definují polohy přímek a rovin. Budeme přitom určovat podmínky existence těchto poloh.

Definice 7.1
Dva afinní bodové podprostory $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ afinního prostoru A_n se nazývají:

a) *rovnoběžné*, platí-li pro jejich zaměření $V_h \subseteq\subseteq V_k$ nebo $V_k \subseteq\subseteq V_h$. Značíme $A_h \parallel A_k$,
b) *incidentní*, je-li $A_h \subseteq\subseteq A_k$ nebo $A_k \subseteq\subseteq A_h$,
c) *různoběžné*, mají-li neprázdný průnik a nejsou incidentní,
d) *mimoběžné*, nejsou-li rovnoběžné ani různoběžné.

Věta 7.1
Dva rovnoběžné afinní bodové podprostory $A_h \parallel A_k$ téže dimenze $h = k$ jsou buď totožné $A_h = A_k$ nebo nemají společný bod. Mají-li různou dimenzi $h < k$, pak buď $A_h \subseteq\subseteq A_k$ nebo nemají společný bod.

Důkaz:
Nechť $A_h \parallel A_k$, $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$. Jestliže existuje společný bod $C \in A_h$, $C \in A_k$, potom podle věty 3.2 platí: je-li $h = k$ je $V_h = V_k$ a $A_h = [C, V_h] = A_k$; je-li $h < k$ je $V_h \subseteq\subseteq V_k$ a $A_h = [C, V_h]$, $A_k = [C, V_k]$, tedy $A_h \subseteq\subseteq A_k$.

Věta 7.2
Dva rovnoběžné afinní podprostory dimenze $h \le k$ $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ jsou incidentní, jestliže vektor $B - A \in V_k$.

Důkaz:
Jestliže $B - A \in V_k$, pak $B - A = \boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{x} \in V_k$. Tedy $A = B - \boldsymbol{x}$ a odtud $A \in [B, V_k]$. Prostory A_h, A_k mají společný bod A, jsou tedy dle věty 7.1 incidentní.

Věta 7.3
Bodem $B \in A_n$ prochází právě jeden podprostor A_k' rovnoběžný s daným podprostorem A_k téže dimenze.

Důkaz:
Oba rovnoběžné podprostory mají zaměření $V_k = V_k'$. Bodem B a zaměřením V_k je určen podle věty 3.2 jediný podprostor A_k'.

Poznámka
Z věty 7.1 vyplývá, že mezi rovnoběžné podprostory patří prostory incidentní. Mají-li incidentní podprostory stejnou dimenzi, nazývají se *totožné* nebo *splývající*.

Věta 7.4
Dva bodové podprostory, dané parametricky

$$X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \boldsymbol{u}_i \ , \ Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \boldsymbol{v}_j \ , \quad h \le k \ ,$$

jsou rovnoběžné, právě když pro vektory $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \dots, h$ platí $\boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$. Jsou incidentní, jestliže současně $B - A \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$.

Důkaz:
Vyplývá přímo z vět 7.1 a 7.2.

Poznámka
Dvě přímky $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$ jsou rovnoběžné, jestliže $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}$, $\lambda \neq 0$. Jsou totožné, když současně $B - A = \mu \boldsymbol{v}$, $\mu \in R$.

Příklad
Ukažte, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ:

$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 + 3t \\ x_2 &= 3 + 2r \\ x_3 &= -1 + 2r \\ x_4 &= 5 - r \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 \\ x_2 &= 2t_1 \\ x_3 &= 1 + t_2 \\ x_4 &= 3 + t_1 - t_2. \end{aligned}$$

Řešení:
Z parametrického zadání je zřejmé, že přímka p i rovina ρ leží v A_4. Platí $p \parallel \rho$, když směrový vektor přímky $\boldsymbol{u}$ = (3, 2, 2, -1) náleží zaměření roviny, určené vektory $\boldsymbol{v}$ = (1, 2, 0, 1), $\boldsymbol{w}$ = (1, 0, 1, -1). Stačí tedy určit lineární závislost vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Řešíme pomocí ekvivalentních úprav matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že třetí řádek je násobkem druhého řádku, vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou tedy lineárně závislé. Zjistíme ještě, zda $p \subset \rho$. Podle věty 7.4 určíme závislost vektorů $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, B - A$, kde
A = [1, 3, -1, 5], B = [0, 0, 1, 3], $B - A$ = [-1, -3, 2, -2]. Platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé, tedy vektor $B - A$ nenáleží $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$. Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ a v této rovině neleží.

Věta 7.5
Dvě nadroviny, určené v téže soustavě souřadné prostoru A_n neparametrickými rovnicemi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0 \tag{7.1}$$

jsou rovnoběžné, jestliže existuje nenulové reálné číslo λ takové, že $a_i = \lambda b_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Jsou totožné, jestliže navíc $a_0 = \lambda b_0$.

Důkaz:
Případ totožnosti vyplývá z věty 6.3. Předpokládejme, že pro rovnoběžné nadroviny (7.1) neplatí $a_i = \lambda b_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. např. $a_1 = \lambda_1 b_1$, $a_2 = \lambda_2 b_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

a soustava rovnic (7.1) má pro x_i řešení, závislé na $(n-2)$ parametrech. Tím je prokázána existence aspoň jednoho bodu, který leží v obou nadrovinách (7.1). To však vylučuje věta 7.1.
Jestliže obráceně $a_i = \lambda b_i$ potom matice

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{pmatrix}$$

má hodnost 1 a soustava (7.1) má podle Frobeniovy věty alespoň jedno řešení, právě když také $a_0 = \lambda b_0$, tj. když rozšířená matice má také hodnost 1. V opačném případě řešení nemá a nadroviny jsou rovnoběžné různé.

V definici 7.1 jsme přiřadili název dvojicím podprostorů, jejichž poloha nebyla zatím prokázána, s výjimkou podprostorů rovnoběžných. Pro ostatní polohy je výhodné využít pojmu spojení vektorových podprostorů , viz definice 1.5 a věta 1.6.
Jsou-li oba podprostory určeny bázemi

$$V_h = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h \rangle, \quad V_k = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle,$$

pak pro spojení $V_s = V_h \vee V_k$ zřejmě

$$V_s = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle. \tag{7.2}$$

Věta 7.6

Dva afinní bodové podprostory $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ prostoru A_n mají společný aspoň jeden bod, právě když vektor $B - A \in V_h \vee V_k$.

Důkaz:

Nechť $B - A \in V_h \vee V_k$. Potom $B - A = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} \in V_h$, $\boldsymbol{v} \in V_k$. Odtud plyne existence bodu $X = B - \boldsymbol{v} = A + \boldsymbol{u}$. Bod B a vektor $\boldsymbol{v}$ určují jistý bod prostoru A_k, bod A a vektor $\boldsymbol{u}$ jistý bod prostoru A_h, tedy existuje společný bod X obou podprostorů.

Obráceně, existuje-li aspoň jeden společný bod $X \in A_h \cap A_k$ potom $X = B + \boldsymbol{v} = A + \boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} \in V_h$, $\boldsymbol{v} \in V_k$, potom $B - A =$ $= \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$, tj. vektor $B - A \in V_h \vee V_k$.

Uvažujme nyní dva afinní bodové podprostory A_h, A_k prostoru A_n. Určeme nejmenší podprostor A_s prostoru A_n, který tyto podprostory obsahuje. Takový prostor lze definovat následujícím způsobem:

Definice 7.2

Afinní bodový podprostor A_g nazveme *spojením bodových podprostorů* A_h, A_k, jestliže platí:

1) $A_h \subseteq\subseteq A_s$, $A_k \subseteq\subseteq A_g$,

2) Jestliže je A' libovolný podprostor A_n takový, že $A_h \subseteq\subseteq A'$, $A_k \subseteq\subseteq A'$, potom $A_g \subseteq\subseteq A'$.

Spojení afinních podprostorů A_h, A_k označíme $A_g = A_h \vee A_k$.

Poznámka
Z definice je zřejmé, že spojení $A_g = A_h \vee A_k$ je nejmenší podprostor, obsahující podprostory A_h, A_k. Jsou-li tyto podprostory určeny bodem a zaměřením, tj. $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$, přičemž zaměření jsou dána bázemi $V_h = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h \rangle$, $V_k = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$, pak nejmenší bodový podprostor $A_g = A_h \vee A_k$, který obsahuje A_h i A_k, lze určit např. bodem $A \in A_g$ a zaměřením V_g, které musí obsahovat všechny lineární kombinace vektorů báze zaměření V_h, V_k a vektoru $B - A$, to znamená, že

$$V_g = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, B - A \rangle. \tag{7.3}$$

Z konstrukce je zřejmé, že $V_g \subseteq \subseteq V_n$, $A \in A_n$, tedy dle věty 3.1 je spojení $A_g \subseteq\subseteq A_n$.

Věta 7.7
Nechť afinní bodové podprostory $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ mají prázdný průnik. Pak jejich spojení $A_g = A_h \vee A_k$ má dimenzi

$$g = s + 1,$$

kde s je dimenze spojení jejich zaměření $V_s = V_h \vee V_k$.
Mají-li afinní podprostory A_h, A_k společný aspoň jeden bod, potom spojení $A_g = A_h \vee A_k$ má dimenzi

$$g = s.$$

Důkaz:
Podle věty 7.6 mají podprostory A_h, A_k společný aspoň jeden bod, je-li $B - A \in V_h \vee V_k$. Porovnáme-li dle (7.2) a (7.3) generátory prostorů $V_h \vee V_k = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ a
$V_g = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, B - A \rangle$, je zřejmě $s = g$.

Jestliže afinní podprostory A_h, A_k nemají společný bod potom podle věty 7.6 je $B - A \notin V_h \vee V_k$ a potom zřejmě $g = s + 1$.

Nyní budeme zkoumat vzájemnou polohu dvou bodových podprostorů, včetně určení nejmenšího bodového prostoru, ve kterém příslušná poloha existuje.

Věta 7.8
Nechť $A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ jsou dva afinní bodové podprostory prostoru A_n dimenze $h \le k \le n$. Nechť $V_s = V_h \vee V_k$, $V_p = V_h \cap V_k$, potom:

a) $A_h \subseteq\subseteq A_k$ právě když $V_h = V_p \subseteq\subseteq V_k$ a $B - A \in V_s$. Oba podprostory A_h, A_k leží v prostoru A_n dimenze $n \ge k$.

b) A_h, A_k jsou rovnoběžné různé, právě když $V_h \subseteq\subseteq V_k$ a $B - A \notin V_s$; Oba podprostory A_h, A_k leží v prostoru A_n dimenze $n \ge k + 1$.

c) A_h, A_k jsou různoběžné, právě když $B - A \in V_s$ a neplatí $V_h \subseteq\subseteq V_k$. Oba podprostory A_h, A_k leží v prostoru A_n dimenze $n \ge h + k - p$.

d) A_h, A_k jsou mimoběžné, právě když $B - A \notin V_s$ a neplatí $V_h \subseteq\subseteq V_k$. Oba podprostory A_h, A_k leží v prostoru A_n dimenze $n \ge h + k - p + 1$.

Důkaz:
Podmínky o vzájemné poloze vyplývají z definice 7.1 a věty 7.6. Doplňující podmínky o dimenzi prostoru A_n, ve kterém oba podprostory A_h, A_k leží, nalezneme z vlastností spojení $A_g = A_h \vee A_k$, které je nejmenším podprostorem A_n, obsahujícím A_h, A_k. Proto $g \le n$. Podle věty 1.6 platí pro dimenzi s spojení $V_s = V_h \vee V_k$, dimenzi p průniku $V_p = V_h \cap V_k$ a dimenze h a k podprostorů V_h, V_k vztah

$$h + k = s + p. \tag{7.4}$$

Důkazy jednotlivých odstavců věty:
a) $V_h \subseteq\subseteq V_k$, proto dle (7.2) $V_k = V_s$ tj. $k = s$. $B - A \in V_s$ tedy, dle vět 7.6 a 7.7, $g = s$ a z obou rovností plyne $g = k$. Protože $n \geq g$ je $n \geq k$.

b) $B - A \notin V_s$, proto podle věty 7.7 $g = s + 1$ a protože $V_h \subseteq\subseteq V_k$, je $V_k = V_s$. Tedy $k = s$ a z obou rovností plyne $g = k + 1$. Protože $n \geq g$ je $n \geq k + 1$.

c) Neplatí $V_h \subseteq\subseteq V_k$, proto podle vztahu (7.4) $h + k = s + p$ a protože $B - A \in V_s$, je $g = s$. Z obou rovností plyne $h + k = g + p$, tedy $n \geq g = h + k - p$.

d) Neplatí $V_h \subseteq\subseteq V_k$, tedy $h + k = s + p$. Protože $B - A \notin V_s$ potom $g = s + 1$ a z obou rovností plyne $h + k = g - 1 + p$, tedy $n \geq g = h + k - p + 1$.

Poznámka
Ve větě 7.8 je písmenem p označena dimenze průniku $V_p = V_h \cap V_k$ zaměření uvažovaných bodových podprostorů A_h, A_k. Jestliže budeme uvažovat také průnik bodových podprostorů $A_r = A_h \cap A_k$, pak obecně nejsou dimenze p a r rovny. Např. je-li přímka rovnoběžná s rovinou a neleží v této rovině, pak průnik přímky a roviny je prázdný, zatímco průnik zaměření přímky a zaměření roviny má dimenzi 1. Vztahy dimenze průniku A_r a průniku V_p stanoví následující věta:

Věta 7.9
Jsou-li afinní bodové podprostory A_h, A_k incidentní nebo různoběžné, pak dimenze r jejich průniku $A_r = A_h \cap A_k$ je rovna dimenzi p průniku jejich zaměření $V_p = V_h \cap V_k$.

Důkaz:
Jsou-li A_h, A_k incidentní nebo různoběžné, pak mají společné dva body M, N, různé nebo splývající, $M \in A_r$, $N \in A_r$. Potom vektor $M - N \in V_h$, $M - N \in V_k$ a tedy $M - N \in V_p$.
Je-li obráceně $M \in A_r$ a vektor $\boldsymbol{u} \in V_p$, existuje bod $N = M + \boldsymbol{u} \in A_h$ a také $N = M + \boldsymbol{u} \in A_k$. Tedy je $N \in A_r$.

Chceme-li diskutovat všechny možnosti vzájemné polohy konkrétních bodových podprostorů A_h, A_k v afinním prostoru A_n, využijeme vztah (7.4), větu 7.7 a větu 7.9. Postup ukážeme na dvou příkladech.

Příklad
Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny.

Řešení:
Nechť A_1 je přímka, A_2 rovina. Jejich zaměření V_1, V_2 mají průnik V_p. Proto dimenze jejich průniku p může být rovna 0 nebo 1.
Pomocí vztahu (7.4) $h + k = s + p$
určíme dimenzi s spojení $V_s = V_1 \vee V_2$ pro obě možnosti volby *p*, tj. pro $s = 3$ nebo $s = 2$.
Dále uvážíme dimenzi g spojení $A_g = A_1 \vee A_2$, podle věty 7.7 je $g = s$ nebo $g = s + 1$.
Je výhodné výsledky psát do tabulky, pro jednotlivé případy poloh do jednoho řádku.

h	k	p	s	g	název polohy
1	2	0	3	3	různoběžné, průnikem je bod
1	2	0	3	4	mimoběžné
1	2	1	2	2	$A_1 \subseteq\subseteq A_2$
1	2	1	2	3	$A_1 \| A_2$, není $A_1 \subseteq\subseteq A_2$

Název polohy v pravé části tabulky stanovíme v jednotlivých řádcích takto:

1) $p = 0 \Rightarrow$ není $V_1 \subseteq\subseteq V_2$, $g = s = 3 \Rightarrow$ neprázdný průnik $A_r = A_1 \cap A_2$ má dimenzi $r = p = 0$. Tedy prostory A_1, A_2 jsou různoběžné, průnikem je bod.

2) $p = 0 \Rightarrow$ není $V_1 \subseteq\subseteq V_2$, $g = s + 1 = 4 \Rightarrow$ prázdný průnik $A_r = A_1 \cap A_2$. Prostory A_1, A_2 nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné, jsou tedy mimoběžné.

3) $p = 1 \Rightarrow V_1 \subseteq\subseteq V_2$, podprostory A_1, A_2 jsou rovnoběžné, $g = s = 2 \Rightarrow A_1, A_2$ jsou incidentní, tedy $A_1 \subseteq\subseteq A_2$.

4) $p = 1 \Rightarrow V_1 \subseteq\subseteq V_2$, podprostory A_1, A_2 jsou rovnoběžné, $g = s + 1 = 3$, A_1, A_2 nejsou incidentní.

Z tabulky je zřejmé, že přímka je s rovinou mimoběžná v prostoru dimenze $n \geq g = 4$.

Příklad
Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin A_h, A_k, $h = k = 2$.

Řešení:

h	k	p	s	g	název polohy
2	2	0	4	4	různoběžné, průnikem je bod
2	2	0	4	5	mimoběžné
2	2	1	3	3	různoběžné, průnikem je přímka
2	2	1	3	4	mimoběžné, společný směr
2	2	2	2	2	totožné
2	2	2	2	3	rovnoběžné různé

Zřejmě $p = 0$, 1 nebo 2. V řádcích je
1) $p = 0 \Rightarrow$ není $V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g = s \Rightarrow$ jsou různoběžné, průnik A_r má dimenzi $r = p = 0$. Roviny A_h, A_k jsou různoběžné, průnikem je bod.

2) $p=0 \Rightarrow$ není $V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g=s+1 \Rightarrow$ nejsou rovnoběžné a nemají společný bod. Roviny A_h, A_k jsou mimoběžné.

3) $p=1 \Rightarrow$ není $V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g=s \Rightarrow$ jsou různoběžné, průnik A_r má dimenzi $p=r=1$. Roviny A_h, A_k jsou různoběžné, průnikem je přímka.

4) $p=1 \Rightarrow$ není $V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g=s+1 \Rightarrow$ mimoběžné se společným směrem $V_h \cap V_k = V_1$.
Roviny A_h, A_k jsou mimoběžné.

5) $p=2 \Rightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g=s \Rightarrow$ totožné. Roviny A_h, A_k jsou totožné.

6) $p=2 \Rightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k$, $g=s+1 \Rightarrow$ rovnoběžné různé. Roviny A_h, A_k jsou rovnoběžné různé.
Z tabulky lze snadno vyčíst, jakou vzájemnou polohu mají dvě roviny v prostoru dimenze $n=4$. Protože $n \geq g$, tedy $g \leq 4$, nastanou všechny polohy s výjimkou $g=5$.
V třírozměrném prostoru je $n=3 \geq g$, nastávají známé polohy. V prostoru dimenze 5 a vyšší existují všechny uvedené polohy.
Všimněte si zajímavého faktu, že v prostoru dimenze větší než 3 se dvě roviny mohou protínat v jediném bodě.
Nyní budeme určovat vzájemnou polohu dvou afinních bodových podprostorů, které jsou určeny v zadaném systému souřadnic prostoru A_n parametrickými rovnicemi. Z těchto rovnic lze stanovit určující bod a zaměření obou podprostorů. Z věty 7.8 je zřejmé, že vzájemnou polohu lze určit pomocí matice, v jejíž sloupcích jsou souřadnice vektorů zaměření obou prostorů a vektoru $B-A$. Postup si ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad
V prostoru A_4 určete vzájemnou polohu rovin $\rho=[A,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$, $\delta=[B,\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}]$, jestliže v afinní soustavě souřadnic je A = [1, 1, 1, 1],

$\boldsymbol{u} = (-2, 0, -2, -2)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1, 1)$, $B = [2, 6, 9, 13]$,
$\boldsymbol{w} = (2, 1, 5, 5)$, $\boldsymbol{z} = (2, 1, 4, 6)$.

Řešení:
Rovnice rovin lze psát parametricky

$$\rho: X = A + t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v}, \qquad \delta: Y = B + t_3\boldsymbol{w} + t_4\boldsymbol{z}.$$

Pro společné body rovin platí $A + t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v} = B + t_3\boldsymbol{w} + t_4\boldsymbol{z}$, tj.

$$t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v} - t_3\boldsymbol{w} - t_4\boldsymbol{z} = B - A. \tag{a}$$

Napíšeme-li matici, v jejíchž sloupcích jsou souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, -\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{z}$ a rozšíříme-li ji o sloupce souřadnic vektoru $B - A$, lze z této matice určit, zda zaměření $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ roviny ρ je podprostorem zaměření $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle$ roviny δ a zda vektor $B - A$ je prvkem spojení $V_s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle$. Vychází

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & -5 & -6 & 12 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Je zřejmé, že hodnost matice bez pravé strany je 4, tedy roviny nejsou rovnoběžné, protože rozšířená matice má také hodnost 4, je tedy $B - A \in V_s$. Roviny jsou různoběžné, průnikem je podprostor dimenze $p = r = h + k - s = 4 - 4 = 0$ tj. bod. Tento bod určíme jako řešení soustavy rovnic nahoře. Z maticového zápisu vychází

$$t_4 - 2,\ t_3 = -1,\ t_2 = 1,\ t_1 = 3.$$

Dosadíme do parametrických rovnic jedné z obou rovin, např. $X = A + t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v}$,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t_1 + t_2 \\ x_2 &= 1 + 2t_2 \\ x_3 &= 1 - 2t_1 + t_2 \\ x_4 &= 1 - 2t_1 + t_2 \end{aligned}$$

a po dosazení za t_1, t_2 dostáváme průsečík [- 4, 3, - 4, - 4].

Z věty 7.8 je zřejmé, že jsme mohli zkoumat matici, v jejíchž sloupcích jsou souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$, $B-A$. Když se zjistí, jako v našem případě, že matice soustavy $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ má stejnou hodnost jako matice rozšířená o $B-A$, plyne odtud, že průnik podprostorů A_r je neprázdný a jeho dimenze r je rovna $r=h+k-s$. Pak je nutné řešit soustavu (a). Je zřejmé, že matice $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $-\boldsymbol{w}$, $-\boldsymbol{z}$ má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$. Také vektory $-\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{z}$ určují stejné zaměření jako vektory $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$.

Příklad
Stanovte hodnotu parametru a tak, aby roviny $\alpha=[A,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$, $\beta=[B,\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}]$ byly mimoběžné, jestliže A = [1, -1, -1, 4],
$\boldsymbol{u}$ = (1, 2, 2, -3), $\boldsymbol{v}$ = (1, 1, 0, 2), B = [3, -1, 1, -3], $\boldsymbol{w}$ = (2, 1, 1, -3), $\boldsymbol{z}$ = (0, 0, 1, a).

Řešení:
Souřadnice vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z},B-A$ zapíšeme do sloupců matice a upravíme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & a & -7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & a & -1 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & a & -21 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4+a & 3 \end{array}\right).$$

Z poslední matice je zřejmé, že pro $a=-4$ není $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \subseteq\subseteq \langle \boldsymbol{w},\boldsymbol{z}\rangle$.
Hodnost matice

(**u**, **v**, **w**, **z**) je 3, tedy $s = 3$. Současně $B - A \notin V_s$, neboť hodnost matice rozšířené o vektor $B - A$ je 4. Tedy pro $a = -4$ jsou roviny mimoběžné.

Příklad
V A_4 jsou dány přímky $p: x_1 = 1 - t,\ x_2 = 1 + t,\ x_3 = 1,\ x_4 = -t$, $q: x_1 = t,\ x_2 = t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = -1 - t$.
Určete jejich spojení $A_g = p \vee q$.

Řešení:
Přímky [A, **u**], [B, **v**] určují spojení $A_g = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, B - A]$, spojení zaměření přímek p, q je $V_s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. V našem případě
A = [1, 1, 1, 0], **u** = (-1, 1, 0, -1) , B = [0, 0, 1,-1], **v** = (1, 1, -1, -1).
Určíme závislost vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, B - A$, kde B - A = (-1, -1, 0, -1).
Vychází

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vektory **u**, **v** jsou lineárně nezávislé, $B - A \notin V_s$, tedy přímky p, q jsou mimoběžné a určují spojení A_g dimenze $g = 3$. V prostoru A_4 je spojení podprostorů $p \vee q = A_3$ nadrovinou. Proto můžeme určit nadrovinu spojení $A_3 = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, B - A]$ jedinou neparametrickou rovnicí, podle vztahu (6.5), ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 & x_3 - 1 & x_4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

a po krátkém výpočtu dostáváme

$$x_1 + 2x_3 - x_4 - 3 = 0.$$

Nadrovina má v množině podprostorů zvláštní postavení. Lze ji určit neparametricky jedinou rovnicí, což usnadňuje stanovení vzájemné polohy s jiným podprostorem.

Věta 7.10
Afinní podprostor A_h je s každou nadrovinou A_{n-1} prostoru A_n buď rovnoběžný, nebo je průnikem $A_h \cap A_{n-1}$ podprostor dimenze (h - 1).

Důkaz:
Podle vztahu (7.4) je $h + k = s + p$ a z podmínky $V_s \subseteq\subseteq V_n$, t j. $s \leq n$, plyne

$$n \geq h + k - p .$$

Pro případ nadroviny kdy $k = n - 1$ dostaneme $n \geq h + n - 1 - p$, tedy $p \geq h - 1$.
Pro dimenzi p průniku zaměření $V_p = V_h \vee V_{n-1}$ je $p \leq h$, neboť předpokládáme $p \leq n - 1$.
Mohou tedy nastat pouze dva případy:
1) $p = h$, tj. $V_p = V_h$ a podprostor A_h je rovnoběžný s nadrovinou A_{n-1}
nebo
2) $p = h - 1$, potom podle (7.4) je $h + k = s + p$, odtud plyne
$h + n - 1 = s + h - 1$ a dostaneme $n = s$.
Proto musí být dimenze spojení $A_g = A_h \vee A_{n-1}$ rovna $g = s = n$.
Podle věty 7.7 jsou podprostory A_h, A_{n-1} různoběžné a podle věty 7.9 má průnik $A_r = A_h \cap A_{n-1}$ dimenzi

$$r = p = h - 1.$$

Poznámka
Pro $n = 3, h = 1$ je věta známou poučkou ze stereometrie.

Příklad
V prostoru A_3 určete vzájemnou polohu přímky AB a roviny ρ, kde $A = [2, 0, 3]$, $B = [1, 3, -2]$, $\rho: 2x + y + 3z + 1 = 0$.

Řešení:
Podle věty 7.10 je přímka s rovinou rovnoběžná (resp. v ní leží) nebo je průnikem bodový podprostor dimenze h - 1, tj. 1 - 1 = 0, to znamená bod. Přímku vyjádříme parametricky
AB: $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = 3 - 5t$.
Hledáme průnik přímky AB a roviny ρ. Dosadíme z parametrických rovnic přímky do rovnice roviny a vzniklou rovnici vyřešíme pro neznámou t. Dostaneme

$$2(2 - t) + 3t + 3(3 - 5t) + 1 = 0$$

a odtud $t = 1$.
Hodnotu parametru dosadíme do parametrických rovnic přímky a získáme souřadnice průsečíku [1, 3, -2] .

Věta 7.11
Dvě nadroviny jsou buď rovnoběžné nebo je průnikem afinní bodový podprostor dimenze $(n-2)$.
Důkaz:
Speciální případ věty 7.10 pro $h = n - 1$.

Poznámky
1) Vyslovte známé věty o vzájemné poloze dvou přímek v rovině A_2 resp. dvou rovin v A_3 jako speciální případy věty 7.11.

2) Podle věty 7.11, dvě nadroviny, které nejsou rovnoběžné, určují podprostor dimenze $(n-2)$. Jsou-li nadroviny dány obecnými rovnicemi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0,$$

přičemž neplatí $a_i = kb_i$, kde $k \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, určuje soustava těchto dvou rovnic podprostor dimenze $(n-2)$.
Speciálně v třírozměrném prostoru A_3 neparametrické rovnice dvou různoběžných rovin

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

určují přímku.

Příklad
Určete jaký podprostor je určen průnikem dvou podprostorů v A_4 a A_5, které jsou dány soustavou rovnic

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0\,.$$

Řešení:
Každá z neparametrických rovnic představuje nadrovinu buď v A_4 nebo v A_5. Jejich vzájemnou polohu, dle věty 6.3, určíme řešením soustavy rovnic, která vypadá v maticovém tvaru následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Protože hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené tj. 2, jsou nadroviny různoběžné. Podle věty 7.11 je průnikem podprostor dimenze $(n-2)$. Tedy v prostoru A_4 rovnice určují rovinu, v prostoru A_5 určují třírozměrný prostor.

Poznámka za větou 7.1 a předcházející příklad nás vedou k zamyšlení, zda každý afinní bodový podprostor dimenze k lze určit jako průnik určitého počtu nadrovin, když víme, že podprostor dimenze $(n-2)$ lze určit dvěma různoběžnými nadrovinami.

Věta 7.12
Ke každému afinnímu bodovému podprostoru $A_k \subseteq\subseteq A_n$ existuje $(n-k)$ nadrovin, jejichž průnikem je daný podprostor A_k a které A_k určují.

Důkaz:
Nechť $A_k = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k]$. Jestliže v dané soustavě souřadnic v A_n mají bod A a vektory $\boldsymbol{u}_i$ souřadnice $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n$ potom parametrické rovnice podprostoru A_k jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + \ldots + u_{k1}t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{k2}t_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + u_{1n}t_1 + u_{2n}t_2 + \ldots + u_{kn}t_k . \end{aligned} \tag{7.5}$$

V důsledku lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ má matice (u_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$ hodnost *k*. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že determinant z prvních *k* řádků matice soustavy (7.5)

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{k1} \\ u_{12} & u_{22} & \ldots & u_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{1k} & u_{2k} & \ldots & u_{kk} \end{vmatrix}$$

je různý od nuly. Tedy z prvních *k* rovnic soustavy (7.5) lze jednoznačně určit hodnoty parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Po dosazení těchto hodnot do zbývajících $(n-k)$ rovnic obdržíme $(n-k)$ nezávislých lineárních rovnic o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z nichž každá je obecnou rovnicí nadroviny. Tedy bod $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ leží v A_k, právě když leží současně ve všech nadrovinách, reprezentovaných zmíněnými $(n-k)$ rovnicemi.

Platí i věta obrácená:

Věta 7.13
Nechť v A_n je dáno $(n-k)$ nadrovin, které mají v afinní soustavě souřadnic prostoru A_n neparametrické rovnice

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + c_{10} &= 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + c_{20} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ c_{n-k,1}x_1 + c_{n-k,2}x_2 + \ldots + c_{n-k,n}x_n + c_{n-k,0} &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

takové, že matice soustavy (7.6) má hodnost $(n-k)$. Potom průnik nadrovin (7.6) je afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subseteq A_n$, tedy nadroviny (7.6) určují bodový podprostor A_k.

Důkaz:
Protože matice (c_{ij}) soustavy (7.6) má hodnost $(n-k)$, můžeme předpokládat, že determinant soustavy (7.6)

$$\begin{vmatrix} c_{1,k+1} & c_{1,k+2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,k+1} & c_{2,k+2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-k,k+1} & c_{n-k,k+2} & \dots & c_{n-k,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Položíme-li $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, ..., $x_k = t_k$ a řešíme (7.6) pro neznámé x_i, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 \\ x_2 &= t_2 \\ &\dots\dots \\ x_k &= t_k \\ x_{k+1} &= u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + \dots + u_{k1}t_k + a_1 \\ x_{k+2} &= u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + \dots + u_{k2}t_k + a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= u_{1,n-k}t_1 + u_{2,n-k}t_2 + \dots + u_{k,n-k}t_k + a_{n-k}. \end{aligned}$$

Označme $A = [0,\dots,0,a_1,a_2,\dots,a_{n-k}]$ a dále označme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= (1,0,\dots,0,u_{11},u_{12},\dots,u_{1,n-k}) \\ \boldsymbol{u}_2 &= (0,1,\dots,0,u_{21},u_{22},\dots,u_{2,n-k}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{u}_k &= (0,0,\dots,1,u_{k1},u_{k2},\dots,u_{k,n-k}). \end{aligned}$$

Potom $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory. Tyto vektory a bod A určují bodový podprostor $A_k = [A,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_k]$. Tedy bod leží v A_k právě když leží v průniku nadrovin (7.6).

Příklad

Určete podprostor v A_4 určený nadrovinami

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 6 = 0$$
$$3x_1 + 2x_4 = 0$$

a stanovte jeho parametrické vyjádření.

Řešení:

Podle věty 7.13 určíme hodnost matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

tedy $h = 3$. Rovnice určují podprostor A_k, $n - k = 3$, tj. při $n = 4$ je $k = 1$ a podprostorem je přímka. Podobně jako v důkazu věty 7.13, položme např. $x_4 = t$ a řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= -t - 6 \\ 3x_1 &= -2t\,. \end{aligned}$$

Vyjde $x_1 = -\dfrac{2}{3}t,\ x_2 = 6 + \dfrac{1}{3}t,\ x_3 = 13 - \dfrac{4}{3}t,\ x_4 = t.$

Cvičení

1. Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky A_1 a třírozměrného podprostoru A_3.

Výsledek: různoběžné (průnikem je bod), $n \geq 4$; mimoběžné, $n \geq 5$; $A_1 \subseteq\subseteq A_3$, $n \geq 3$; $A_1 \parallel A_3$, $n \geq 4$.

2. Určete všechny možnosti vzájemné polohy roviny A_2 a třírozměrného prostoru A_3.

Výsledek: různoběžné (průnikem je bod), $n \geq 5$; různoběžné (průnikem je přímka), $n \geq 4$; mimoběžné (společný směr), $n \geq 5$; mimoběžné (bez společného směru), $n \geq 6$; $A_2 \subseteq\subseteq A_3$, $n \geq 3$; $A_2 \parallel A_3$, $n \geq 4$.

3. Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou přímek a, b v A_n .
Výsledek: různoběžné (průnikem je bod), $n \geq 2$; mimoběžné, $n \geq 3$; totožné, $n \geq 1$; $a \parallel b$, $n \geq 2$.

4. Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin α, β
a) v prostoru A_3,
b) v prostoru A_4.
Výsledek: a) různoběžné (průnikem je přímka); $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \equiv \beta$.
b) různoběžné (průnikem je bod); různoběžné (průnikem je přímka);
mimoběžné (společný směr); $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \equiv \beta$.

5. Určete vzájemnou polohu dvou přímek v A_3
a) AB, CD; A = [2, -1, 4], B = [-2, 1, -4], C = [-1, 1/2, -2] , D = [10, -5, 20]
b) AB, [C, $\boldsymbol{u}$]; A = [2, 3, -1], B = [0, -1, -25/7], C = [1, -1, -2], $\boldsymbol{u}$ = (2, 1, 3)
c) p: $x + 2 = y - 3 = z/2$, q: $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = t$
d) k: $3x - y + 5z - 2 = 0$, l: $-2 - x = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z}{2}$
$x + y - 3z + 10 = 0$
Výsledek: a) splývají, b) různoběžné, průsečík $[-1/3, -5/3, -4]$, c) mimoběžné, d) splývají.

6. Určete vzájemnou polohu dvou rovin v A_3
a) $x + y - z - 3 = 0$, $x = 2 + t + r$
$y = 2 - t$
$z = 1 + r$
b) $x = 1 + 2t + 3r$, $3x + 3y - z + 3 = 0$.
$y = 2 - t + r$
$z = 2t - r$
Výsledek: a) splývají, b) různoběžné.

7. V A_4 určete vzájemnou polohu
a) roviny [A; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$] a přímky [B; $\boldsymbol{w}$], jestliže A = [1, 0, 2, 2], $\boldsymbol{u}$ = (1, -1, 0, 0), $\boldsymbol{v}$ = (1, 2, 0, -1), B = [0, 0, -6, 5], $\boldsymbol{w}$ = (1, 2, -3, 0)

b) dvou rovin

$x_1 = t_1 + t_2$ $\quad x_1 = -9 + 5t_3 + 3t_4$
$x_2 = 3 + t_1 + 5t_2$ $\quad x_2 = 2 - t_3 + t_4$
$x_3 = 1 - 2t_1 - 4t_2$ $\quad x_3 = 1 + 2t_4$
$x_4 = 3 - 2t_1$ $\quad x_4 = -5 + 2t_3$

c) nadroviny

$x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_3$, $x_4 = 0$ a přímky
$x_1 = t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $x_4 = 3$

d) dvou rovin

$x_1 = 2 - t_1$ $\quad x_1 = -1 + 2t_3 + t_4$
$x_2 = 3 + t_1 + 2t_2$ $\quad x_2 = 4t_3 + t_4$
$x_3 = 1 - 3t_2$ $\quad x_3 = 2 - 9t_3 + t_4$
$x_4 = 3 + 2t_1 + 2t_2$ $\quad x_4 = 1 + 2t_3 + t_4$.

Výsledek: a) protínají se v bodě [-8/3, -16/3, 2, 5], b) protínají se v bodě [1, 0, 1, -1], c) přímka je rovnoběžná s nadrovinou, d) protínají se v přímce $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 2 + 4t$, $x_3 = 4 - 9t$, $x_4 = 3 + 2t$.

8. Určete parametry a, b tak, aby přímka
$x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + at$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2 + 2t$ ležela v rovině
$x_1 = 1 + t_1 + t_2$, $x_2 = 1 + 2t_1 + t_2$, $x_3 = 2 + t_1 + 2t_2$, $x_4 = b + 2t_1 + 2t_2$.
Výsledek: $a = 3$, $b = 2$.

9. Určete parametry a, b tak, aby přímky
$x_1 = 3$, $x_2 = 2 + at_1$, $x_3 = 1 + t_1$, $x_4 = bt_1$;
$x_1 = -2 + 5t_2$, $x_2 = 4 - 5t_2$, $x_3 = 4 - 6t_2$, $x_4 = -1 + 4t_2$
byly různoběžné a určete jejich průsečík.
Výsledek: $a = 1$, $b = -1$, průsečík [3, -1, -2, 3].

10. V prostoru A_5 určete vzájemnou polohu rovin

$x_1 = t_1 + t_2$ $\quad x_1 = 2t_4$
$x_2 = t_2$ $\quad x_2 = t_3 + 2t_4$
$x_3 = 1 + t_1 + t_2$ $\quad x_3 = 2 + t_3 + 3t_4$
$x_4 = 2 - t_1$ $\quad x_4 = 3 - t_4$
$x_5 = -1 + t_2$ $\quad x_5 = -1 + 2t_3 + 3t_4$.

Výsledek: mimoběžné, spojení rovin je nadrovina $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 1 = 0$.

8. Příčky mimoběžných podprostorů

Definice 8.1

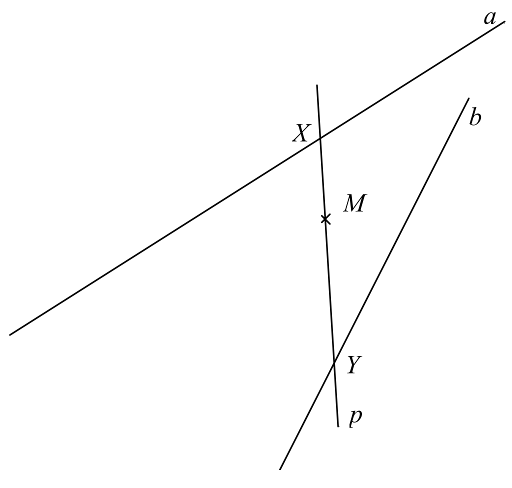
Přímku p nazveme *příčkou mimoběžných podprostorů* A_h, A_k afinního prostoru A_n, právě když je s každým z podprostorů A_h, A_k různoběžná.

Poznámka

V deskriptivní geometrii se řeší úlohy na příčky mimoběžek v A_3. Je zřejmé, že ke dvěma mimoběžkám v A_3 existuje nekonečně mnoho příček. Budeme hledat příčku mimoběžek, která je zavázána další podmínkou tak, že je určena jednoznačně. Budeme zkoumat příčku mimoběžných podprostorů procházející daným bodem a příčku daného směru.

Příklad 1

Nechť v A_3 jsou dány mimoběžné přímky $a = [A, \boldsymbol{u}]$, $b = [B, \boldsymbol{v}]$. Určete příčku p mimoběžek a, b procházející daným bodem M.



Řešení:

1. způsob: Jsou-li X, Y body příčky p takové, že $X \in a$, $Y \in b$ potom platí $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$ pro nějaká reálná t, r. Z podmínky, že příčka XY prochází daným bodem M, plyne lineární závislost vektorů $X - M$ a $Y - M$, tj. existuje reálné číslo k, takové že platí

$$X - M = k(Y - M).$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$, dostaneme

$$A + t\boldsymbol{u} - M = k(B + r\boldsymbol{v} - M).$$

Tato rovnice v A_3 představuje, po dosazení souřadnic příslušných bodů a vektorů, soustavu tří rovnic o třech neznámých t, r, k. Vypočtením neznámých t a r určíme ze vztahů $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$ souřadnice bodů X, Y hledané příčky mimoběžek p.

2. způsob: Úlohu lze řešit také pomocí této geometrické představy. Bod M a přímka a určují rovinu $\alpha = [A, \boldsymbol{u}; M - A]$. Průsečík Y roviny α s přímkou b náleží příčce p, tedy platí

$$A + t\boldsymbol{u} + s(M - A) = B + r\boldsymbol{v}.$$

Po úpravě dostaneme

$$t\boldsymbol{u} + s(M - A) - r\boldsymbol{v} = B - A.$$

Rozepsáním tohoto vztahu v A_3 dostaneme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých t, s, r. Jestliže jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, M - A$ lineárně nezávislé, dostaneme jediné řešení. Další postup je analogický jako v předchozím případě.

3. způsob: Tento způsob je obdobou předchozího názorného řešení. Bod M a přímka a určují rovinu $\alpha = [M, \boldsymbol{u}, M - A]$, analogicky, bod M a přímka b určují rovinu $\beta = [M, \boldsymbol{v}, M - B]$. Roviny α a β se protínají v přímce p, která má požadovanou vlastnost. Tato úvaha vede na rovnici

$$M + t\boldsymbol{u} + s(M - A) = M + r\boldsymbol{v} + w(M - B),$$

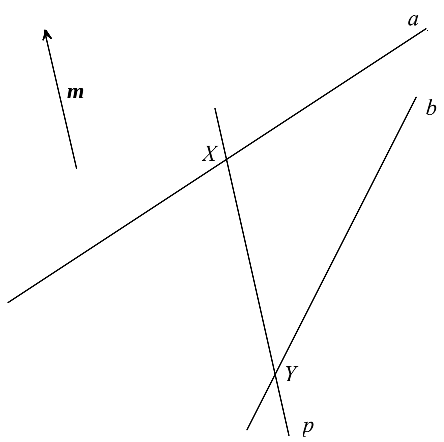
což po úpravě dává vztah

$$t\boldsymbol{u} + s(M - A) - r\boldsymbol{v} - w(M - B) = 0.$$

Rozepsáním získáme v A_3 soustavu tří lineárních homogenních rovnic o čtyřech neznámých t, s, r, w.

Příklad 2

Nechť v A_3 jsou dány mimoběžky $a = [A, \boldsymbol{u}]$, $b = [B, \boldsymbol{v}]$. Určete příčku p mimoběžek a, b, rovnoběžnou s daným směrem $\boldsymbol{m}$.



Řešení:

Nechť příčka p protíná přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y, tj. $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$. Vektory $X - Y$ a $\boldsymbol{m}$ jsou lineárně závislé, tedy existuje $k \in R$ tak, že

$$X - Y = k\boldsymbol{m}.$$

Po dosazení podmínek $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$ a úpravě dostaneme

$$t\boldsymbol{u} - r\boldsymbol{v} - k\boldsymbol{m} = B - A.$$

Tato rovnost představuje v A_3 soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé t, r, k. Pokud jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}$ lineárně nezávislé, je

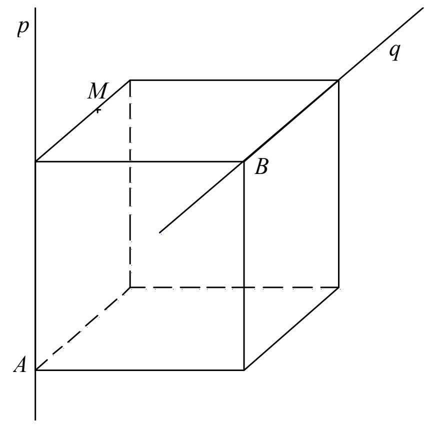
$\det(\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{m}) \neq 0$ a soustava má jediné řešení. Z rovnosti $X = A + t\boldsymbol{u}$ pak určíme bod X příčky $p = [X, \boldsymbol{m}]$, která je tímto určena.

Poznámky

a) Právě ukázaný způsob nalezení příčky mimoběžek daným směrem odpovídá 1. způsobu nalezení příčky daným bodem M v příkladu 1. I zde jsme mohli postupovat analogicky k 2. a 3. způsobu řešení, avšak pro značnou podobnost tyto způsoby vynecháváme a přenecháme je čtenáři.

b) Nalezení příčky mimoběžek daným směrem je speciálním případem příkladu 1, pokud bychom uvažovali, že bod M je nekonečně vzdálený (nevlastní bod). Protože se nevlastními body (tak jako činí např. projektivní geometrie) v tomto textu nezabýváme, řešíme každý problém zvlášť . Ze způsobu řešení patrná podobnost obou řešení.

c) Pro které body M příčka při zadaných mimoběžkách p: $X = A + t\boldsymbol{u}$, q: $Y = B + r\boldsymbol{v}$ neexistuje? Podle příkladu 1 takový případ může nastat, když jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, $M - A$ lineárně závislé. Protože předpokládáme, že přímky p, q jsou mimoběžky, jsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nezávislé. Nenulový vektor $M - A$ tedy patří do vektorového prostoru $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. Na následujícím obrázku krychle leží všechny přímky, které procházejí bodem M a protínají přímku p v rovině, která je rovnoběžná s přímkou q. Tyto přímky tedy nemohou přímku q protnout.



Příklad 3

Nechť rovina $\rho = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ a přímka $c = [B, \boldsymbol{w}]$ jsou v A_4 mimoběžné. Určete jejich příčku *p*, procházející daným bodem *M*.

Řešení:

Podobně jako v příkladu 1, z předpokladu $X \in \rho$, $Y \in c$ a lineární závislosti vektorů $X - M$, $Y - M$ plyne existence $k \in R$, tak že platí

$$X - M = k(Y - M),$$

kde $X = A + t\boldsymbol{u} + r\boldsymbol{v}$, $Y = B + s\boldsymbol{w}$. Po dosazení dostaneme rovnici

$$A + t\boldsymbol{u} + r\boldsymbol{v} - M = k(B + s\boldsymbol{w} - M),$$

která, po rozepsání v souřadnicích prostoru A_4 , přestavuje soustavu čtyř lineárních rovnic pro neznámé *t*, *r*, *k*, *k*s. Vypočtením např. neznámé *s* určíme z $Y = B + s\boldsymbol{w}$ souřadnice bodu *Y* příčky *p*, která je takto určena $p = M\,Y$.

Příklad

Určete příčku *s* mimoběžek $a = [A, \boldsymbol{u}]$, $b = [B, \boldsymbol{v}]$, která prochází daným bodem *M*, jestliže $A = [1, 2, 0]$, $\boldsymbol{u} = (0, 0, 1)$, $B = [2, 1, 1]$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)$, $M = [-1, 3, 0]$.

Řešení:

Podle příkladu 1 je

$$X - M = k(Y - M)$$

a po dosazení $X = A + t\boldsymbol{u}$, $Y = B + r\boldsymbol{v}$ dostaneme rovnici

$$A + t\boldsymbol{u} - M = k(B + r\boldsymbol{v} - M).$$

Rozepsáním do souřadnic dostaneme soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé *t*, *k* ,*kr*,

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= k\,(2 + r + 1) \\ 2 - 3 &= k\,(1 + r - 3) \\ t &= k\,(1 + r), \end{aligned}$$

která má řešení $t = \frac{4}{5}$, $r = \frac{1}{3}$, $k = \frac{3}{5}$. Dosazením např. t do rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}$ dostaneme bod X příčky s, pro jehož souřadnice platí

$$x = 1,\ \ y = 2,\ \ z = \frac{4}{5}.$$

Příčka s je určena body M a X, tedy má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} s:\ x &= -1 + 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= \frac{4}{5}t. \end{aligned}$$

Jiné řešení: Nyní vypočítáme příčku s mimoběžek jako průsečnici dvou rovin α, β podle 3. způsobu v příkladu 1.

Je $\alpha: X = M + t\boldsymbol{u} + k(M - A)$, $\beta: Y = M + r\boldsymbol{v} + l(M - B)$ a platí $s = \alpha \cap \beta$. Body průniku splňují rovnici

$$t\boldsymbol{u} + k(M - A) - r\boldsymbol{v} - l(M - B) = \boldsymbol{o}.$$

Odtud rozepsáním dostaneme následující soustavu tří homogenních lineárních rovnic o čtyřech neznámých t, k, r, l

$$\begin{aligned} -2k - r + 3l &= 0 \\ k - r - 2l &= 0 \\ t \qquad - r + l &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém vyjádření dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a odtud např. $r = -\frac{1}{3}t$, kde jsme položili $l = t$. Dosazením do vztahu $X = M + r\boldsymbol{v} + l(M - B)$ dostaneme rovnici příčky s ve tvaru

$s: X = M + t\boldsymbol{s}$, kde $M = [-1, 3, 0]$, $\boldsymbol{s} = \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \sim (10, -5, 4)$.

Cvičení

1. Určete příčku p mimoběžek $a = [A, \boldsymbol{u}]$, $b = [B, \boldsymbol{v}]$, která je rovnoběžná se směrem $\boldsymbol{m}$, jestliže $A = [1, 2, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$,

$B = [0, 9, -2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{m} = (1, 2, 0)$.

Výsledek: p: $x = t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2$.

2. Určete příčku s mimoběžek k, l

$$k: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}, \qquad l: \frac{x}{5} = 2 - y = \frac{z+5}{2},$$

která prochází bodem $M = [4, 0, -1]$.

Výsledek: s: $x = 4 + t$, $y = t$, $z = -1 - 2t$.

3. V A_4 určete přímku s procházející bodem $M = [8, 9, -11, -15]$, která protíná přímky p, q

p: $x_1 = t$, $x_2 = 2 + t$, $x_3 = -5 - t$, $x_4 = -10 - t$,

q: $x_1 = s$, $x_2 = s$, $x_3 = -1 - s$, $x_4 = -2s$.

Výsledek: průsečíky $[12, 14, -17, -22]$, $[4, 4, -5, -8]$, příčka s má např. rovnici

$x_1 = 8 + 4t$, $x_2 = 9 + 5t$, $x_3 = -11 - 6t$, $x_4 = -15 - 7t$.

9. Svazek nadrovin

Definice 9. 1

Množinu všech nadrovin z A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $(n-2)$, nazýváme *svazkem nadrovin prvého druhu*. Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin nazveme *svazkem nadrovin druhého druhu*.

Věta 9.1

Nechť dvě různoběžné nadroviny L_1, L_2 mají v A_n rovnice

$$L_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \qquad (9.1)$$

$$L_2 \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0. \qquad (9.2)$$

Potom rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0 \qquad (9.3)$$

je rovnicí svazku nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Důkaz:

Máme dokázat, že :

1) rovnice (9.3) je rovnicí nadroviny při libovolné volbě λ_1, λ_2, z nichž aspoň jedno je nenulové.

2) každý bod průniku nadrovin (9.1) , (9.2) je bodem každé nadroviny (9.3), tj. rovnice (9.3) je rovnicí svazku nadrovin,

3) každá nadrovina svazku (9.3) různá od nadrovin (9.1), (9.2) má rovnici typu (9.3).

Ad 1) Čísla λ_1, λ_2 nesmí být řešením soustavy rovnic

$$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.4}$$

protože rovnice (9.3) by měla v opačném případě všechny koeficienty u x_i rovny nule a nebyla by rovnicí nadroviny. Protože nadroviny nejsou rovnoběžné, má matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

hodnost 2, tedy aspoň jeden její determinant druhého stupně je nenulový. Soustava (9.4) má pouze triviální řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Rovnice (9.3) je tedy rovnicí nadroviny, je-li aspoň jedno λ_1, λ_2 nenulové.

2) Nechť P je libovolný bod průniku nadrovin (9.1) , (9.2). Po dosazení souřadnic bodu P do vztahů (9.1), (9.2) je

$$L_1(P) = 0, \qquad L_2(P) = 0$$

a tedy také platí

$$\lambda_1 L_1(P) + \lambda_2\, L_2(P) = 0$$

tj. každý bod průniku daných nadrovin je bodem každé nadroviny (9.3).

3) Nechť Q je libovolný bod neležící v žádné z nadrovin (9.1), (9.2), tj. $L_1(Q) \neq 0, L_2(Q) \neq 0$. Zvolme $\lambda_1 = L_2(Q)$, $\lambda_2 = -L_1(Q)$. Pak rovnice $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$ je rovnicí nadroviny daného svazku, která s ohledem na volbu λ_1 a λ_2 (po dosazení souřadnic bodu Q) tj.

$$L_2(Q) \cdot L_1(Q) - L_1(Q) \cdot L_2(Q) = 0$$

prochází bodem Q.

Věta 9.2

Jsou-li nadroviny (9.1) a (9.2) rovnoběžné, potom podle (9.3) je rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

rovnicí svazku nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy rovnic (9.4).

Důkaz:

Jsou-li nadroviny (9.1), (9. 2) rovnoběžné, pak existuje číslo $k \neq 0$ takové, že $b_i = ka_i$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ (viz věta 7.5). Soustava (9.4) má potom tvar $a_i(\lambda_1 + \lambda_2 k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Protože alespoň jedno z čísel a_i je nenulové, je $\lambda_1 + \lambda_2 k = 0$. Soustava (9.4) má tedy nekonečně mnoho řešení. Tato řešení stanovují podmínku, kdy rovnice (9.3) má všechny koeficienty u x_i rovny nule, tj. kdy (9.3) není rovnicí nadroviny.

Dokázali jsme, že rovnice (9.3) je rovnicí nadroviny, nejsou-li λ_1, λ_2 řešením (9.4). Podobně jako v důkazu věty 9.1 se ještě dokáže: rovnice (9.3) je rovnicí nadroviny svazku druhého druhu, každá rovina rovnoběžná s nadrovinami (9.1), (9.2) má rovnici typu (9.3). Důkazy jsou analogické.

Věta 9.3

Tři různé nadroviny, které mají neparametrické rovnice

$$
\begin{aligned}
L_1 &\equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0 \\
L_2 &\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0 \qquad (9.5) \\
L_3 &\equiv \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0
\end{aligned}
$$

náleží témuž svazku nadrovin (prvého či druhého druhu), právě když matice ze všech koeficientů (rozšířená) má hodnost dvě.

Důkaz:

Protože nadroviny jsou různé, má rozšířená matice hodnost $h' \geq 2$. Když roviny náleží témuž svazku, je $L_3 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ a tedy třetí řádek rozšířené matice je lineární kombinací ostatních tj. $h' = 2$.

Je-li obráceně $h' = 2$, je jeden řádek lineární kombinací zbývajících řádků a roviny náleží svazku.

Poznámka

Označme hodnost matice z koeficientů soustavy (9.5) písmenem h. Pak platí: je-li $h' = 2$ a $h = 1$, náleží nadroviny (9.5) svazku druhého druhu. Je-li $h' = 2$ a $h = 2$ náleží svazku prvého druhu. Zdůvodněte!

Příklad.

Tři nadroviny v A_4

$$L_1 \equiv x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5 = 0$$

$$L_2 \equiv x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = 0$$

$$L_3 \equiv 3x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 - 9 = 0$$

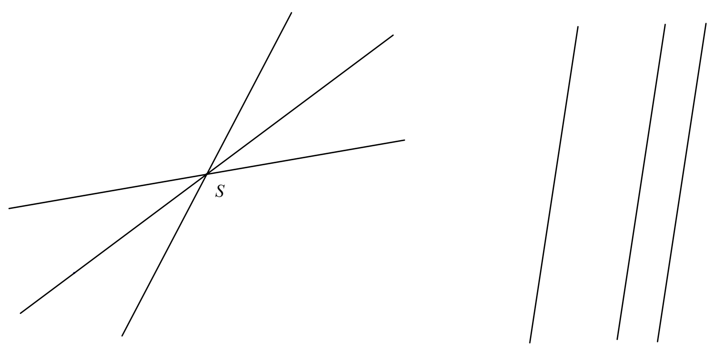
náleží témuž svazku prvého druhu. Dokažte.

Řešení:

Platí $2L_1 + L_2 = L_3$, tedy $h' = 2$, zřejmě také $h = 2$. Podrobně lze ukázat známou úpravou matice z koeficientů soustavy.

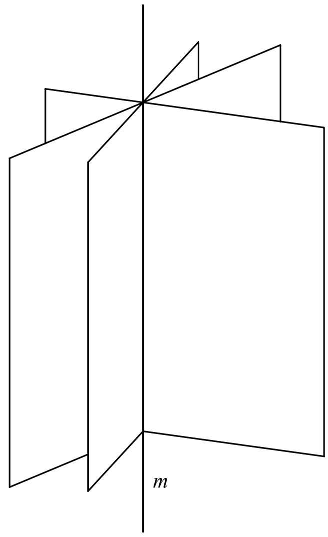
Svazky přímek v A_2 a svazky rovin v A_3.

Množinu všech přímek v A_2, které mají společný bod S, nazýváme svazek přímek (prvého druhu) v rovině A_2, bod S je *střed svazku*.



Množinu všech navzájem rovnoběžných přímek v rovině A_2 nazýváme svazkem druhého druhu (osnovou přímek).

Množinu všech rovin v A_3, jejichž průnikem je přímka m, nazýváme svazkem rovin (prvého druhu), přímka m je *osa svazku*. Množina



všech vzájemně rovnoběžných rovin tvoří svazek druhého druhu (osnovu) v A_3.

Vyslovte věty 9.1, 9.2, 9. 3 pro svazky přímek v A_2 a pro svazky rovin v A_3.

Příklad

Určete rovnici roviny ρ v A_3, která prochází bodem $M = [1, 2, 3]$ a průsečnicí rovin

$$L_1 : 3x + y - z = 0 , \qquad L_2 : 2x + y + z - 1 = 0.$$

Řešení:

1. způsob (pomocí svazku rovin): Hledaná rovina ρ náleží svazku rovin, které jsou určené danými rovinami L_1 a L_2, proto má rovnici

$$\lambda_1(3x + y - z) + \lambda_2(2x + y + z - 1) = 0 .$$

Bod M leží v jedné z rovin svazku, proto dosazením souřadnic bodu M do rovnice svazku vypočteme

$$\lambda_1(3+2-3)+\lambda_2(2+2+3-1)=0$$

$$\lambda_1+3\lambda_2=0\,.$$

Zvolíme např. $\lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1,$ zpětným dosazením do rovnice svazku vychází rovina

$$\rho:\ 7x+2y-4z+1=0.$$

2. způsob (bez užití svazku rovin): Průsečnice rovin L_1, L_2 je přímka $q: X=P+t\boldsymbol{u}$, kde $P=[-1,0,3]$, $\boldsymbol{u}=(2,-5,1)$, jak se snadno zjistí řešením soustavy rovnic $L_1:\ 3x+y-z=0$, $L_2:\ 2x+y+z-1=0$ pro neznámé x, y, položíme-li $z=t$. Hledaná rovina ρ je potom určena přímkou q a bodem M, tedy je $\rho=[M,\boldsymbol{u},M-P]$, tj.

$$\rho:\ x=1+2t+2s,$$

$$y=2-5t-s,$$

$$z=3+t+3s.$$

Vyloučením parametrů s, t dostaneme rovnici roviny

$\rho:\ 7x+2y-4z+1=0.$

Cvičení

1. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M=[1,\ 1]$ a průsečíkem přímek

$$x+2y-1=0,\quad 3x-y-5=0.$$

Výsledek: $9x+4y-13=0.$

2. Určete rovinu, která je rovnoběžná s přímkou

$$x=1+82t,\ y=7,\ z=5+79t,$$

a ve které leží přímka

$$3x - 4y + z - 12 = 0$$
$$4x - 7y - 3z + 4 = 0.$$

Výsledek: $79x - 147y - 82z + 184 = 0$.

3. Při kterých hodnotách konstant k, m náleží rovina

$$5x + ky + 4z + m = 0$$

svazku rovin

$$3x - 7y + z - 3 = 0,$$
$$x - 9y - 2z + 5 = 0.$$

Výsledek: $k = -5$, $m = -11$.

10. Trs nadrovin

Věta 7.11, o vzájemné poloze dvou nadrovin, nás přivedla k myšlence existence svazků nadrovin. Nyní vyslovíme obdobnou větu o vzájemné poloze tří nadrovin, které nenáleží témuž svazku.

Věta 10. 1

Tři nadroviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_n, které nenáleží témuž svazku nadrovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:

1) průnikem je bodový podprostor A_{n-3} dimenze $(n-3)$,

2) průnik nadrovin je prázdný, přičemž průnik zaměření nadrovin je vektorový podprostor V_{n-2} dimenze $(n-2)$.

Důkaz:

Jestliže nadroviny α, β, γ nepatří témuž svazku, pak jsou aspoň dvě různoběžné, např. $\alpha \cap \beta = A_{n-2}$. Pak mohou, dle věty 7.10, nastat dvě možnosti pro vzájemnou polohu průniku A_{n-2} a nadroviny γ:

1) $A_{n-2} \cap \gamma = A_{n-3}$

2) $A_{n-2} \parallel \gamma$.

V případě 1) je bodový podprostor A_{n-3} průnikem nadrovin α, β, γ.

V případě 2) je zaměření V_{n-2} bodového podprostoru A_{n-2} podprostorem zaměření nadroviny γ. Protože průnik $\alpha \cap \beta = A_{n-2}$, je V_{n-2} také podprostorem zaměření nadrovin α, β.

Definice 10.1

Množinu všech nadrovin v A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $(n-3)$, nazýváme *trs nadrovin prvního druhu*.

Množinu všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje podprostor V_{n-2} ze zaměření V_n prostoru A_n, nazveme *trs nadrovin druhého druhu*.

Poznámka

Uvažujeme-li 3 přímky (tzn. nadroviny) v rovině A_2, pak je zřejmé, že tyto přímky nemohou určovat trs přímek prvého druhu, protože bodový podprostor dimenze $n-3$ = 2 – 3 = -1 v A_2 neexistuje. Existuje ovšem vektorový podprostor V_{n-2}, což je pro rovinu nulový vektor. Proto všechny přímky v rovině tvoří trs přímek 2. druhu. Tento případ však zřejmě nemá smysl uvažovat. Budeme proto trs nadrovin uvažovat v prostorech dimenze $n \geq 3$.

Definice trsu rovin v A_3

Množina všech rovin v A_3, jejichž průnikem je právě jeden bod, tvoří trs rovin 1. druhu. Společný bod se jmenuje *střed trsu*. Množina rovin, které jsou rovnoběžné s jediným směrem, se nazývá trs rovin druhého druhu.

Poznámky

V prostoru A_3 platí:

1) Všechny roviny trsu prvního druhu se středem S, které procházejí ještě dalším bodem $M \neq S$, obsahují přímku MS a tvoří tedy svazek rovin prvního druhu. V každém trsu rovin prvního druhu tedy existuje nekonečně mnoho svazků rovin prvního druhu, neexistuje v něm ovšem svazek druhého druhu.

2) Všechny roviny trsu druhého druhu, které jsou rovnoběžné se společným směrem s, tvoří svazek rovin druhého druhu. Existuje tedy v každém trsu rovin druhého druhu nekonečně mnoho svazků rovin druhého druhu. Kromě toho v něm existuje i nekonečně mnoho svazků prvého druhu, totiž všech svazků, jejichž osa je rovnoběžná se směrem s.

Věta 10.2

Průnikem tří nadrovin

$$
\begin{aligned}
L_1 &\equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0 \\
L_2 &\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0 \qquad (10.1) \\
L_3 &\equiv \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0
\end{aligned}
$$

je afinní bodový podprostor dimenze $(n-3)$, jestliže hodnost matice soustavy (10.1) z koeficientů při x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, je $h = 3$. Průnik nadrovin je prázdný (přičemž průnikem zaměření nadrovin je vektorový podprostor dimenze $(n-2)$), jestliže hodnost matice soustavy je $h = 2$ a hodnost matice rozšířené $h' = 3$.

Důkaz:

První tvrzení vyplývá z věty 7.13 pro $k = 3$. Protože $h = 3$, je také $h' = 3$ a průnikem je podprostor dimenze $n-3$.

Jestliže $h = 2$ a $h' = 3$, nemá soustava (10.1) řešení, průnik je prázdný. Protože $h' = 3$, nenáleží podle věty 9.3 nadroviny témuž svazku. Podle věty 10.1 je tedy průnik zaměření nadrovin vektorový podprostor dimenze $n-2$.

Věta 10.3

Nechť průnikem nadrovin (10.1) je bodový podprostor dimenze $(n-3)$. Pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0 \qquad (10.2)$$

je rovnicí trsu nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Důkaz:

Máme dokázat:

1) rovnice (10.2) je rovnicí nadroviny,
2) každý bod průniku nadrovin (10.1) je bodem každé nadroviny (10.2),
3) každá nadrovina trsu má rovnici (10. 2).

Ad 1) Čísla λ_1 , λ_2 , λ_3 nesmí být řešením soustavy

$$a_i\,\lambda_1 + b_i\,\lambda_2 + c_i\,\lambda_3 = 0\,,\quad i = 1,2,\ldots,n\,, \tag{10.3}$$

protože rovnice (10.2) by měla v opačném případě všechny koeficienty u x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ rovny nule a nebyla by rovnicí nadroviny. Protože hodnost matice soustavy rovnic (10.l) je podle věty 10.3 rovna třem, má soustava homogenních rovnic (10.3) pouze triviální řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$ Rovnice (10.2) je tedy rovnicí nadroviny, je-li aspoň jedno $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nenulové.

Ad 2) Nechť P je libovolný bod průniku nadrovin (10.1), tzn. $L_1(P) = 0$, $L_2(P) = 0$, $L_3(P) = 0$, potom platí

$$\lambda_1 L_1(P) + \lambda_2 L_2(P) + \lambda_3 L_3(P) = 0.$$

Ad 3) Nechť bod Q neleží v nadrovinách (10.1), tzn. $L_1(Q) \neq 0$, $L_2(Q) \neq 0$, $L_3(Q) \neq 0$. Zvolme $\lambda_1 = L_2(Q)$, $\lambda_2 = -L_1(Q)$, $\lambda_3 = 0.$ Pak rovnice $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$ je rovnicí nadroviny trsu, která prochází bodem Q.

Věta 10.4

Nechť průnik nadrovin (10.1) je prázdný a průnik jejich zaměření je vektorový prostor dimenze $(n-2)$. Pak rovnice (10.2)

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin druhého druhu, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reálná čísla, která nejsou řešením soustavy (10.3).

Důkaz:

Je analogický důkazu věty 9.2 resp. 10.3.

Věta 10.5

Čtyři nadroviny

$$L_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, L_2 \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0,\ L_3 \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c = 0,$$

$$L_4 \equiv \sum_{i=1}^{n} d_i x_i + d_0 = 0$$

náleží témuž trsu nadrovin (prvého nebo druhého druhu), právě když hodnost *h* matice

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots\dots\dots, & a_n, & a_0 \\ b_1, & b_2, & \dots\dots\dots, & b_n, & b_0 \\ c_1, & c_2, & \dots\dots\dots, & c_n, & c_0 \\ d_1, & d_2, & \dots\dots\dots, & d_n, & d_0 \end{pmatrix} \tag{10.5}$$

ze všech koeficientů je rovna třem.

Důkaz:

Dle věty 10.2, tři nadroviny, určující trs nadrovin, mají hodnost matice ze všech koeficientů $h' = 3$. Patří-li např. nadrovina L_4 do trsu určenému nadrovinami L_1, L_2, L_3, je $L_4 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ a tedy čtvrtý řádek matice (10.5) je lineární kombinací zbývajících, tedy hodnost *h* matice (10.5) je 3.

Poznámka

Jestliže hodnost matice (10.5) označíme h' a hodnost matice (10.5) bez posledního sloupce *h*, pak platí: je-li $h' = 3,\ h = 2$ náleží nadroviny trsu druhého druhu. Je-li $h' = h = 3$ potom náleží nadroviny trsu prvého druhu. Zdůvodněte.

Příklad

Určete, zda dané tři roviny v A_3 tvoří trs či svazek:

a) $3x - y + z + 1 = 0$
$y - z + 6 = 0$
$x - 3y + 5z = 0$

b) $x = 0$
$y = 0$
$x + y + 1 = 0.$

Řešení:

a) Hledáme hodnost matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -14 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -6 & -47 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Je zřejmě $h' = h = 3$, roviny náleží trsu prvého druhu.

b) Je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

hodnost $h' = 3,\ h = 2$, roviny náleží trsu druhého druhu.

Příklad

V A_3 určete rovnici roviny ρ, která náleží trsu rovin

$$\begin{aligned} 2x - y + z + 1 &= 0 \\ x + y &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \tag{10.6}$$

a prochází body $A = [\,1, 1, 1]$, $B = [\,0, 0, 1]$.

Řešení:

1. způsob (pomocí trsu rovin): Rovnice trsu rovin je

$$\lambda_1(2x-y+z+1)+\lambda_2(x+y)+\lambda_3(y+2z)=0$$

Rovina ρ trsu má procházet body A, B, tedy platí

$$\begin{aligned} 3\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3&=0\\ \lambda_1+\lambda_3&=0. \end{aligned}$$

Zvolíme-li např. $\lambda_1=1,\ \lambda_3=-1$ je $\lambda_2=0$.

Dosazením do rovnice trsu vychází

$$\rho:\ 2x-2y-z+1=0.$$

2. způsob (bez užití trsu rovin):

Rovina ρ náleží trsu rovin, tedy musí obsahovat střed S trsu tj. společný bod rovin trsu. Řešení soustavy (10.6) dává jediný bod $S=[-2/7,\ 2/7,\ -1/7]$. Rovina ρ je dána třemi body A,B,S. Předpokládejme, že obecná rovnice roviny ρ má tvar $\rho:\ ax+by+cz+d=0$. Dosazením souřadnic bodů A,B,S dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=0\\ c+d&=0\\ -2a+2b-c+8d&=0, \end{aligned}$$

jejíž řešením je např. čtveřice $a=2,\ b=-2,\ c=-1,\ d=1$, tj. rovina ρ má rovnici

$$\rho:\ 2x-2y-z+1=0.$$

Cvičení

l. Rozhodněte, zda roviny určují trs či svazek rovin v A_3:

a) $$\begin{aligned} 2x-y+z-1&=0\\ 2x-3y+7z+5&=0\\ x-z&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x-y+6z+3&=0\\ 2x-3y-z+1&=0\\ -3x+2y-31z-14&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x - 5y - 31 &= 0 \\ 4x + 11z + 43 &= 0 \\ 2x + 3y + 4z + 20 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x + y + 3z - 1 &= 0 \\ 5x + 3z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Výsledek: a) trs druhého druhu, b) svazek, c) trs prvního druhu, d) trs prvního druhu.

2. V A_3 určete rovnici roviny náležející trsu rovin

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 4 &= 0 \\ x - 3y - 4z - 3 &= 0 \\ 7x - 5y + z - 8 &= 0, \end{aligned}$$

která prochází body $M = [2, 3, 1]$, $N = [7, 11, 4]$.

Výsledek: $x - y + z = 0$.

3. Určete parametry b, c tak, aby rovina $x + by + cz + 1 = 0$ patřila do trsu rovin

$$\begin{aligned} 3x + y - z + 4 &= 0 \\ 2x - y + z + 1 &= 0 \\ 3x + y + z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

a nesplývala s žádnou z těchto tří rovin. Určete druh trsu.

Výsledek: $b = c$, trs prvního druhu.

4. Zjistěte, zda čtyři roviny tvoří trs či svazek rovin v A_3:

a)
$$\begin{aligned} x - y + z - 1 &= 0 \\ 3x + y - 2z - 7 &= 0 \\ 2x + 2y - 3z - 1 &= 0 \\ 8x - 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \\ x + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Výsledek: a) trs druhého druhu, b) netvoří trs ani svazek.

5. Určete souřadnice c_1, c_3 bodu $C=[c_1, 0, c_3]$, který leží v rovině obsahující body A = [0, 0, 0] , B = [5, 0, 3], jestliže tato rovina patří do trsu rovin

$$x + y = 0, \qquad x + z = 1, \qquad y + z = 3.$$

Výsledek: $3c_1 - 5c_3 = 0$.

6. Průsečíkem rovin

$$2x + y - z - 2 = 0$$
$$x - 3y + z + 1 = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

položte rovinu rovnoběžnou s rovinou σ

$$\sigma: x + y + 2z = 0.$$

Výsledek: $x + y + 2z - 4 = 0$.

7. Napište rovnici roviny, která patří do trsu rovin

$$x - y = 0, \quad x + y - 2z + 1 = 0, \qquad 2x + z - 4 = 0$$

a prochází souřadnicovou osou y.

Výsledek: $10x - 7z = 0$.

8. Určete rovinu, ve které leží přímka

$$p: \; 5x - 8y - 6z - 23 = 0$$
$$4x - y - 3z - 4 = 0,$$

a která náleží trsu rovin

$$2x - 5y + 7z - 14 = 0$$
$$x + 2y - 6z + 7 = 0$$
$$3x + 4y + 11z - 10 = 0.$$

Výsledek: $3x - 2z - 1 = 0$.

II. ČÁST

EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR

Nyní budeme vyšetřovat prostor, který má kromě všech vlastností, jež má afinní prostor, ještě jednu vlastnost navíc. Touto vlastností je možnost měřit vzdálenost mezi libovolnými dvěma body, stručně řečeno, zavedení metriky. Zavedení metriky nám umožní zkoumat nejen vzdálenost mezi body, ale i vzdálenost mezi podprostory eukleidovského prostoru - např. vzdálenost bodu od přímky, bodu od roviny, vzdálenost dvou mimoběžek apod. Na základě pojmu vzdálenost dvou bodů budeme zkoumat i obsahy a objemy těles. Nejprve se budeme zabývat objemem nejednodušších útvarů - tzv. simplexů. Od objemu simplexu se odvíjí výpočet objemu všech "složitějších" těles. Kromě vzdálenosti podprostorů a objemu simplexu budeme zkoumat ještě odchylku podprostorů, někdy se též říká úhel podprostorů. Všechny tyto pojmy lze definovat pomocí skalárního součinu dvou vektorů ze zaměření afinního prostoru. Stručně řečeno, eukleidovský prostor je afinní prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin. Budeme se proto nejprve zabývat vlastnostmi vektorových prostorů se skalárním součinem - tzv. unitárních prostorů. Po prozkoumání základních vlastností těchto vektorových prostorů se skalárním součinem budeme definovat eukleidovský prostor.

K tomu, abychom mohli zkoumat vlastnosti eukleidovského prostoru je obvykle nutné zavedení soustavy souřadnic tj. zobrazení, které každému bodu přiřadí vzájemně jednoznačně jeho souřadnice. Změníme-li soustavu souřadnic, změní se zřejmě i souřadnice bodů. Zavedeme speciální pravoúhlou soustavu souřadnic, která se nazývá kartézská soustava souřadnic (budeme značit k.s.s.). Vyjádříme-li např. objem čtyřstěnu pomocí souřadnic jeho čtyř vrcholů v nějaké kartézské soustavě souřadnic, je zcela přirozené požadovat, aby se tento objem nezměnil, vyjádříme-li jej pomocí souřadnic vrcholů čtyřstěnu v jiné kartézské soustavě souřadnic. Jedním z našich hlavních úkolů bude ukázat, že pojmy jako vzdálenost dvou bodů, vzdálenost dvou podprostorů, odchylka dvou podprostorů, objem

simplexu aj. nezávisí na volbě kartézské soustavy souřadnic, jinak řečeno, že tyto pojmy jsou pojmy geometrickými, či ještě jinak, že tyto pojmy jsou geometrickými invarianty (z latiny "invarius" = neměnný).
Řada pojmů z teorie vektorových prostorů se skalárním součinem se probírá v základním kursu lineární algebry. Myslíme však, že nebude na škodu, když budeme postupovat od počátku a zavedeme systematicky všechny potřebné pojmy.

1. Skalární součin

Definice 1.1
Mějme dán vektorový prostor V_n dimenze n nad tělesem reálných čísel. Říkáme, že V_n je vektorový prostor se skalárním součinem nebo též unitární prostor, jestliže je každým dvěma vektorům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$ přiřazeno reálné číslo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, které má tyto vlastnosti:

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
2. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_n$,
3. $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, kde λ je reálné číslo,
4. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ právě když $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Číslo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ nazýváme *skalární součin* vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Úmluva: Místo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ budeme psát $\boldsymbol{a}^2$.

Vlastnosti 1., 2., 3. nám říkají, že skalární součin je komutativní, distributivní a asociativní při násobení reálným číslem. Z vlastností 1.- 4. např. plyne:
$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$,
$\boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$,
$\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a} = (0 \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0 (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) = 0$.
Užijeme-li 2. a 3. vlastnost na více vektorů dostaneme:

Je-li $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j$ potom

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j .$$

Odtud je vidět, že k tomu abychom definovali skalární součin pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ z V_n, stačí znát skalární součin pro vektory báze $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Skalární součin jsme definovali axiomaticky, tj. byla zadána pouze abstraktní struktura, aniž známe konkrétní objekty a operace. Lze proto očekávat existenci různých modelů vektorových prostorů se skalárním součinem.

Nejznámějším modelem vektorového prostoru se skalárním součinem je vektorový prostor V_2 tzv. geometrických vektorů (tj. orientovaných úseček s pevným počátečním bodem), ve kterém je skalární součin $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ definován jako součin délek vektorů $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ krát kosinus odchylky vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Tento model však zdaleka není jediný. Uvažujme např. prostor R^n všech n-tic reálných čísel a pro libovolné dva prvky $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ z R^n definujme

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \; . \tag{1.1}$$

Potom n - tice $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n)$ lze považovat za matice typu $(1, n)$. Označíme-li je po řadě $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ lze místo (1.1) psát

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n)^T = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^T,$$

kde $\boldsymbol{B}^T$ značí matici transponovanou k $\boldsymbol{B}$.

Je důležité si uvědomit, že na jednom vektorovém prostoru lze definovat různé skalární součiny. Tak např. v R^n lze kromě skalárního součinu (1.1) definovat skalární součin např. takto

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = A \cdot C \cdot B^T \tag{1.2}$$

kde $\boldsymbol{C}$ je libovolná symetrická, pozitivně definitní matice n-tého řádu. *Pozitivně definitní matice* je taková matice $\boldsymbol{C}$, splňující vlastnost: $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X}^T > 0$ pro každou matici $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0,0,...,0)$. Snadno se ověří, že operace (1.2) s takto definovanou maticí $\boldsymbol{C}$ je skalární součin.

Jelikož symetrických, pozitivně definitních matic n-tého řádu je nekonečně mnoho, lze usoudit, že v R^n lze definovat skalární součin nekonečně mnoha způsoby. Zvolíme-li za matici $\boldsymbol{C}$ jednotkovou matici $\boldsymbol{I}$ dostaneme skalární součin (1.1).

Příklad

Ve vektorovém prostoru R^2 je každým dvěma vektorům $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ přiřazeno číslo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 3a_2b_2 \, . \tag{1.3}$$

Ukažte, že takto definovaná operace je skalární součin.

Řešení:
Operaci (1.3) lze napsat v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2)\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ je symetrická a pozitivně definitní, neboť

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}^T=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=$$

$$=2x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1^2+2x_2^2=$$

$$(x_1-x_2)^2+x_1^2+2x_2^2\geq 0.$$

Rovnost nastává právě když $x_1=x_2\wedge x_1=0\wedge x_2=0$, tj. $x_1=x_2=0$. Tedy operací (1.3) je definován skalární součin. Vlastnosti 1. - 4. skalárního součinu můžeme ověřit též přímo.

Ukážeme ještě jeden model vektorového prostoru se skalárním součinem, často užívaný v matematické analýze. Uvažujme vektorový prostor $C_{[a,b]}$ všech reálných spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Skalární součin na prostoru $C_{[a,b]}$ lze definovat následujícím způsobem:
Pro každé dvě funkce $\boldsymbol{f}=f(x)$, $\boldsymbol{g}=g(x)$ z $C_{[a,b]}$ definujme

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=\int_a^b f(x)g(x)dx. \qquad (1.4)$$

Za integrál vpravo v (1.4) lze vzít např. Riemannův integrál. Z vlastností Riemannova integrálu lze snadno odvodit vlastnosti 1. - 4. skalárního součinu.

Pomocí skalárního součinu budeme nyní definovat velikost vektoru.

Definice 1.2
Velikostí (*normou*) vektoru $\boldsymbol{a}$ nazýváme číslo $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

Cvičení
1. Ověřte, zda zobrazení g definované na vektorovém prostoru R^2 resp. R^3 je skalární součin, platí-li pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ z R^2 resp.
$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ z R^3
a) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$,
b) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}$,
c) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_2 v_2$,
d) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$,
e) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_2 v_3 + u_3 v_2$.
Výsledek: a) ano, b) ne, c) ne, např. $(1,-1) \cdot (1,-1) = 0$, d) ano, e) ne.

2. Je dán vektorový prostor geometrických vektorů (tj. orientovaných úseček s pevným počátečním bodem) v rovině. Ukažte, že operace, která každým dvěma vektorům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ přiřadí číslo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\varphi ,$$

kde φ je odchylka vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, je skalární součin.

2. Cauchyova nerovnost

Jsou-li dva nenulové vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ kolineární, tj. existuje-li takové číslo *k*, že $\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, můžeme koeficient k najít tak, že obě strany rovnosti $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}$ vynásobíme skalárně vektorem $\boldsymbol{b}$. S využitím vlastností skalárního součinu 1.- 4. dostaneme $0 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - k\,\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}$ a odtud

$$k = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}.$$

Označme

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\,\boldsymbol{b}. \qquad (2.1)$$

Pro kolineární vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ bude vektor v (2.1) nulový. Pro nekolineární vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{v}$ nenulový. Délku vektoru **v** můžeme považovat za míru nekolineárnosti vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Čím je menší $|\boldsymbol{v}|$, tím méně se vektory liší od kolineárních vektorů.
Zkoumejme délku $|\boldsymbol{v}|$ vektoru $\boldsymbol{v}$:

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{b} + \left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\right)^2 \boldsymbol{b}^2,$$

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{a}^2 - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2}.$$

Na levé straně je nezáporné číslo a tedy platí

$$\boldsymbol{a}^2 - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2} \geq 0,$$

což po úpravě dává

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|.$$

Odvodili jsme nerovnost, která se nazývá *Cauchyova* (čti: kóšiova), (A.L. Cauchy (1789-1857) - francouzský matematik). Rovnost nastane právě když je vektor **v** nulový, tj. právě když jsou vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lineárně závislé. Výsledek shrňme do věty:

Věta 2.1 (Cauchyova nerovnost)
Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ z V_n platí

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|, \qquad (2.2)$$

přičemž rovnost nastává právě když jsou vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lineárně závislé.

Poznámka
Při důkazu Cauchyovy nerovnosti (2.2) můžeme také postupovat následujícím způsobem: Uvažujme velikost vektoru $\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou nenulové vektory a t je libovolné reálné číslo. Potom platí

$$|\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2t\,\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + t^2\boldsymbol{b}^2 \geq 0,$$

neboť velikost vektoru na druhou je vždy nezáporná. Kvadratický trojčlen $t^2\boldsymbol{b}^2 - 2t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^2$ je pro všechna reálná t nezáporný, právě když diskriminant příslušné kvadratické rovnice není kladný. Tj. právě když platí $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \leq 0$ a to je nerovnost (2.2). Rovnost nastane právě když $\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, tedy právě když jsou vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lineárně závislé.

Nerovnost (2.2) se pro nenulové vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ často píše ve tvaru

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \leq 1. \qquad (2.2)'$$

Je nutné si uvědomit, že nerovnost (2.2) platí pro jakoukoliv volbu skalárního součinu. Zadáme-li v R^n skalární součin jako v (2.1), potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \qquad (2.3)$$

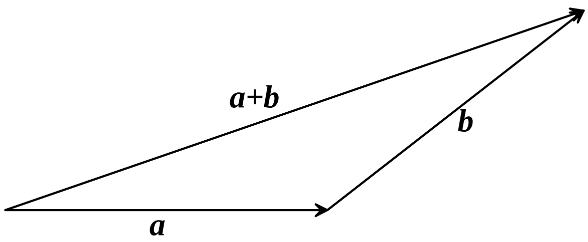
s rovností právě když $a_i = kb_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, k je konstanta. Nerovnost (2.3) je nejčastěji používaný tvar Cauchyovy nerovnosti. V literatuře se často mluví též o Cauchy-Schwarzově nerovnosti, protože každý z těchto význačných matematiků objevil nerovnost (2.2) ve speciálním tvaru pro určitou volbu skalárního součinu. Ve

tvaru (2.3) ji uvádí A. Cauchy. (H. Schwarz (1843-1921) - německý matematik).
Nyní odvodíme důležitou trojúhelníkovou nerovnost.

Věta 2.2. (trojúhelníková nerovnost)
Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ z V_n platí

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|. \tag{2.4}$$

Přitom rovnost nastává právě když existuje $c \in R$, $c \geq 0$ a je buď $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ nebo $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$.



Důkaz:
S využitím Cauchyovy nerovnosti (2.2) dostáváme

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$$
.

Zkoumejme nyní, kdy nastává ve (2.4) rovnost. Ta nastává právě když nastává rovnost v nerovnosti

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|, \tag{2.5}$$

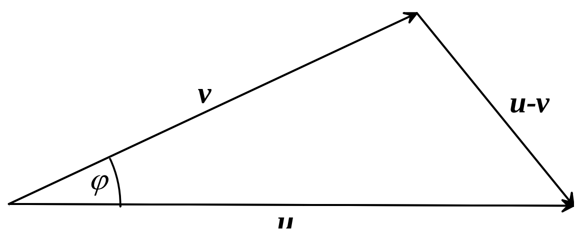
která plyne z (2.2), neboť $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$. Je-li např. $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$, dosazením do (2.5) máme $c\,\boldsymbol{b}^2 \leq |c|\,\boldsymbol{b}^2$ a rovnost nastává právě když $c \geq 0$.

Nyní budeme definovat odchylku dvou vektorů. Budeme přitom vycházet z kosinové věty, známé ze střední školy, podle které platí následující tvrzení:

Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou nenulové vektory. Potom platí

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi, \qquad (2.6)$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, obr.



Dosazením za $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2$ do levé strany (2.6) dostaneme vztah

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi.$$

Proto následující definice:

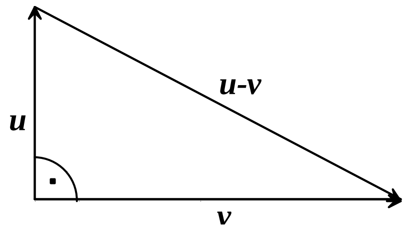
Definice 2.1
Odchylkou dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ nazýváme číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}. \qquad (2.7)$$

Je-li $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, tj. $\cos\varphi = 0$, říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou na sebe *kolmé* (*ortogonální*).

Důsledek (Pythagorova věta)
Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ na sebe kolmé, potom
$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 . \tag{2.8}$$

Důkaz: Plyne ihned ze vztahu (2.6) pro $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, obr.



Cvičení
1. Dokažte, že pro vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ platí $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}| \geq \| \boldsymbol{u}| - |\boldsymbol{v}\|$.

2. Dokažte Cauchyovu nerovnost ve tvaru (2.3) přímým výpočtem. (Návod: nerovnost dokažte nejprve pro $n=2, n=3$. Analogicky postupujte pro libovolné n.

3. Odvoďte vzorec: Pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ platí
$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right),$$
s rovností právě když $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

4. Dokažte, že pro kladná reálná čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ platí
$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2,$$
s rovností právě když $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3. Ortogonální a ortonormální vektory

Definice 3.1
Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ vektorového prostoru V_n jsou *ortogonální*, jestliže platí $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$ pro všechna $i \neq j$, $i, j = 1, 2, .., k$. Vektor **a** se nazývá *jednotkový*, jestliže $|\boldsymbol{a}| = 1$. Vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ jsou *ortonormální,* jestliže jsou ortogonální a jednotkové.

V tomto případě budeme psát $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_i^j$, kde symbol $\delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ (tzv. Kroneckerovo delta) je roven nule pro $i \neq j$ a rovná se jedné pro $i = j$. (L. Kronecker (1823-1891) - německý matematik).
Důležitým pojmem je ortonormální báze vektorového prostoru.

Definice 3.2
Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ tvoří *ortonormální bázi* vektorového prostoru V_n, tvoří-li bázi a jsou-li ortonormální.

Uvedeme některé vlastnosti ortonormálních vektorů.

Věta 3.1
Jsou-li nenulové vektory ortogonální, jsou lineárně nezávislé.

Důkaz:
Nechť jsou vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ ortogonální a nechť platí

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + ... + c_k\boldsymbol{a}_k = 0. \qquad (3.1)$$

Vynásobíme-li obě strany této rovnosti skalárně vektorem $\boldsymbol{a}_j$, kde $j = 1, 2, ..., k$, dostaneme $c_j\boldsymbol{a}_j^2 = 0$. Protože $\boldsymbol{a}_j$ je nenulový vektor, plyne odtud $c_j = 0$ pro všechna $j = 1, 2, ..., k$. Všechny koeficienty $c_1, c_2, ..., c_k$ v (3.1) jsou rovny nule. Vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ jsou tedy podle definice lineárně nezávislé.

K tomu, abychom dokázali najít nějakou ortonormální bázi vektorového prostoru V_n tedy stačí najít n ortonormálních nenulových vektorů. Ty je možné najít postupem, který se nazývá Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. V tomto procesu vezmeme libovolnou bázi V_n, vektory této báze nejprve ortogonalizujeme a nakonec "znormujeme". Tento proces nyní popíšeme.

Věta 3.2 (Gram-Schmidtův ortogonalizační proces)
Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ je libovolná báze vektorového prostoru V_n. Potom existuje ortonormální báze $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\}$ prostoru V_n taková, že $\boldsymbol{b}_i \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_i \rangle$ pro všechna $i = 1, 2, ..., n$.

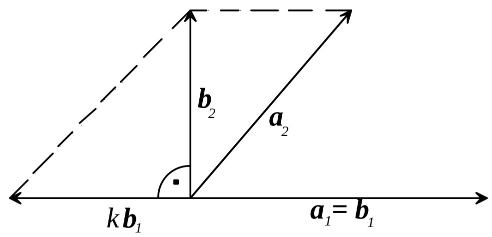
Důkaz:
Položíme $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Nechť dále $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{b}_1$. Zvolme k tak, aby $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0$. Tj. vynásobíme rovnost $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{b}_1$ skalárně vektorem $\boldsymbol{b}_1$, dostaneme $0 = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 + k\,\boldsymbol{b}_1^2$ a odtud $k = -(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)/\boldsymbol{b}_1^2$. Nechť dále $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + r\boldsymbol{b}_1 + s\boldsymbol{b}_2$. Vynásobením této rovnosti postupně vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ za předpokladu, že $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0$ a $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0$ dostaneme $r = -(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3)/\boldsymbol{b}_1^2$, $s = -(\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3)/\boldsymbol{b}_2^2$. Takto postupujeme dále úplnou indukcí až získáme n ortogonálních vektorů $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$. Z těchto vektorů vytvoříme normováním ortonormální bázi

$$\frac{1}{|\boldsymbol{b}_1|}\boldsymbol{b}_1, \frac{1}{|\boldsymbol{b}_2|}\boldsymbol{b}_2, ..., \frac{1}{|\boldsymbol{b}_n|}\boldsymbol{b}_n.$$

Snadno se lze přesvědčit, že tyto vektory jsou ortogonální a jednotkové.

Ukažme průběh ortogonalizace na příkladu vektorového prostoru V_2, obr.
Je-li $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ báze V_2 položíme nejprve $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Nyní je nutné vektor $\boldsymbol{b}_1$ vhodně vynásobit reálným číslem k tak, aby součet vektorů $k\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ byl vektor kolmý k vektoru $\boldsymbol{b}_1$. Jestliže $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{b}_1$

potom bude $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ hledaná ortogonální báze. V situaci na obrázku je přibližně $k = -1/2$.



Mějme dánu ortonormální bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ vektorového prostoru V_n a nechť pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ platí

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n, \;\; \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + ... + y_n\boldsymbol{a}_{n.}$$

Potom pro skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ máme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{a}_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_i^j .$$

Tedy platí

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n . \tag{3.2}$$

Můžeme tedy shrnout:

Věta 3. 3
Pro dva libovolné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, které mají v nějaké ortonormální bázi souřadnice $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ platí (3.2).

Z předchozího tvrzení plyne, že volba ortonormální báze za bázi vektorového prostoru V_n je velmi výhodná hlavně proto, že skalární součin libovolných dvou vektorů, vyjádřených v této bázi, má jednoduchý tvar (3.2). Ve vektorovém prostoru se skalárním součinem budeme používat většinou ortonormální báze.

Cvičení
1. Ve vektorovém prostoru V_3 mějme dánu ortonormální bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Nechť v této bázi je $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 1)$,

$\boldsymbol{v}_3$ = (-2, -1, 1). Určete ortonormální bázi $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ prostoru V_3 tak, aby platilo $\boldsymbol{u}_1 \in \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\boldsymbol{u}_2 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\boldsymbol{u}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

Výsledek:

$\left\{\boldsymbol{u}_1 = 1/\sqrt{3}(1,1,-1),\ \boldsymbol{u}_2 = 1/\sqrt{42}(-1,5,4,),\ \boldsymbol{u}_3 = 1/\sqrt{14}(-3,1,-2)\right\}$.

2. Ve vektorovém prostoru R^3 je dán skalární součin vektorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ předpisem

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ .$$

Určete ortonormální bázi podprostoru, který je generován vektory

a) (1, 0, 0) , (1, 2, 0).

Výsledek např. $\left\{1/\sqrt{2}(1,0,0)\ 1/\sqrt{2}(1,-2,0)\right\}$.

b) (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1).

Výsledek: např.

$\left\{1/\sqrt{5}(1,1,0), 1/\sqrt{30}(2,-3,-5)\ 1/\sqrt{6}(-2,2,-1), 1/\sqrt{6}(-2,2,-1)\right\}$.

3. Nechť pro vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ unitárního vektorového prostoru V_n platí v některé bázi B

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n \ ,$$

kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Potom je báze B ortonormální. Dokažte.

4. Matice přechodu mezi dvěma bázemi

Ve vektorovém prostoru V_n jsou dány dvě báze $A=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$, $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$. Potom existují jednoznačně určená reálná čísla p_{ij}, $i,j=1,2,\ldots n$ tak, že platí:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{12}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + p_{1n}\boldsymbol{a}_n \\
\boldsymbol{b}_2 &= p_{21}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + p_{2n}\boldsymbol{a}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{b}_n &= p_{n1}\boldsymbol{a}_1 + p_{n2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

nazýváme *matice přechodu od báze* $A=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ *k bázi* $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$. Značíme $\boldsymbol{P}(A,B)$.

Matice přechodu mezi dvěma *ortonormálními* bázemi je velmi speciální. Ukážeme, že v tomto případě platí

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{I}, \tag{4.3}$$

kde $\boldsymbol{P}^T$ značí matici transponovanou k matici $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice.

Skutečně, podle (4.1) je $\boldsymbol{b}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\boldsymbol{a}_k$, $i=1,2,\ldots,n.$

Odtud skalárním vynásobením obou stran vektorem $\mathbf{b}_j$ dostáváme

$$\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} p_{ik}p_{jr}\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_r = \sum_{k,r=1}^{n} p_{ik}p_{jr}\delta_k^r = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk}.$$

Protože platí $\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j = \delta_i^j$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2 = 1 \quad \text{pro } i = j \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{jk} = 0 \quad \text{pro } i \neq j .$$

což je rozepsaný vztah (4.3).

Řádky matice (4.2) tvoří souřadnice vektorů $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$, vyjádřené v ortonormální bázi $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ a pro skalární součin $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ tedy platí vzorec (3.2). Můžeme říci, že matice $\boldsymbol{P}$ má následující vlastnost:

Skalární součin dvou různých řádků matice **P** je roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné.

Ze vztahu (4. 3) plyne

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T , \tag{4.4}$$

kde $\boldsymbol{P}^{-1}$ značí matici inverzní k matici ***P***. Ta, jak známo existuje, neboť matice ***P*** je vždy regulární.

Matice ***P***, která má vlastnost (4.4) se nazývá *ortogonální matice*. Ze (4.3) dále dostáváme

$$\det(\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^T) = (\det \boldsymbol{P})^2 = 1, \quad \text{tj. } \det \boldsymbol{P} = \pm 1 . \tag{4.5}$$

Předchozí úvahy shrneme do věty.

Věta 4.1

Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 nebo -1.

Poznámka

Je-li $\boldsymbol{P}$ ortogonální matice, potom $\det \boldsymbol{P} = \pm 1$, jak jsme ukázali. Tento vztah neplatí obráceně, tj. z předpokladu $\det \boldsymbol{P} = \pm 1$ neplyne, že matice ***P*** je ortogonální.

Příklad

Ve vektorovém prostoru R^2 jsou dány vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ pro jejichž souřadnice v ortonormální bázi $U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ platí $\boldsymbol{w}_1 = (2,-1)_U$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,-2)_U$. Vzhledem k jiné bázi $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ mají vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ souřadnice $\boldsymbol{w}_1 = (-1,2)_V$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,2)_V$. Určete matici přechodu od báze U k bázi V a zjistěte, zda je ortogonální.

Řešení:

Je
$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= -\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 &= -2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Odtud
$$\begin{aligned} -\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \\ -2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnosti od první dostáváme $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1$, tj.
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 0\,\boldsymbol{u}_1 + 1\,\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 &= 1\,\boldsymbol{u}_1 + 0\,\boldsymbol{u}_2. \end{aligned}$$

Matice přechodu $\boldsymbol{P}$ má tvar $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vidíme, že $\boldsymbol{P}$ je ortogonální. To znamená, že báze $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ je ortonormální.

Cvičení

1) Řešte předchozí řešený příklad pro zadání

a) $\boldsymbol{w}_1 = (2, 3)_U = (-2, 3)_V$, $\boldsymbol{w}_2 = (6, -4)_U = (6, 4)_V$,

b) $\boldsymbol{w}_1 = (6, 8)_U = (10, 0)_V$, $\boldsymbol{w}_2 = (7, 1)_U = (5, 5)_V$,

c) $\boldsymbol{w}_1 = (1, 2)_U = (0, 1)_V$, $\boldsymbol{w}_2 = (3, 7)_U = (2, 3)_V$.

Výsledek: a) $\begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}$, ortogonální,

b) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, ortogonální,

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, není ortogonální.

2) Dokažte, že matice přechodu od jedné báze k druhé bázi vektorového prostoru V_n je regulární.

(Návod: Vyjádřete matici přechodu od báze A k bázi B a potom matici přechodu od báze B k bázi A).

3) Ukažte, že neplatí:
$$\det{}^2 \boldsymbol{P} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{P} \text{ je ortogonální.}$$

5. Kolmost podprostorů

Definice 5.1
Ve vektorovém prostoru V_n uvažujme podprostor V_k dimenze *k*. Množinu všech vektorů z V_n, které jsou ortogonální ke každému vektoru z V_k nazveme *ortogonální doplněk* podprostoru V_k. Značíme jej $V_k^{\perp}$.

Ukážeme, že ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ je vektorový podprostor dimenze $(n-k)$.
Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ je ortonormální báze V_n a $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ je ortonormální báze V_k. Libovolný vektor $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$ z $V_k^{\perp}$ je kolmý ke každému vektoru z V_k, tedy i k vektorům báze $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k\}$. Platí:

$$0 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \right) \cdot \boldsymbol{a}_j = x_j, \text{ pro všechna } j = 1,2,...,k .$$

To znamená, že pro každý vektor $\boldsymbol{x}$ z $V_k^{\perp}$ je

$$\boldsymbol{x} = x_{k+1}\boldsymbol{a}_{k+1} + ... + x_n \boldsymbol{a}_n , \tag{5.1}$$

tj. vektor $\boldsymbol{x}$ lze vyjádřit pomocí lineární kombinace $n-k$ vektorů $\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_{k+2}, ..., \boldsymbol{a}_n$.
Obráceně: Platí-li (5.1), potom pro libovolný vektor $\boldsymbol{y}$ z V_k je $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{k} y_j \boldsymbol{a}_j$ a dostaneme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_i y_j \delta_i^j = 0.$$

Dokázali jsme větu:

Věta 5.1
Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n, potom ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ vektorového prostoru V_k je vektorový prostor dimenze $n-k$.

Definice 5.2
Nechť V_k je podprostor V_n. Vektor $\boldsymbol{b} \in V_n$ je *kolmý* k podprostoru V_k jestliže je kolmý ke všem vektorům z V_k. Značíme $\boldsymbol{b} \perp V_k$.

Věta 5.2
Je-li vektor $\boldsymbol{b} \in V_n$ kolmý ke všem vektorům báze $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ podprostoru V_k, potom $\boldsymbol{b} \perp V_k$.

Důkaz:
Nechť pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in V_k$ platí

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k.$$

Potom $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}) = 0.$

Pojem kolmosti vektoru $\boldsymbol{b}$ k podprostoru V_k lze zobecnit na dva libovolné podprostory prostoru V_n. Všimněme si přitom analogie kolmosti dvou rovin.

Definice 5. 3
Dva podprostory V_r a V_s jsou *na sebe kolmé* jestliže ve V_r existuje nenulový vektor kolmý k V_s a zároveň ve V_s existuje nenulový vektor kolmý k V_r. Píšeme $V_r \perp V_s$.

Poznámka
O vektorových podprostorech V_k a $V_k^{\perp}$, z nichž jeden je ortogonálním doplňkem druhého a naopak, říkáme, že jsou *totálně kolmé*. Prostory totálně kolmé jsou na sebe kolmé, nikoliv však naopak.

Následující věta dává nutnou a postačující podmínku pro kolmost dvou podprostorů.

Věta 5.3

Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_s\}$ jsou báze podprostorů V_r a V_s. Potom $V_r \perp V_s$ právě když pro hodnost h matice $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_s \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_s \\ .... \\ \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$$

platí $h < \min(r, s)$.

Důkaz:

Nechť nejprve platí $h < \min(r, s)$, tj. řádky matic $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{G}^T$ jsou lineárně závislé.

Pro matici $\boldsymbol{G}$ to znamená, že existuje nenulové řešení soustavy rovnic

$$x_1(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_i) + x_2(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_i) + ... + x_r(\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{b}_i) = 0, \quad i = 1,2, ..., s.$$

Z vlastností skalárního součinu plyne

$$(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_r\boldsymbol{a}_r) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0, \quad i = 1,2, ..., s.$$

Tedy vektor $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_r\boldsymbol{a}_r$ je kolmý k vektorům báze prostoru V_s tj. $\boldsymbol{x} \perp V_s$. Analogicky z lineární závislosti sloupců matice $\boldsymbol{G}$ plyne existence nenulového vektoru $\boldsymbol{y} \in V_s$ tak, že $\boldsymbol{y} \perp V_s$. Tedy $V_r \perp V_s$.

Obráceně, nechť nyní $V_r \perp V_s$. Existuje tedy nenulový vektor $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + ... + y_s\boldsymbol{b}_s$ z V_s takový, že $\boldsymbol{y} \perp V_r$, tj.

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a}_i = (y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + ... + y_s\boldsymbol{b}_s) \cdot \boldsymbol{a}_i = 0, \qquad i = 1,2, ..., r.$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$y_1(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_1) + y_2(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_2) + ... + y_s(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_s) = 0, \quad i = 1,2, ..., r,$$

kde alespoň jedno $y_i \neq 0$. To znamená, že sloupce matice $\boldsymbol{G}$ jsou lineárně závislé, tj. $h < s$. Z existence nenulového vektoru $\boldsymbol{x} \in V_r$, $\boldsymbol{x} \perp V_s$ plyne lineární závislost řádků matice $\boldsymbol{G}$, tj. $h < r$.

Cvičení.

1. Ve vektorovém prostoru V_4 je dán podprostor V. Nalezněte ortogonální doplněk $V^{\perp}$ prostoru V, platí-li v nějaké ortonormální bázi:

a) $V = \langle (2,1,0,2),\ (0,1,2,3) \rangle$,

b) $V = \langle (2,0,1,0) \rangle$,

c) $V = \langle (1,1,0,0), (2,0,0,0,), (0,0,0,1) \rangle$.

Výsledek: např. a) $V^{\perp} = \langle (1,-6,0,2),\ (0,\ 4,\ 1,-2) \rangle$,

b) $V^{\perp} = \langle (1,1,-2,0), (-1,0,2,1), (0,1,0,3) \rangle$,

c) $V^{\perp} = \langle (0,0,1,0) \rangle$.

2. Ověřte, zda ve vektorovém prostoru V_4 jsou podprostory V a W na sebe kolmé, jestliže v nějaké ortonormální bázi prostoru V_4 je:

a) $V = \langle (2,1,0,1), (0,1,3,2) \rangle$,

$W = \langle (1,2,1,0), (4,0,2,0), (1,1,1,1) \rangle$,

b) $V = \langle (1,\ 1,\ 1,\ 2), (0,-2,-3,\ 1), (4,0,-2,3) \rangle$,

$W = \langle (1,-3,2,0), (1,4,3,2) \rangle$,

c) $V = \langle (6,2,2,1), (3,2,1,0), (4,3,2,1) \rangle$,

$W = \langle (-1,1,0,2), (2,2,1,4), (3,-1,5,-2) \rangle$.

Výsledek: a) nejsou na sebe kolmé,
b) na sebe kolmé,
c) na sebe kolmé.

6. Orientace vektorového prostoru

Mějme dány dvě báze $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ vektorového prostoru V_n a nechť $\boldsymbol{P}(A, B)$ značí matici přechodu od báze A k bázi B. Místo (4.1) můžeme psát

$$B = \boldsymbol{P} \cdot A .$$

Matice přechodu mezi dvěma bázemi je vždy regulární a její determinant je tedy různý od nuly. Pro matici $\boldsymbol{P}(A, B)$ je tedy buď det $\boldsymbol{P} > 0$ nebo det $\boldsymbol{P} < 0$. Bude-li det $\boldsymbol{P} > 0$, říkáme, že báze A a B jsou *souhlasné* a zařadíme je do stejné skupiny. Bude-li det $\boldsymbol{P} < 0$ budou báze A a B v různých skupinách. Snadno se ukáže, že relace "být souhlasné" na množině všech bází prostoru V_n je relací ekvivalence. Jak známo, každá ekvivalence definuje rozklad. Dvě báze patří do téže třídy, jsou-li souhlasné. Ukážeme, že třídy rozkladu jsou právě dvě.

Nechť $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ a $B = \{-\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ jsou dvě báze V_n. Zřejmě je det $\boldsymbol{P}(A, B) = -1$. Tedy třídy jsou aspoň dvě. Nechť nyní C je libovolná jiná báze. Nepatří-li C do třídy ekvivalence obsahující bázi A, je det $\boldsymbol{P}(C, \mathrm{A}) < 0$. Zároveň je $\boldsymbol{P}(A, B) = -1$. Ze vzorce (4.2) plyne vztah $\boldsymbol{P}(C, A) \cdot \boldsymbol{P}(A, B) = \boldsymbol{P}(C, B)$. S použitím věty o násobení determinantů dostáváme

$$\det \boldsymbol{P}(C, B) = \det \boldsymbol{P}(C, A) \det \boldsymbol{P}(A, B) = -\det \boldsymbol{P}(C, A) > 0.$$

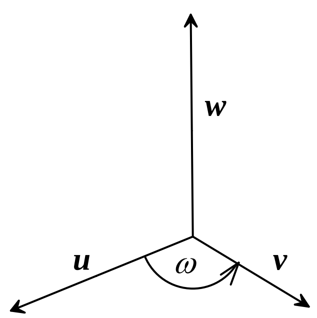
Báze C tedy patří do třídy ekvivalence obsahující bázi B.

Definice 6.1

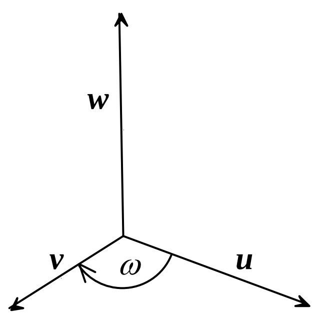
Orientovaný vektorový prostor V_n je takový vektorový prostor, v němž jsme jednu ze dvou tříd bází vzhledem k ekvivalenci "být souhlasné" zvolili za třídu *kladných* bází.

Ukažme si dvě možné orientace trojrozměrného vektorového prostoru V_3. Uvažujme trojici nezávislých vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ a umístěme je do společného bodu. Představme si na místě vektoru $\boldsymbol{w}$ pozorovatele, který se dívá na odchylku ω vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Jestliže má pozorovatel vektor $\boldsymbol{u}$ po pravé, resp. po levé ruce, nazýváme uspořádanou trojici vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *pravotočivou* resp. *levotočivou*, obr.



Pravotočivá soustava



Levotočivá soustava

Cvičení

1. Určete zda jsou lineárně závislé či nezávislé vektory, jejichž souřadnice v kladné bázi vektorového prostoru jsou
a) (2, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 1, 1),
b) (1, 0, 2, 3), (2, 1, 1, 4), (1, 1, -1, 1), (13, 15, 17, 0),
c) $(5, \sqrt{3}, 7), (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}), (2\sqrt{2}, -1, \sqrt{3})$.
V případě, že jsou vektory lineárně nezávislé, rozhodněte, zda tvoří (v daném pořadí) kladnou či zápornou bázi.

Výsledek: a) lineárně nezávislé, tvoří zápornou bázi,
b) lineárně závislé,
c) lineárně nezávislé, tvoří kladnou bázi.

7. Ortogonální doplněk - vektorový součin

V praxi se často setkáváme s úlohou, najít ortogonální doplněk $n-1$ vektorů ve V_n.

Definice 7.1
Ve vektorovém prostoru V_n je dáno $n-1$ vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1}$ které mají v nějaké kladné ortonormální soustavě souřadné souřadnice $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Potom se vektor, jehož souřadnice jsou algebraické doplňky posledního řádku determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & ... & a_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

nazývá *ortogonální doplněk* vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1}$. Značíme jej $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1}$.

Poznámka
Je tedy nutno rozlišovat mezi ortogonálním doplňkem podprostoru, což je vektorový podprostor a ortogonálním doplňkem vektorů, což je *pevně* určený vektor. Ortogonální doplněk $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ se často zapisuje v tomto praktickém tvaru:

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & ... & a_{n-1,n} \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & ... & \boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + ... + A_n\boldsymbol{e}_n.$$

Zde jsme označili $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektory kladné báze a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu. Souřadnice ortogonálního doplňku $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ jsou právě čísla $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Nežli přistoupíme ke zkoumání vlastností ortogonálního doplňku uvedeme lemma.

Lemma
Nechť je dána čtvercová matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1,2,\ldots,n$. Algebraické doplňky prvků a_{ij} označme A_{ij}. Potom pro $i, j = 1,2,\ldots,n$ platí

$$A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \ldots + A_{in}a_{jn} = \delta_i^j \det \boldsymbol{A}. \tag{7.2}$$

Důkaz:
Lemma v podstatě říká, že součin libovolného řádku matice $\boldsymbol{A}$ s algebraickými doplňky jiného řádku, je roven nule. Zkoumejme determinant matice $\boldsymbol{A}'$, jejíž i-tý a j-tý řádek obsahuje stejné prvky a rozviňme tento determinant podle i - tého řádku. Je

$$\det \boldsymbol{A}' = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \ldots + A_{in}a_{in}.$$

Protože však $a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$ můžeme psát

$$\det \boldsymbol{A}' = A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \ldots + A_{in}a_{jn}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že determinant, jehož dva řádky jsou stejné, je roven nule. Je-li ve vztahu (7.2) $i = j$, dostáváme známý vztah pro rozvoj determinantu podle řádku.

Věta 7.1
Ortogonální doplněk $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$.
Důkaz:
Při použití předchozího značení, můžeme v nějaké kladné ortonormální bázi psát

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{a}_i = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_n a_{in}, \tag{7.3}$$

pro $i, j = 1,2,\dots,n$.
Použijeme-li nyní tvrzení lemmatu na determinant, který dostaneme ze (7.1) a napíšeme do posledního řádku $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, dostáváme na pravé straně (7.3) nulu.

Ukážeme nyní další vlastnosti ortogonálního doplňku $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$.

Věta 7.2
Pro ortogonální doplněk vektorů $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ ve V_n platí:
1) $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1} = \boldsymbol{o}$ právě když jsou vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ lineárně závislé.
2) Nechť jsou vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé. Potom je báze
$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}\}$ kladná.
3) Pro $i \neq j$ platí
$\boldsymbol{a}_1 \times \dots \times \boldsymbol{a}_i \times \dots \times \boldsymbol{a}_j \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1} = -(\boldsymbol{a}_1 \times \dots \times \boldsymbol{a}_j \times \dots \times \boldsymbol{a}_i \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1})$.
Tj. prohodíme-li pořadí vektorů, mění se ortogonální doplněk na opačný.
4) Pro velikost vektoru $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$ platí

$$|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^2 & \dots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix}. \quad (7.4)$$

Důkaz:
1) Řádky $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i, j = 1,2,\dots,n-1$ matice (7.1), které tvoří souřadnice vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, jsou lineárně závislé právě když všechny subdeterminanty $(n-1)$. řádu jsou rovny nule. To však jsou, až na znaménka, souřadnice ortogonálního doplňku $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$.

2) Determinant matice přechodu od kladné ortonormální báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ k bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1}\}$ má tvar, který dostaneme ze (7.1), napíšeme-li do posledního řádku algebraické doplňky $A_1, A_2, ..., A_n$. Rozvineme-li nyní tento determinant podle posledního řádku, dostáváme hodnotu $A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2$. To je číslo větší než nula (podle 1. tvrzení věty), neboť vektory jsou lineárně nezávislé.
3) Tvrzení plyne ihned z vlastnosti determinantů: prohodíme -li dva řádky determinantu mění se hodnota determinantu na opačnou.
4) Označme determinant na pravé straně v (7.4) symbolem $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1})$. Ve V_n lze vždy vybrat kladnou ortonormální bázi tak, aby vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1}$ měly souřadnice
$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i,n-1})$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Potom lze psát

$$\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2,n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & ... & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n-1,1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n-1,2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & ... & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Na druhé straně platí

$$|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + ...A_n^2,$$

kde $A_1, A_2, ..., A_n$ jsou algebraické doplňky posledního řádku v determinantu (7.1), v němž však je $a_{1n} = a_{2n} = ... = a_{n-1,n} = 0$. Každý algebraický doplněk A_i prvků posledního řádku v (7.1) kromě A_n však obsahuje nulový sloupec a tudíž se rovná nule.
Tedy je

$$|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times ... \times \boldsymbol{a}_{n-1}|^2 = A_n^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2,n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & ... & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}^2 .$$

Důkaz je proveden.

Poznámka
Symetrická matice

$$G(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^2, & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2, & \ldots, & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2^2, & \ldots, & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_k \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_2, & \ldots, & \boldsymbol{a}_k^2 \end{pmatrix},$$

která je použita v (7.4) pro $k=n-1$, se nazývá *Gramova matice* vektorů $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ (též *metrická* nebo *fundamentální matice*), $\det G(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k)$ se nazývá *Gramův determinant.* Z tvrzení (7.4) předchozí věty plyne, že $\det G(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k)$ je pro libovolné k větší nebo roven nule. (J. Gram (1850-1916) - dánský matematik).

Ve vektorovém prostoru V_3 se místo názvu ortogonální doplněk vektorů vžil název *vektorový součin*.

V další části se budeme zabývat tímto speciálním případem ortogonálního doplňku vektorů. Protože se vektorový součin často užívá, jeho vlastnosti shrneme zvlášť.

Definice 7.2
Nechť jsou dány vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_3$, jejichž souřadnice v kladné ortonormální bázi jsou $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$.
Potom vektor

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \tag{7.5}$$

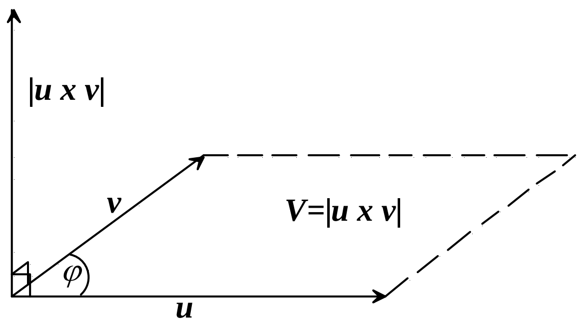
nazýváme *vektorový součin* vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$.

Věta 7.3.
Nechť $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V_n$, $c\in R$. Vektorový součin má tyto vlastnosti:
1) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$,
2) $(c\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times(c\boldsymbol{v})=c(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$,

3) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$,
4) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ právě když jsou vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ lineárně závislé,
5) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$,
6) jsou-li vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé, tvoří vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ kladnou bázi vektorového prostoru V_3,
7)

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}^2, & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{v}^2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{u}|^2\,|\boldsymbol{v}|^2\sin^2\varphi, \tag{7.6}$$

tj. velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníka určeného vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$, obr.



Ještě než začneme dokazovat, je dobré si uvědomit, že vektorový součin $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ lze definovat jako vektor, jehož souřadnice jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}. \tag{7.7}$$

Označíme-li vektory kladné ortonormální báze $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, je výhodné psát

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.$$

Důkaz věty:
1) Tvrzení plyne z vlastnosti determinantů, která říká, že prohodíme-li dva řádky determinantu, změní se hodnota determinantu na opačnou.
2) Násobíme-li řádek determinantu nějakým reálným číslem mohu toto číslo vytknout před determinant. Odtud tvrzení 2.
3) Tvrzení plyne z rovnosti

$$\begin{vmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}.$$

4) Vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé právě když je hodnost matice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ menší než dva a to nastane právě když jsou všechny subdeterminanty druhého řádu rovny nule tj.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & u_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0.$$

Odtud tvrzení 4.
5) Přímým výpočtem s pomocí (7.5) dostaneme

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=u_1u_2v_3-u_1u_3v_2-u_1u_2v_3+u_2u_3v_1+u_1v_2u_3-u_2u_3v_1=0.$$

Analogicky pro vektor $\boldsymbol{v}$.

6) Je-li $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$, potom

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.$$

Matice přechodu $\boldsymbol{P}$ od báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ k bázi $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}\}$ má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\det \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 > 0 .$$

7) Nejprve dokážeme prvou rovnost v (7.6). Je

$$\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}^2 & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, & u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3, & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1^2, & u_2 v_2 \\ v_1 u_1, & v_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2^2, & u_1 v_1 \\ v_2 u_2, & v_1^2 \end{vmatrix} + \dots = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 .$$

K důkazu druhé rovnosti v (7.6) použijeme vztahu

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \varphi .$$

Odtud je $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^2 \boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 (1 - \cos^2 \varphi)$.

Věta 7. 4

Pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in V_3$ platí tzv. *Lagrangeova identita* (J. L. Lagrange (1736-1813) - francouzský matematik):

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}. \tag{7.8}$$

Důkaz:
Větu dokážeme použitím souřadnic. Kladnou ortonormální bázi zvolíme tak, aby $\boldsymbol{a}=(a_1,0,0)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,0)$. Je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(0,0,a_1b_2)$ a tedy

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=a_1b_2\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix},$$

kde vektory $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ mají souřadnice $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,d_3)$
Pro druhou stranu rovnosti (7.8) máme

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1c_1, & a_1d_1\\ b_1c_1+b_2c_2, & b_1d_1+b_2d_2\end{vmatrix}=a_1b_2\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}.$$

Tedy levá a pravá strana v (7.8) se rovnají.

Poznámka
Při volbě $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$ v (7.8) dostaneme první rovnost v (7.6)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2. \tag{7.9}$$

Ze (7.9) navíc získáváme druhý důkaz Cauchyovy nerovnosti, neboť odtud plyne $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\geq 0$, s rovností pouze pro lineárně závislé vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

Cvičení
1) Dokažte, že pro libovolné vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ platí

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

Kdy nastane rovnost?

2) Ve vektorovém prostoru V nalezněte vektor $\boldsymbol{w}$, kolmý na dané vektory, které mají v kladné ortonormální bázi souřadnice:

a) (2 , -1, 6, 1), (0, 8, 2, 1), (4, -1, 3, -2),
b) (1, -1, 0), (-3, 7, 1),
c) (3, 0, 2), (-4, 5, 1),
d) (2, 1, 5, 3), (0, 1, 3, 7), (2, 4, 1, 5),
e) (0, 2, 1,0), (1, 1, 0, 1).
Výsledek a) (-125, 2, 66, -148), b) (-1, -1, 4), c) (-10, -11, 15) ,
d) (-90, 68, 38, -26), e) $(r+s,-r,2r,-s)$, $r,s \in R$.

3) Jaké podmínce musí vyhovovat vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ aby vektory $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ byly kolineární?
Výsledek: $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ jsou kolineární.

4) Dokažte rovnost
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \;.$$

5) Jsou dány libovolné vektory $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}$. Dokažte, že vektory $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$ jsou komplanární (tj. leží v jedné rovině).

6) Nechť vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ vyhovují podmínce $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$. Dokažte, že potom platí
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \;.$$

7) Vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ jsou vázány vztahy $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$.
Dokažte, že vektory $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ jsou kolineární.

8) Dokažte identitu
$$\left(1_1^2+m_1^2+n_1^2\right)\left(1_1^2+m_2^2+n_2^2\right)-\left(1_1 1_2+m_1 m_2+n_1 n_2\right)^2=$$
$$=\left(m_1 n_2-m_2 n_1\right)^2+\left(1_2 n_1-1_1 n_2\right)^2+\left(1_1 m_2+1_2 m_1\right)^2.$$

8. Vnější součin

Ve vektorovém prostoru V_3 jsme zavedli pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ dva typy součinu. Skalární součin dvou vektorů je číslo, vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je vektor. Nyní zavedeme třetí typ součinu.

Definice 8.1
Mějme ve V_n dánu kladnou ortonormální bázi $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$.
Nechť vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ z V_n mají v bázi E souřadnice $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $i = 1,2,...n$. Potom číslo $\det \boldsymbol{A}$, kde

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & .... & .... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

nazýváme *vnější součin* vektorů $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n]$.
Ukážeme, že vnější součin $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n]$ nezávisí na volbě kladné ortonormální báze.
Nechť $E' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n\}$ je jiná kladná ortonormální báze V_n. Označme $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$, $i, j = 1,2,...,n$ matici přechodu od báze E k bázi E'. Pro souřadnice $(a'_{i1}, a'_{i2}, ..., a'_{in})$ vektoru $\boldsymbol{a}_i$ v bázi E' platí $a_{ij} = \sum a'_{ik} p_{kj}$. Tyto vztahy můžeme pro všechna $i = 1,2,...n$ napsat maticově. Je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & ... & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & ... & p_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ p_{n1} & p_{n2} & ... & p_{nn} \end{pmatrix},$$

tj.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{P},$$

kde $\boldsymbol{A}'$ je matice sestavená ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}_i$ v bázi E. Odtud již snadno máme

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{P}) = \det \boldsymbol{A}' \cdot \det \boldsymbol{P} = \det \boldsymbol{A}',$$

neboť pro kladné ortonormální báze E a E' je $\det \boldsymbol{P} = 1$.

Z (8.1) okamžitě dostáváme jiné vyjádření vnějšího součinu

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{a}_n \tag{8.2}$$

pomocí skalárního součinu vektoru $\boldsymbol{a}_n$ a ortogonálního doplňku $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$.

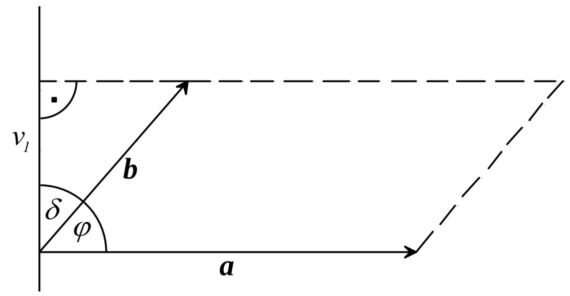
Ve V_3 má (8.2) tvar

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3 \tag{8.3}$$

Proto se někdy pro vnější součin užívá název *smíšený součin.*

Vnější součin vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ je číslo, které, jak jsme ukázali, *nezávisí* na volbě kladné ortonormální báze. Toto číslo má názorný geometrický význam. Ukažme to pro případy $n = 2$ a $n = 3$.

Nechť jsou dány vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_2$, jejichž souřadnice v kladné ortonormální bázi jsou $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, obr.



Lze psát $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0)$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

Odtud a ze vztahu (7.6) plyne

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\delta .$$

Označíme-li $|\boldsymbol{b}|\cos\delta = v_1$, $|\boldsymbol{a}| = L_1$, lze psát

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = v_1 L_1 = L_2 ,$$

kde L_2 je obsah rovnoběžníka, který je určen vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

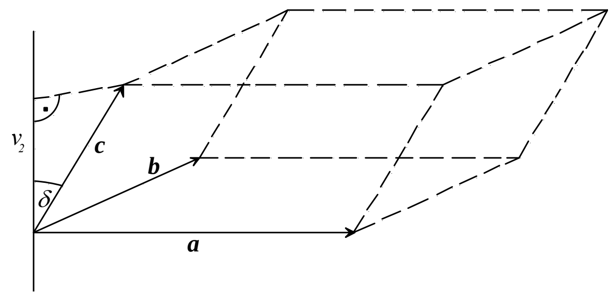
Nechť jsou nyní dány tři vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ z vektorového prostoru V_3 . Potom platí

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\delta .$$

Označíme-li $|\boldsymbol{c}|\cos\delta = v_2$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = L_2$ máme

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]| = v_2 L_2 = L_3 .$$

L_3 je objem rovnoběžnostěnu o podstavě velikosti L_2 a výšce v_2, který je určen vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, obr.



Tento postup lze zobecnit na *n* vektorů $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n$. Z (8.2) plyne

$$|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n]| = |\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times...\times\boldsymbol{a}_{n-1}||\boldsymbol{a}_n|\cos\varphi .$$

Označíme-li $|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times...\times\boldsymbol{a}_{n-1}| = L_{n-1}$ a $|\boldsymbol{a}_n|\cos\varphi = v_{n-1}$, můžeme psát

$$|[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n]| = v_{n-1}L_{n-1} = L_n . \qquad (8.4)$$

Je přirozené toto číslo považovat za *objem rovnoběžnostěnu,* který je určen vektory $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n \in V_n$.

Předcházející úvahy můžeme shrnout do věty:

Věta 8.1
Absolutní hodnota vnějšího součinu $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n]$ n vektorů z V_n je rovna objemu rovnoběžnostěnu, určeného vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$.

Číslo $|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n]|$ se též nazývá *absolutní objem vektorů* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$. Jedná se o zobecnění pojmu velikost vektoru. Platí totiž

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n]^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & ... & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^2 & ... & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_2 & ... & \boldsymbol{a}_n^2 \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) \geq 0 \tag{8.5}$$

a $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) = 0$ právě když jsou vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ lineárně závislé, jak plyne ze vztahu (7.4). Pro $n = 1$ dostaneme $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1^2 = |\boldsymbol{a}_1|^2$.

Je-li dáno n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ vektorového prostoru V_n, potom čtverec objemu rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory je roven hodnotě Gramova determinantu $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)$.
Mějme nyní k vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ z vektorového prostoru V_n, $k \leq n$ a ptejme se na k-rozměrný objem L_k rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory. Odpověď dává následující věta.

Věta 8.2
Pro objem L_k rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ z vektorového prostoru V_n, kde $k \leq n$ platí

$$L_k^2 = \det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^2 & \dots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_k^2 \end{vmatrix}. \qquad (8.6)$$

Důkaz:
Označme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

matici, jejíž řádky tvoří souřadnice vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ v nějaké ortonormální bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Zvolme takovou ortonormální bázi $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \dots, \boldsymbol{e}_n'\}$, vzhledem k níž mají vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ souřadnice dané řádkovými vektory matice

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1k}' \; 0 \dots 0 \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2k}' \; 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}' & a_{k2}' & \dots & a_{kk}' \; 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Pro objem L_k rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ platí

$$L_k^2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1k}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2k}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}' & a_{k2}' & \dots & a_{kk}' \end{vmatrix}^2 = \det\,(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}'^T) = \det\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T) =$$

$$= \det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k).$$

Důsledek
Jsou-li $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ libovolné vektory z V_n potom
$$\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \geq 0, \; k = 1, \ldots, n \;,$$
a $\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = 0$ právě když jsou vektory lineárně závislé.

Cvičení
1) V unitárním prostoru V_k jsou dány vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ svými souřadnicemi vzhledem ke kladné ortonormální bázi. Určete objem L_k rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory, jestliže

a) $\boldsymbol{v}_1 = (3, -2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (6, 1)$
b) $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, -3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-5, 1, 6)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3, -2, 13)$,
c) $\boldsymbol{v}_1 = (-3, 7, -4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 1, -5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (11, 7, -3)$,
d) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 2, 4, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1, -3, 7, 0)$,
$\boldsymbol{v}_4 = (2, 2, 1, -5)$.

Výsledek: a) 15, b) 54, c) 472, d) 104.

2) V unitárním prostoru V_m jsou dány vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $k < m$, svými souřadnicemi vzhledem k ortonormální bázi. Určete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$,
jestliže:

a) $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, 0, 2, -4)$ $\boldsymbol{v}_2 = (4, 3, 1, 8, -12)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-9, -4, 5, 2, 8)$,
b) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, 3, -4)$,
c) $\boldsymbol{v}_1 = (2, 0, 3, 6)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 6, -8, -12)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5, 8, 7, 3)$.

Návod:
1. způsob: Nejprve určíme pomocí Gram-Schmidtova procesu ortonormální bázi vektorového prostoru generovaného vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Potom vyjádříme souřadnice vektorů $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ vzhledem k nalezené ortonormální bázi a užijeme vzorec pro objem rovnoběžnostěnu ve V_k.
2. způsob: Pomocí vzorce (8.6).

Výsledek: a) 45, b) $3\sqrt{5}$, c) 343.

9. Vztahy mezi skalárním, vektorovým a vnějším součinem

Následující věta udává vztah mezi skalárním a vnějším součinem.

Věta 9.1
Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V_n. Potom

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n][\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix}. \tag{9.1}$$

Důkaz:
Plyne ihned rozepsáním vztahu (9.1) v souřadnicích v nějaké ortonormální bázi.

Všimněme si, že v případě $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme vztah (8.5).
Nyní uvedeme vztah mezi vektorovým a skalárním součinem.

Věta 9.2 (Lagrangeova identita)
Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1}$ jsou dvě skupiny lineárně nezávislých vektorů z vektorového prostoru V_n. Potom platí

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot (\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{b}_{n-1}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_{n-1} \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_{n-1} \end{vmatrix}$$

(9.2)

Důkaz:
Ukázali jsme, že pro vnější součin $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \dots, \boldsymbol{a}_n]$ platí

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \dots, \boldsymbol{a}_n] = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{a}_n .$$

Vezměme nyní za vektor $\boldsymbol{a}_n$ vektor $\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \times \dots \boldsymbol{b}_{n-1}$. Platí
$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \times \dots, \boldsymbol{b}_{n-1}] = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot (\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \times \dots \boldsymbol{b}_{n-1})$.
V důsledku rovnosti
$(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 \times \dots \boldsymbol{b}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ dostáváme, viz vztah (9.1)

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}_1 \times \dots \times \boldsymbol{b}_{n-1}][\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2, \dots\dots\dots, \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2, \dots\dots\dots, \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{b}_n \\ 0 \ , \ 0 \ , \dots\dots, [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n] \end{vmatrix}$$

.

Rozvineme-li tento determinant podle posledního řádku, po vydělení výrazem $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n] \neq 0$ dostaneme (9.2).

Vztah (9.2) se nazývá *Lagrangeova identita,* jejíž speciální případ pro $n = 3$ jsme uvedli ve větě 7.4. Položíme-li v (9.2) $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{a}_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ dostáváme (7.4).

Cvičení
1) Dokažte, že pro libovolné tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ platí

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} .$$

Vektor $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ *se nazývá dvojný součin vektorů* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Na základě uvedeného vzorce ukažte, že pro vektorový součin neplatí asociativní zákon.
Návod : Je

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}\} - \boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\} =$$

$= \boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\}$.
Rovněž platí $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}] = \boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\}$.
Porovnáním obou hodnot dostaneme žádaný výsledek.

2) Dokažte, že pro libovolné čtyři vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ platí

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d} .$$

10. Eukleidovský bodový prostor

Definice 10.1
Afinní prostor A_n, na jehož zaměření V_n je dán skalární součin, se nazývá *eukleidovský bodový prostor.* Značíme E_n.

Slovo „bodový" v nadpisu znamená, že se nejedná o eukleidovský vektorový prostor, jak se někdy nazývá vektorový prostor se skalárním součinem. Dále budeme slovo „bodový" vynechávat.

Z definice eukleidovského prostoru vyplývá, že na něj můžeme převést všechny pojmy z afinního prostoru (bod, přímka, nadrovina apod.). Základním pojmem eukleidovského prostoru, který není v afinních prostorech definován, je pojem vzdálenosti dvou bodů.

Definice 10.2
Nechť A, B jsou dva body E_n. Číslo $|A-B|$ nazýváme *vzdálenost* bodů A, B značíme $|AB|$.

Vzdálenost dvou bodů A, B je tedy podle definice délka vektoru $A-B$, který je určen body A, B.

Věta 10.1
Nechť A, B, C jsou libovolné body z E_n. Potom platí:

1) $|AB| = |BA|$,
2) $|AB| \geq 0$; $|AB| = 0$ právě když $A = B$,
3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ (trojúhelníková nerovnost).

Důkaz:
Vlastnosti vzdálenosti 1) a 2) plynou okamžitě z definice skalárního součinu. Trojúhelníková nerovnost plyne z (2.4). Označíme-li $\boldsymbol{a} = A-B$, $\boldsymbol{b} = B-C$, $\boldsymbol{c} = C-A$, je podle (2.4)

$$|A-B| + |B-C| \geq |A-C|.$$

Při zkoumání vlastností eukleidovského prostoru budeme často potřebovat speciální typ soustavy souřadnic - tzv. kartézskou soustavu souřadnic.

Definice 10.3
Nechť P je bod eukleidovského prostoru E_n a nechť $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ je ortonormální báze zaměření V_n. Lineární soustava souřadnic, určená bodem P a ortonormální bází $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, se nazývá *kartézská soustava souřadnic*[1] v E_n.

Jsou-li dány v E_n dva body A, B jejichž souřadníce v nějaké kartézské soustavě souřadnic jsou $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ potom pro vzdálenost $|AB|$ platí

$$|AB| = |A - B| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}, \tag{10.1}$$

neboť vektor $A - B$ má souřadnice $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n)$.

Cvičení
Nechť jsou v eukleidovském prostoru E_n dány dva pevné body A, B, které mají v nějaké k.s.s. $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ souřadnice
$A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ a v jiné k.s.s. $\{P, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n\}$ mají souřadnice $A = [a'_1, a'_2, ..., a'_n]$, $B = [b'_1, b'_2, ..., b'_n]$.
Ukažte, že při výpočtu vzdálenosti bodů $|AB|$ s použitím vzorce (10.1) vyjde v čárkovaných i v nečárkovaných souřadnicích stejné číslo.

[1] Název kartézská soustava souřadná je odvozen od zakladatele analytické geometrie, jímž je francouzský matematik R. Descartes (1596-1650), zvaný též podle latinského přepisu Cartesius.

11. Objem simplexu

V této kapitole budeme zkoumat objemy „základních stavebních kamenů“ eukleidovských podprostorů E_n. Na přímce je tím základním stavebním kamenem úsečka, v rovině trojúhelník, v trojrozměrném prostoru čtyřstěn, atd. Obecně se hovoří o simplexech (z latiny "simplex" = jednoduchý). Nejdříve zavedeme pojem simplexu.

Pro úplnost připomeňme:

Definice 11.1
Množina M bodů afinního prostoru A_n se nazývá *konvexní,* jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje celou úsečku, která tyto body spojuje.

Definice 11.2
Nechť M je podmnožina afinního prostoru A_n. Průnik všech konvexních množin, které obsahují množinu M, nazýváme *konvexní obal množiny M*.

Konvexní obal množiny M je „nejmenší“ konvexní množina, která množinu M obsahuje. A nyní slíbená definice simplexu.

Definice 11.3
Konvexní obal $(n+1)$ lineárně nezávislých bodů v A_n se nazývá *simplex.*

Příklad
Konvexní obal dvou různých bodů AB je úsečka, která tyto body spojuje. Tedy simplexem na přímce A_1 je *úsečka*.
Konvexním obalem tří bodů A, B, C, které neleží v přímce je trojúhelník ABC. Tedy simplexem v rovině A_2 je *trojúhelník*.
Podobně simplexem v trojrozměrném prostoru A_3 je *čtyřstěn.*

Ve shodě s naší zkušeností zavedeme nyní objem simplexu.

Definice 11.4
Objemem simplexu, který je určen body $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ z E_n, nazýváme číslo

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} |[A_1 - A_{n+1}, A_2 - A_{n+1}, ..., A_n - A_{n+1}]|. \quad (11.1)$$

Objem simplexu je vyjádřen pomocí vnějšího součinu n vektorů $A_1 - A_{n+1}, A_2, - A_{n+1}, ..., A_n - A_{n+1}$. Zdá se, že bod A_{n+1} je určitým způsobem preferován. V následující větě vyjádříme objem simplexu pomocí symetrického vzorce, ve kterém žádný bod preferován není.

Věta 11.1
V E_n mějme dáno $n+1$ bodů $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, jejichž souřadnice v dané k. s. s. jsou
$A_i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$, $i = 1, 2, ..., n$. Potom pro objem simplexu platí

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & ... & a_{n+1,n} & 1 \end{matrix} \right\|. \quad (11.2)$$

Důkaz:
Vyjdeme z definice 11.1. Vektory $A_1 - A_{n+1}, A_2, - A_{n+1}, ..., A_n - A_{n+1}$ mají v kartézské soustavě souřadnic $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ souřadnice
$A_i - A_{n+1} = (a_{i1} - a_{n+1,1}, a_{i2} - a_{n+1,2}, ..., a_{in} - a_{n+1,n})$, $i = 1, 2, ..., n$. Podle definice vnějšího součinu je

$$[A_1 - A_{n+1}, A_2 - A_{n+1}, ..., A_n - A_{n+1}] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - a_{n+1,1} & a_{12} - a_{n+1,2} & \dots & a_{1n} - a_{n+1,n} \\ a_{21} - a_{n+1,1} & a_{22} - a_{n+1,2} & \dots & a_{2n} - a_{n+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{n+1,1} & a_{n2} - a_{n+1,2} & \dots & a_{2n} - a_{n+1,n} \end{vmatrix}. \tag{11.3}$$

Determinant n-tého řádu na pravé straně v (11.3) rozšíříme o jeden řádek a jeden sloupec tak, aby se jeho hodnota nezměnila. Máme

$$[A_1 - A_{n+1}, A_2 - A_{n+1}, \dots, A_n - A_{n+1}] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - a_{n+1,1} & a_{12} - a_{n+1,2} & \dots & a_{1n} - a_{n+1,n} & 0 \\ a_{21} - a_{n+1,1} & a_{22} - a_{n+1,2} & \dots & a_{2n} - a_{n+1,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} - a_{n+1,1} & a_{n2} - a_{n+1,2} & \dots & a_{2n} - a_{n+1,n} & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}. \tag{11.4}$$

Přičteme-li poslední řádek determinantu v (11.4) ke každému z prvých n řádků, dostáváme determinant v (11.2).

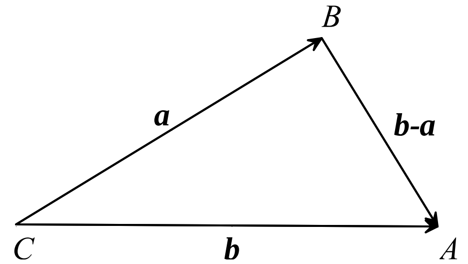
12. Obsah trojúhelníka

Použijme nyní vzorec (11.2) na výpočet obsahu trojúhelníka. Předpokládejme, že v rovině jsou dány body A, B, C které mají v kartézské soustavě souřadnic $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ souřadnice $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$. Pro obsah V trojúhelníka ABC podle (11.2) platí

$$V = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right\|. \qquad (12.1)$$

Máme-li vypočítat obsah trojúhelníka ABC pro případ, že body A, B, C leží v E_n tj. body mají n souřadnic, potom vzorec (12.1) není příliš vhodný. V tomto případě lze užít vzorce (8.6) (viz cvičení k 8. kapitole, 2. příklad). Jiný způsob spočívá ve výpočtu obsahu trojúhelníka pomocí délek jeho stran.
Tento způsob naznačíme:

Označme $A - C = \boldsymbol{b}$, $B - C = \boldsymbol{a}$, odtud $A - B = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, obr.



Pro obsah V trojúhelníka ABC podle (11.1) platí $V = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$ a podle (7.6)

$$4V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix}.$$

Označme délky stran trojúhelníka ABC písmeny $|B-C|=a$, $|A-C|=b$, $|A-B|=c$. Platí $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$, a odtud $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a^2+b^2-c^2)/2$

$$16V^2=\begin{vmatrix} 2b^2, & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2, & 2a^2 \end{vmatrix}. \qquad (12.3)$$

Rozepsáním vztahu (12.3) dostaneme

$16V^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$

$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=$

$=\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$

Označíme-li $s=(a+b+c)/2$ máme konečně

$$V=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \qquad (12.4)$$

Vzorec (12.4) je známý *Heronův vzorec.*

Cvičení

1) Určete obsah trojúhelníka ABC v E_3, $A=[2,1,4]$, $B=[-1,-2,1]$, $C=[-1,3,2]$

a) užitím vzorce (11.1),

b) užitím Heronova vzorce (12.4),

c) užitím vzorce $V=\frac{1}{2}z\cdot v$.

Výsledek: $V=\frac{3}{2}\sqrt{42}$.

2. Určete obsah V trojúhelníka OA_1A_2, jehož vrcholy mají v nějaké k. s. s. souřadnice

$O=[0,0,0]$, $A_1=[a_{11},a_{12},a_{13}]$, $A_2=[a_{21},a_{22},a_{31}]$.

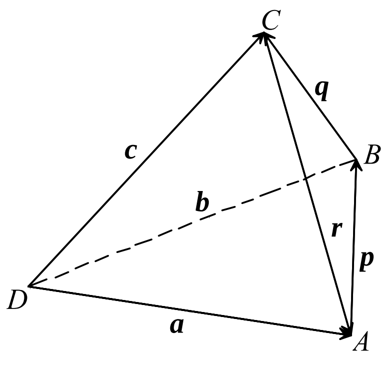
Výsledek: $V=\frac{1}{2}\sqrt{\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^T)}$, kde $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

13. Objem čtyřstěnu

Jsou-li dány body A, B, C, D prostoru E_3, jejichž souřadnice v kartézské soustavě souřadnic jsou $A=[a_1, a_2, a_3]$, $B=[b_1, b_2, b_3]$, $C=[c_1, c_2, c_3]$, $D=[d_1, d_2, d_3]$, lze objem čtyřstěnu $ABCD$ vypočítat podle vzorce

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix}\right\|. \qquad (13.1)$$

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet objemu čtyřstěnu pomocí délek jeho šesti hran. (obr.):



Označme

$\boldsymbol{a}=A-D$, $\boldsymbol{b}=B-D$, $\boldsymbol{c}=C-D$, $\boldsymbol{p}=B-A=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{q}=C-B=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r}=A-C=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,
$|\boldsymbol{a}|=a$, $|\boldsymbol{b}|=b$, $|\boldsymbol{c}|=c$, $|\boldsymbol{p}|=p$, $|\boldsymbol{q}|=q|$, $|\boldsymbol{r}|=r$.

Podle (11.l) pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí $V=\frac{1}{6}|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$, tedy

$$36V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b}^2, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}. \tag{13.2}$$

Dále platí vztah $\boldsymbol{p}^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^2$ a odtud $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a^2 + b^2 - p^2)/2$.
Analogicky dostaneme
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (a^2 + c^2 - r^2)/2$ a $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (b^2 + c^2 - q^2)/2$.
Dosazením těchto vztahů do (13.2) získáme

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+b^2-p^2, & a^2+c^2-r^2 \\ a^2+b^2-p^2, & 2b^2, & b^2+c^2-q^2 \\ a^2+c^2-r^2, & b^2+c^2-q^2, & 2c^2 \end{vmatrix}. \tag{13.3}$$

Vzorec (13.3) umožňuje vypočítat objem čtyřstěnu pomocí délek jeho hran. Vzorci (13.3) dáme ještě poněkud symetričtější tvar.

Determinant ve (13.3) rozšíříme o řádek $(-a^2, -b^2, -c^2, 1)$ a sloupec $(0, 0, 0, 1)$ a tento řádek přičteme k ostatním řádkům. Máme

$$288V^2 = \begin{vmatrix} a^2, & a^2-p^2, & a^2-r^2, & 1 \\ b^2-p^2, & b^2, & b^2-q^2, & 1 \\ c^2-r^2, & c^2-q^2, & c^2, & 1 \\ -a^2, & -b^2, & -c^2, & 1 \end{vmatrix}.$$

Poslední determinant rozšíříme o sloupec $(1, -a^2, -b^2, -c^2, 0)$ a řádek $(1, 0, 0, 0, 0)$ a tento sloupec přičteme k prvním třem sloupcům. Dostaneme

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -a^2 & 0 & -p^2 & -r^2 & 1 \\ -b^2 & -p^2 & 0 & -q^2 & 1 \\ -c^2 & -r^2 & -q^2 & 0 & 1 \\ 0 & -a^2 & -b^2 & -c^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vyměníme 1. a 5. sloupec a po malé úpravě máme konečně

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 & r^2 & a^2 \\ 1 & p^2 & 0 & q^2 & b^2 \\ 1 & r^2 & q^2 & 0 & c^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{13.4}$$

Pro lepší zapamatování formule (13.4) označme $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$, $D = A_4$ a nechť $|A_i A_j| = a_{ij}$. Potom

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}, \tag{13.4)'$$

neboť pro prvky na diagonále je $a_{ii}^2 = 0$, $i = 1,2,3,4$.

Položíme-li ve vzorci (13.4) $V = 0$, dostaneme tzv. *Eulerovu čtyřbodovou relaci*, která udává vztah mezi šesti vzdálenostmi mezi vrcholy čtyřúhelníka v rovině. Determinant tvaru (13.4) se nazývá Cayley-Mengerův determinant, (K. Menger 1902 - rakouský matematik, A. Cayley (1821-1895) - anglický matematik).

Jak známo, čtyřúhelníkje určen pěti prvky. Šest prvků čtyřúhelníka je tudíž na sobě závislých a tuto závislost vyjadřuje právě Eulerova čtyřbodová relace. Z definice objemu totiž plyne, že objem čtyřstěnu je nulový právě když body $ABCD$ leží v jedné rovině.

Cvičení

1) Určete objem čtyřstěnu $ABCD$,
$A = [0, 0, 2]$, $B = [3, 0, 5]$, $C = [1, 1, 0]$, $D = [4, 1, 2]$,

a) s použitím vzorce (13.1) pro objem čtyřstěnu s využitím souřadnic vrcholů čtyřstěnu,
b) s použitím vzorce (13.3) s využitím délek hran čtyřstěnu,
c) s použitím vzorce pro objem jehlanu $V = \frac{1}{3} P.v$.

Výsledek: $V = \frac{1}{2}.$

2) Určete objem čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách

$$x + y + z - 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad x - z - 1 = 0, \quad z - 2 = 0.$$

Výsledek: Vrcholy $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, -1, 2]$, $C = [3, -4, 2]$, $D = [3, 2, 2]$, $V = 6$.

3) Napište rovnici, která vyjadřuje Eulerovu čtyřbodovou relaci pro čtyřúhelník o stranách a, b, c, d a úhlopříčkách e, f.

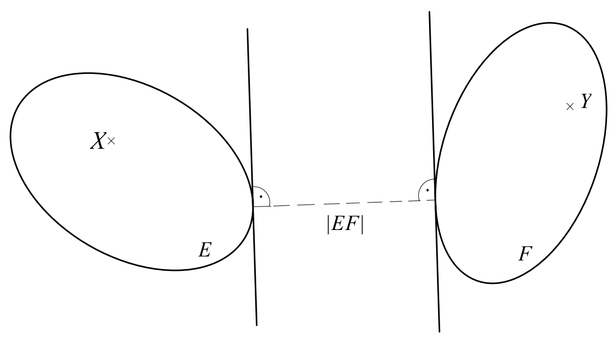
14. Vzdálenost množin

Základním pojmem eukleidovského prostoru je pojem vzdálenosti dvou bodů. Vzdálenost bychom chtěli rozšířit i na jiné podprostory E_n než body. Budeme přitom vycházet z následující definice.

Definice 14.1
Nechť E, F jsou dvě neprázdné podmnožiny eukleidovského prostoru E_n. Potom *vzdáleností* $|EF|$ *množin* E, F rozumíme číslo

$$|EF| = inf\,\{|XY|; X \in E, Y \in F\}. \tag{14.1}$$

Poznámka
Vzdálenost dvou množin je tedy rovna infimu všech vzdáleností $|XY|$, kde bod X je z jedné množiny a bod Y z druhé množiny. Protože vždy platí $|XY| \geq 0$, je množina všech vzdáleností $|XY|$ zdola omezená a infimum vždy existuje. Stručně řečeno, každé dvě neprázdné množiny jsou od sebe nějak vzdáleny (obr.).



Pojem vzájemné polohy dvou podprostorů v E_n se plně přenáší z afinních prostorů. Je tedy možná jen tato vzájemná poloha podprostorů: dva podprostory jsou různoběžné, rovnoběžné nebo mimoběžné. Nově zavádíme pro eukleidovské prostory pojem kolmosti.

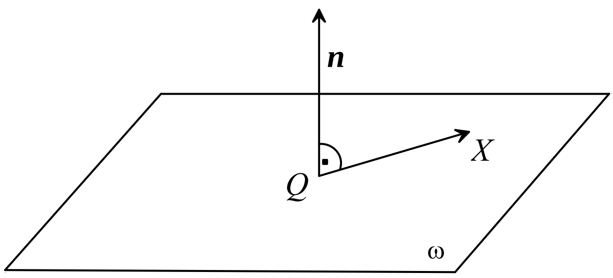
Definice 14.2
Podprostory E_r, E_s eukleidovského prostoru E_n jsou na sebe *kolmé* resp. *totálně kolmé*, jsou-li na sebe kolmá resp. totálně kolmá jejich vektorová zaměření.

Při vyšetřování vzdálenosti dvou podprostorů v E_n se budeme zabývat hlavně těmi podprostory, které nemají společný bod. Různoběžné podprostory totiž mají podle definice vzdálenost rovnou nule. Budeme se tedy zabývat mimoběžnými a rovnoběžnými podprostory.

15. Vzdálenost bodu od podprostoru

Nejprve vypočítáme vzdálenost libovolného bodu $A \in E_n$ od nadroviny E_{n-1}. K tomu budeme potřebovat rovnici nadroviny, vyjádřenou pomocí skalárního součinu.

Nadrovina $E_{n-1} = \omega$ je určena bodem Q a zaměřením V_{n-1}. Ortogonální doplněk vektorového prostoru V_{n-1} je jednorozměrný vektorový podprostor $V_{n-1}^{\perp}$. Nechť $\boldsymbol{n}$ je nějaký nenulový vektor z $V_{n-1}^{\perp}$. Bod $X \in E_n$ je bodem nadroviny právě když je vektor $X - Q$ kolmý k vektoru $\boldsymbol{a}$, obr.



Dostáváme tak vyjádření nadroviny E_{n-1} pomocí skalárního součinu

$$(X - Q) \cdot \boldsymbol{n} = 0 . \tag{15.1}$$

Platí-li v nějaké kartézské soustavě souřadnic $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $Q = [q_1, q_2, ..., q_n]$, $\boldsymbol{n} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, má rovnice (15.1) po úpravě tvar

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n + p_{n+1} = 0 , \qquad (15.1)'$$

kde $p_{n+1} = -q_1 p_1 - q_2 p_2 - ... - q_n p_n$ je konstanta.
V kapitole o afinních prostorech jsme odvodili, že každá nadrovina afinního prostoru má tvar (15.1)'. V eukleidovském prostoru, který je

též afinním prostorem, to tedy platí také. V E_n však mají koeficienty $p_1, p_2, ..., p_n$ u proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ názorný geometrický význam. Koeficienty $p_1, p_2, ..., p_n$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{n}$, který je *kolmý* na nadrovinu $E_{n-1} = \omega$.

Věta 15.1
Je-li A bod z E_{n-1}, pak vzdálenost $|AE_{n-1}|$ bodu A od nadroviny E_{n-1} o rovnici (15.1) je rovna

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A-Q)\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}. \qquad (15.2)$$

Důkaz:
Je-li bod A bodem nadroviny, potom je podle definice vzdálenosti podprostorů, vzdálenost $|AE_{n-1}|$ rovna nule.
Dále předpokládejme, že bod A neleží v E_{n-1}. Najdeme takový bod $A' \in E_{n-1}$, pro který je vektor $A - A'$ je kolmý ke všem vektorům zaměření nadroviny E_{n-1}. Bod A' najdeme jako průsečík přímky $p = [A, \boldsymbol{n}]$ a nadroviny (15.1).
Nechť

$$p: X = A + t\boldsymbol{n}, \qquad E_{n-1}: (X - Q)\cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Dosazením za X z prvé rovnice do druhé rovnice postupně získáme

$$((A-Q)+t\boldsymbol{n})\cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad (A-Q)\cdot \boldsymbol{n} + t\boldsymbol{n}^2 = 0, \quad t = \frac{(A-Q)\cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}.$$

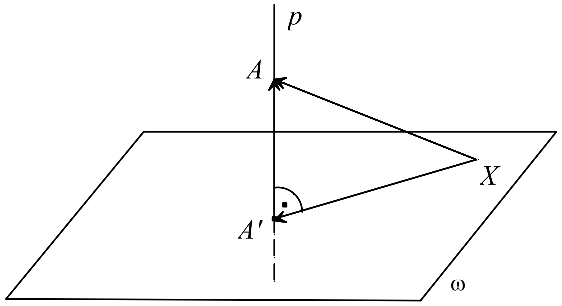
Dosazením za t do rovnice přímky p získáme bod A'. Vzdálenost $|AA'|$ bodů A, A' je hledanou vzdáleností $|AE_{n-1}|$ bodu A od nadroviny E_{n-1}. To ovšem musíme dokázat. Nejprve odvodíme vzorec (15.2).
Platí:

$$|AA'| = |A - A'| = \left| A - \left(A - \frac{(A-Q)\cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n} \right) \right| = \frac{|(A-Q)\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Nyní ukážeme, že pro každý bod X nadroviny E_{n-1} platí nerovnost

$$|AA'| \le |AX|, \tag{15.3}$$

s rovností pouze pro bod A' (obr):



Tím bude důkaz věty dokončen. Je

$$A - X = (A - A') + (A' - X).$$

Obě strany rovnice skalárně vynásobíme na druhou

$$(A - X)^2 = (A - A')^2 + 2(A - A')\cdot(A' - X) + (A' - X)^2.$$

Jelikož vektor $A' - A$ je kolmý k vektoru $X - A'$, máme

$$(A - X)^2 = (A - A')^2 + (A' - X)^2 \ge (A' - A)^2.$$

V posledním vztahu jistě čtenář poznává Pythagorovu větu. Odtud již plyne nerovnost (15.3) i případ, kdy nastane rovnost.

V předchozí větě jsme při vyšetřování vzdálenosti bodu A od nadroviny E_{n-1} nalezli v nadrovině E_{n-1} takový bod A', že $|AE_{n-1}| = |AA'|$. Ukázali jsme, že takový bod vždy existuje a je jediný. Všimněme si, že jsme úlohu. určit vzdálenost bodu od nadroviny, převedli na úlohu, určit vzdálenost dvou bodů. Tento princip zachováme i při dalším zkoumání vzdálenosti dvou podprostorů.

Mějme nyní dán *libovolný* podprostor E_k prostoru E_n, který nemusí být nadrovinou, a zkoumejme vzdálenost bodu A od E_k.

Věta 15.2
Nechť $A \in E_n$, E_k je podprostor E_n a nechť $E_k^{\perp}$ je podprostor totálně kolmý k E_k, který prochází bodem A. Označíme-li $E_k \cap E_k^{\perp} = A'$, potom vzdálenost bodu A od E_n je rovna vzdálenosti bodů A, A'.

Důkaz:
Nechť $E_k = [B, V_k]$. Dále je $E_k^{\perp} = [A, V_k^{\perp}]$. Jak známo,

$$E_k \cap E_k^{\perp} \neq \emptyset \Leftrightarrow B - A \in V_k \vee V_k^{\perp} \Leftrightarrow B - A \in V_n,$$

což zřejmě platí. Tedy průnik E_k a $E_k^{\perp}$ je neprázdný. Podle věty o dimenzi průniku podprostorů je dim $(E_k \cap E_k^{\perp}) = \dim(V_k \cap V_k^{\perp}) = 0$. Tedy průnikem podprostorů E_k a $E_k^{\perp}$ je bod. Označme jej A'. Dále, protože $A \in E_k^{\perp}$, $A' \in E_k^{\perp}$, vektor $A - A' \in V_k^{\perp}$ a to znamená, že přímka určená body A, A' je kolmá k E_k. Je-li X libovolný bod E_k, stejně jako u nadroviny se ukáže, že platí $|AA'| \leq |AX|$. Tedy $|AE_k| = |AA'|$.

Bod A', o kterém jsme hovořili v předchozích větách, se nazývá *kolmý průmět bodu A do podprostoru* E_k.

Příklad
V eukleidovském prostoru E_4 určete vzdálenost bodu A od roviny $\rho = [Q, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, jestliže v nějaké k.s.s. platí A = [2, -6, 5, -1], Q = [3, 1, 4, -2], $\boldsymbol{u}$ = (2, 3, 5, 2), $\boldsymbol{v}$ = (0, 1, 3, 4).

Řešení:
Hledáme kolmý průmět A' bodu A do podprostoru ρ. Protože $A' \in \rho$, musí platit

$$A' = [3 + 2t, 1 + 3t + s, 4 + 5t + 3s, -2 + 2t + 4s].$$

Vektor

$$A - A' = (-1-2t, -7-3t-s, 1-5t-3s, 1-2t-4s)$$

je kolmý k vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, tedy platí

$$2(-1-2t) + 3(-7-3t-s) + 5(1-5t-3s) + 2(1-2t-4s) = 0$$

a zároveň

$$1(-7-3t-s) + 3(1-5t-3s) + 4(1-2t-4s) = 0\,.$$

Odtud $t = -1,\ s = 1$ a $A' = [1,\ -1,\ 2,\ 0]$.

Tedy $|A - A'| = |(1,\ -5,\ 3,\ -1)| = \sqrt{36} = 6$.

Vzdálenost bodu A od roviny ρ je 6.

Cvičení

1) Na přímce p najděte bod A stejně vzdálený od rovin ρ a δ,

$$\rho: x + 2y + z + 1 = 0,\quad \delta: x + 2y + z - 3 = 0,$$
$$p:\ x + y + z - 2 = 0,$$
$$x - 2y - z - 1 = 0\,.$$

Výsledek: $A =$ [3, -l, 0]

2) Najděte bod P' souměrný s bodem P podle přímky p,

$P = [10, 3, 4\,]$, $p:\ x = 3 + 5t,\ y = 2 + 4t,\ z = 1 + 2t$.

Výsledek: $P' = [6, 9, 2]$.

3) Určete střed S kulové plochy, která prochází body A, B a bod S leží na přímce p,

$p:\ x + y + 2z - 1 = 0$, $\quad A = [3, 4, 11]$, $B = [-5, -2, -13]$.

$3x + 4y - z - 29 = 0$,

Výsledek: $S = [2,5,-3]$.

4) Přímkou p veďte rovinu, která má od bodu A vzdálenost d,

$A = [3, 2, 2]$, $d = \sqrt{11}$, $\quad p:\ x + y - z + 6 = 0$,

$2x + y - z + 4 = 0$.

Výsledek: $3x + y - z + 2 = 0,\ 7x - 5y + 5z - 54 = 0$.

16. Vzdálenost podprostorů

Věta 16.1
Nechť E_r, E_s jsou dva podprostory eukleidovského prostoru E_n, které nemají společný bod. Potom existují body $A' \in E_r$ a $A'' \in E_s$ tak, že přímka $A'A''$ je kolmá k oběma podprostorům. Vzdálenost podprostorů E_r, E_s je rovna vzdálenosti bodů $A'A''$.

Důkaz:
Nechť $E_r = [B, V_r]$, $E_s = [C, V_s]$, označme $W = (V_r \vee V_s)^{\perp}$ a sestrojme podprostor $E = [B, V_r \vee W]$. Je vidět, že podprostor E obsahuje podprostor E_r a je různoběžný s podprostorem E_s. Je totiž $E \cap E_s \neq \emptyset$ právě když $B - C \in V_s \vee V_r \vee W = V_n$, což jistě platí. Označme A' libovolný bod průniku $E \cap E_s$. Podle předchozího v E_r existuje jediný bod A'' takový, že přímka $A'A''$ je kolmá k E_r. Ukážeme, že tato přímka je kolmá zároveň k E_s. Totiž $A' \in E$ a protože $A'' \in E_r$ a $E_r \subseteq E$ proto $A'' \in E$. To znamená, že vektor $A' - A''$ leží v podprostoru $V_r \vee W$. Protože $A' - A'' \perp V_r$, plyne odtud $A' - A'' \in W$ a tedy $A' - A'' \perp V_s$, tj. přímka $A'A''$ je kolmá k E_r i k E_s.
Nyní ukážeme, že vzdálenost $|A'A''|$ bodů A', A'' je vzdáleností podprostorů E_r, E_s.
Dokážeme: Pro libovolné body $X \in E_r$, $Y \in E_s$ platí

$$|A'A''| \leq |XY|. \tag{16.1}$$

Je
$$X - Y = (X - A'') + (A'' - A') + (A' - Y).$$
Skalárním vynásobením obou stran na druhou dostáváme
$$(X - Y)^2 = [(X - A'') + (A' - Y)]^2 + 2[(X - A'') + (A' - Y)] \cdot (A'' - A') +$$
$$+ (A'' - A')^2$$
a odtud

$$(X-Y)^2 \geq (A''-A')^2\,, \qquad (16.2)$$

neboť

$$[(X-A'')+(A'-Y)]\cdot(A''-A')=$$
$$=(X-A'')\cdot(A''-A')+(A'-Y)\cdot(A''-A')=0\,.$$

Rovnost v (16.2) a (16.1) nastane právě když

$$(X-A'')+(A'-Y)=\boldsymbol{o}\,,$$

tj. právě když $X-Y=A''-A'$.

Zatímco při zkoumání vzdálenosti bodu A od podprostoru existuje v daném podprostoru jediný bod A' takový, že vektor $A'-A$ je kolmý k danému podprostoru, bodů A', A'' takových, že vektor $A''-A'$ je kolmý na oba podprostory E_r, E_s, může být nekonečně mnoho (v případě, že $V_r \cap V_s \neq \boldsymbol{o}$). Jako příklad uveďme dva rovnoběžné podprostory.

Nechť jsou v E_n dány rovnoběžné podprostory E_r, E_s, které nemají společný bod a nechť $E_r=[A,V_r]$, $E_s=[B,V_s]$ a předpokládejme, že $r \geq s$. Potom je $V_s \subset V_r$, $W=V_r^{\perp}$, $E=E_n$ a $E_n \cap E_s = E_s$. Za bod A' lze vzít libovolný bod podprostoru E_s. Tedy platí:

Věta 16.2

Jsou-li E_r, E_s dva rovnoběžné podprostory v E_n a platí-li $r \geq s$, pak je vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in E_s$ od podprostoru E_r.

Příklad

Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ v E_3.

Řešení:

Nechť rovnice daných rovin v nějaké k.s.s. jsou

ρ: $ax+by+cz+d=0$, σ: $ax+by+cz+e=0$. Dle předchozí věty bude vzdálenost rovin ρ, σ rovna vzdálenosti např. bodu $X_0 \in \rho$ od roviny σ. Označíme-li $X_0=[x_0, y_0, z_0]$ potom podle (15.2)

$$|\rho\sigma| = |X_0\sigma| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (16.3)$$

V důsledku rovnosti $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ máme $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$. Dosazením do (16.3) dostáváme vzorec

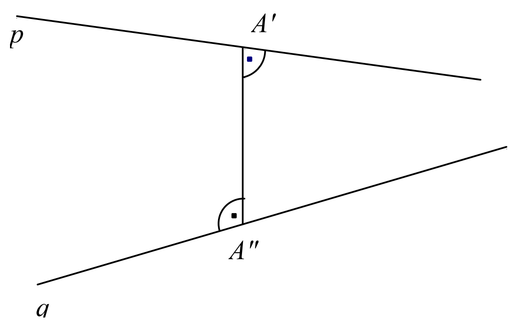
$$|\rho\sigma| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (16.3)'$$

Zvolíme-li a, b, c tak, aby $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, což můžeme zařídit vždy, dostaneme pro vzdálenost rovnoběžných rovin ρ, σ velmi jednoduchý vztah

$$|\rho\sigma| = |d - e|. \qquad (16.3)''$$

Nyní budeme zkoumat příčky podprostorů. Přímka, která má jednobodový průnik s každým ze dvou daných mimoběžných podprostorů, se nazývá *příčka mimoběžných podprostorů.*

Definice 16.1
Jsou dány dva mimoběžné podprostory E_r, E_s v E_n. Příčka, která je kolmá k oběma podprostorům E_r i E_s, se nazývá *osa mimoběžných podprostorů* a vzdálenost jejích průsečíků A', A'' s oběma podprostory se nazývá *délka osy*.
Často se místo osa používá názvu *nejkratší příčka mimoběžných podprostorů*. V tomto případě má příčka význam úsečky, jejíž



jeden krajní bod leží v jednom podprostoru a druhý krajní bod v druhém podprostoru q. Například nejkratší příčkou mimoběžek p,q je úsečka $A'A''$, která je kolmá k oběma mimoběžkám, obr.

Příklad

V eukleidovském prostoru E_4 určete osu mimoběžných rovin $\rho = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \sigma = [B, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}']$ a jejich vzdálenost. V nějaké k.s.s. $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ je

A = [4,2,0,0], $\boldsymbol{u}$ = (l, 2, 1, - l), $\boldsymbol{v}$ = (l, 0, -1, -1),
B = [5,2,4,-2], $\boldsymbol{u}'$ = (2,1,1,-1) , $\boldsymbol{v}'$ = (0, 3, 5, 1).

Řešení:

Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'$ jsou lineárně závislé jak plyne diagonalizací matice souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy spojení vektorových podprostorů $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \vee \langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}' \rangle$ má dimenzi tři. Protože, jak se snadno ověří, $B - A \notin \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \vee \langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}' \rangle$, jsou roviny ρ, σ mimoběžné. Určíme ortogonální doplněk vektorů (1, 2, 1, -1), (0, -1, -1, 0), (0, 0, 2, 1). Označme jej $\boldsymbol{n}$. Je

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Vychází $\boldsymbol{n}$ = (-1, -1, 1, -2). Nyní určíme průnik prostorů

$E = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}]$ a $\sigma = [B, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}']$.
Je

$$E : X = A + t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v} + t_3\boldsymbol{n}\,, \quad \sigma : B + t_4\boldsymbol{u}' + t_5\boldsymbol{v}'\,.$$

Řešíme rovnici

$$t_1\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v} + t_3\boldsymbol{n} - t_4\boldsymbol{u}' - t_5\boldsymbol{v}' = B - A.$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do souřadnic, dostaneme soustavu čtyř rovnic o 5 - ti neznámých.
Úpravou matice soustavy dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 & 14 \end{array}\right).$$

Dimenze průniku podprostorů je rovna počtu parametrů minus hodnost matice, tj. v našem případě $4 - 3 = 1$. Tedy průnikem podprostorů je jednodimenzionální podprostor, tj. přímka. Zvolme např. $t_5 = -1$. Odtud $t_4 = -1$ a pro bod $A' \in E \cap \sigma$ dostaneme $A' = B - \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{v}'$ tj.
A' = [3,-2,-2,-2]. Osa p rovin ρ a σ má rovnici
$p :\ X = A' + t\,\boldsymbol{n}$ pro nalezený bod $A' = [3, -2, -2, -2]$ a vektor $\boldsymbol{n} = (-1, -1, 1, -2)$ nebo též můžeme psát

$$p : [x_1, x_2, x_3, x_4] = [3, -2, -2, -2] + t(-1, -1, 1, -2)\,.$$

K tomu, abychom určili vzdálenost rovin ρ a σ určíme průsečík osy p s rovinou ρ.
Je $\rho : A + r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$. Řešíme rovnici

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} - t\boldsymbol{n} = A - A'\,.$$

Úpravou matice soustavy dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Odtud $t = 1$ a dosazením do rovnice osy p máme $A'' = A' + \boldsymbol{n}$ tj. A'' = [2, -3, -1, -4]. Pro délku osy dostáváme

$$|A' - A''| = \sqrt{(1, 1, -1, 2)^2} = \sqrt{7}\,.$$

Vzdálenost rovin ρ a σ je rovna $\sqrt{7}$.

Cvičení

1) Určete osu mimoběžek p, q :

$p: 2x - 14 = y - 3 = 18 - 2z$, $q: x = 3 - 7t, y = 1 + 2t,\ z = 1 + 3t$.

Výsledek: $x = 1 + s,\ y = s,\ z = -3 + 4s$.

2) Najděte osu roviny ρ a přímky p v E_4 ,

$\rho: x_1 = 1 - t - s,\ x_2 = t - 2s,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2 + s$,

$p: x_1 = r,\ x_2 = 2r,\ x_3 = -6 - 3r,\ x_4 = 5$.

Výsledek: rovina a přímka jsou různoběžné, společný bod [-8/3, -16/3, 2,5].

3) Určete vzdálenost mimoběžek $p = [A, \boldsymbol{u}]$, $q = [B, \boldsymbol{v}]$ v E_3 , kde A = [1, 2, 0], $\boldsymbol{u}$ = (1, 1, 0), B = [0, 2, 3], $\boldsymbol{v}$ = (2, 0, 1).

Výsledek: A' = [-1/6, 5/6, 0], A'' = [- 4/3, 2, 7/3], $|A'A''| = 7/6\sqrt{6}$.

4) Určete vzdálenost dvou rovin $\rho = [A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$, $\sigma = [B, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ v E_4 ,

A = [1, -6, 2, -12], $\boldsymbol{u}_1$ = (2, 2, 2, 5), $\boldsymbol{u}_2$ = (1, 0, 0, 3),

B = [-9, 0, -11, -2], $\boldsymbol{v}_1$ = (0, 4, 5, 0), $\boldsymbol{v}_2$ = (1, 2, 2, 2).

Výsledek: $d = 18$.

5) Určete vzdálenost přímky $p = [A, \boldsymbol{u}]$ a roviny $\rho = [B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ v E_4, $A = [1, -1, -4, 1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 3, 5, 1)$, $B = [3, -8, 4, -2]$,
$\boldsymbol{v} = (1, 3, 0, 0)$, $\boldsymbol{w} = (1, 6, -2, -1)$.
Výsledek: $d = 6$.

6) Vzdálenost mimoběžek $a: X = A + t\,\boldsymbol{a}$, $b: X = B + t\,\boldsymbol{b}$ je dána vzorcem

$$|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}| = \frac{|(A - B) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})|}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}.$$

Dokažte.
Návod: Uvažte, že vzdálenost $|\boldsymbol{ab}|$ mimoběžek a, b je rovna vzdálenosti přímky a od roviny $\rho = [B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$, která obsahuje přímku b a je rovnoběžná s přímkou *a.* Potom použijte vzorec (15.2).

17. Odchylka podprostorů

V této části se budeme zabývat odchylkou podprostorů eukleidovského prostoru E_n. Někdy se též místo pojmu odchylka podprostorů říká úhel podprostorů. Vzhledem k následující definici budeme pracovat výhradně s vektorovými podprostory.

Definice 17.1
Nechť E_r, E_s jsou podprostory eukleidovského prostoru E_n, a nechť vektorové prostory V_r, V_s jsou po řadě jejich zaměření. Potom odchylkou podprostorů E_r a E_s rozumíme odchylku jejich zaměření V_r, V_s.

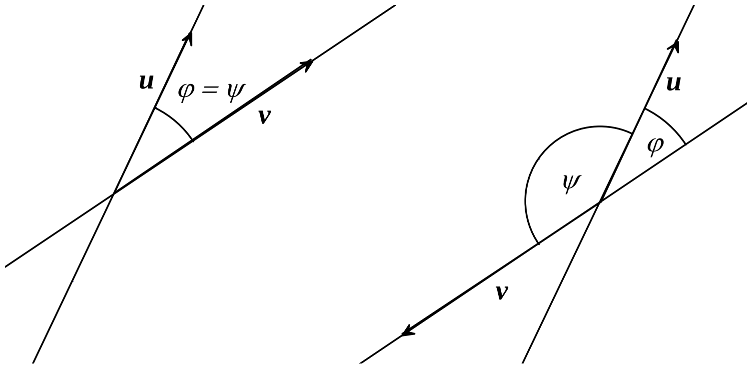
Nejprve definujeme odchylku jednorozměrných podprostorů. Vyjdeme přitom z definice 2.1 odchylky dvou vektorů. Vezmeme-li místo vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jejich libovolné nenulové násobky $c\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}$, kde $c, d \in R$, potom se výraz na pravé straně v (2.7), až na případnou změnu znaménka, nemění. Je proto účelné zavést následující definici.

Definice 17.2
Odchylkou jednorozměrných vektorových podprostorů $V_1 = \langle \boldsymbol{u} \rangle$ a $V_2 = \langle \boldsymbol{v} \rangle$ nazýváme číslo $\varphi \in < 0, \frac{\pi}{2} >$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} \quad . \tag{17.1}$$

Tedy odchylkou dvou přímek rozumíme menší ze dvou úhlů φ, ψ, které mezi sebou svírají vektory ze zaměření obou přímek, obr.
Takto definovaná odchylka skutečně nezávisí na výběru směrových vektorů přímek. Vezmeme-li místo vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vektory $c\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}$ potom

$$\cos\ \varphi = \frac{|(c\boldsymbol{u}) \cdot (d\boldsymbol{v})|}{|c\boldsymbol{u}||d\boldsymbol{v}|} = \frac{|cd||\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|c||d||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$



Nyní se budeme zabývat odchylkou přímky a libovolného podprostoru E_k. Nejprve budeme definovat kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{b}$ do podprostoru V_k.

Definice 17.3

Kolmým průmětem vektoru $\boldsymbol{b}$ do podprostoru V_k nazýváme vektor $\boldsymbol{b}' \in V_k$ takový, že vektor $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'$ je kolmý k V_k.

Zvolme ve V_k ortonormální bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ a pokusme se kolmý průmět $\boldsymbol{b}'$ vektoru $\boldsymbol{b}$ do V_k vyjádřit. Nechť pro vektor $\boldsymbol{b}' \in V_k$ platí $\boldsymbol{b}' = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + ... + c_k\boldsymbol{a}_k$. Označíme-li $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'$ potom je

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{n}. \tag{17.2}$$

Dosazením za $\boldsymbol{b}'$ do (17.2) dostáváme

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{n} = c_1\,\boldsymbol{a}_1 + c_2\,\boldsymbol{a}_2 + ... + c_k\,\boldsymbol{a}_k.$$

Vynásobíme-li obě strany této rovnosti vektorem $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, 2, ..., k$ dostaneme $c_i = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i$, neboť $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_i^j$ a $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}_i = 0$ pro $i = 1, 2, ..., k$. Pro vektor $\boldsymbol{b}'$ tedy ze (17.2) plyne

$$\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + ... + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_k)\boldsymbol{a}_k.$$

Dokázali jsme větu:

Věta 17.1

Pro kolmý průmět $\boldsymbol{b}'$ vektoru $\boldsymbol{b}$ do podprostoru V_k určeného ortonormální bází $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ platí

$$\boldsymbol{b}' = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i)\,\boldsymbol{a}_i . \qquad (17.3)$$

Nyní ke slíbené odchylce přímky a libovolného podprostoru.

Definice 17.4
Nechť jsou dány podprostory $V_1 = \langle \boldsymbol{b} \rangle$ a V_k vektorového prostoru V_n. *Odchylkou podprostorů* V_1 a V_k nazýváme odchylku vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b}'$, kde $\boldsymbol{b}'$ je kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{b}$ do podprostoru V_k.

Ukážeme, že takto definovaná odchylka podprostorů V_1 a V_k má podobnou vlastnost jako odchylka dvou jednorozměrných podprostorů. Tuto vlastnost vyjadřuje následující věta.

Věta 17.2
Nechť V_1 a V_k jsou podprostory V_n. Potom odchylka podprostorů V_1 a V_k je rovna nejmenší odchylce vektorů, z nichž jeden vektor je z V_1 a druhý z V_k.

Důkaz:
Předpokládejme, že $V_1 = \langle \boldsymbol{b} \rangle$ kde $|\boldsymbol{b}| = 1$, $V_k = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$, kde $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ je ortonormální báze prostoru V_k a nechť $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{a}_i$ je libovolný vektor z V_k. Je-li $V_1 \perp V_k$ potom $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ a odchylka je stále rovna $\pi / 2$ a tvrzení věty platí.
Předpokládejme, že podprostor V_1 není kolmý na V_k. Dokážeme, že potom platí

$$\frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}'|} \geq \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{x}|}, \qquad (17.4)$$

kde $\boldsymbol{b}'$ je kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{b}$ do V_k.
Protože $\boldsymbol{b}' = \sum (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$, plyne odtud $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}' = \sum (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i)^2 = \boldsymbol{b}'^{\,2}$.
Po úpravě se nerovnost (17.4) redukuje na tvar

$$|\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{17.5}$$

Vynásobíme-li vztah $\boldsymbol{x} = \sum x_j \boldsymbol{a}_j$ skalárně vektorem $\boldsymbol{a}_i$ dostaneme $x_i = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_i$ tedy $\boldsymbol{x} = \sum(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$. Odtud plyne rovnost $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{x}$ Dosazením do (17.5) dostáváme Cauchyovu nerovnost $|\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{x}$, kde rovnost nastává právě když pro vektory $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{x}$ platí $\boldsymbol{b}' = c\boldsymbol{x}$ nebo $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{b}'$, kde $c \geq 0$. Dokázali jsme nerovnost (17.4) a tím i tvrzení věty, neboť (17.4) je ekvivalentní vztahu

$$\cos(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') \geq \cos(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}).$$

Často je v podobných úvahách užitečná následující nerovnost.

Věta 17.3 (Besselova nerovnost)
Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ je ortonormální systém vektorů z vektorového prostoru V_n a nechť $\boldsymbol{b}$ je libovolný vektor z V_n . Potom platí

$$\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)^2 \leq \boldsymbol{b}^2. \tag{17.6}$$

Rovnost v (17.6) nastává právě když je vektor $\boldsymbol{b}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Důkaz:
Je

$$0 \leq \left(\boldsymbol{b} - \sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i\right)^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)^2 + \left(\sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i\right)^2 =$$
$$= \boldsymbol{b}^2 - 2\sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)^2 + \sum_i\sum_j(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}^2 - \sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)^2.$$

Pokud se týká rovnosti, nechť $\boldsymbol{b} = \sum x_i\boldsymbol{a}_i$. Potom $x_i = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i$ a odtud $\boldsymbol{b}^2 = \sum(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_i)^2$. Důkaz obrácené implikace je obdobný.

Poznámky

1) Volíme-li v (17.6) $k = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ dostáváme Cauchyovu nerovnost $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. Besselova nerovnost (17.6)

je tedy zobecněním Cauchyovy nerovnosti (F.W. Bessel (1784 - 1846), německý astronom a matematik).

2) Označíme-li $\boldsymbol{b}'$ kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{b}$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ vidíme, že $\boldsymbol{b}' = \sum (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$ a odtud $\boldsymbol{b}'^2 = \sum (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_i)^2$. Místo (17.6) lze tedy psát

$$|\boldsymbol{b}'| \le |\boldsymbol{b}|, \tag{17.6'}$$

tj. velikost kolmého průmětu vektoru $\boldsymbol{b}$ do nějakého podprostoru je menší nebo rovna velikosti vektoru $\boldsymbol{b}$. Besselova nerovnost je tedy zobecněním známé skutečnosti, že délka kolmého průmětu úsečky do roviny je menší nebo rovna délce dané úsečky.

3. Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je ortonormální báze vektorového prostoru V_n a nechť $\boldsymbol{b}$ je libovolný vektor z V_n. Potom v důsledku věty 17.3. platí

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \varphi_i = 1,$$

kde φ_i značí odchylku vektorů $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}$. Je-li vektor směrovým vektorem přímky p, potom se výrazy cos φ_i, $i = 1,2,\dots,n$ nazývají *směrové kosiny přímky p.*

Snadno se počítá odchylka přímky od nadroviny. Předpokládejme, že zaměření přímky je podprostor V_1 a zaměření nadroviny je podprostor V_{n-1}. Ortogonální doplněk podprostoru V_{n-1} je jednorozměrný podprostor $V_{n-1}^{\perp}$. Nechť $V_1 = \langle \boldsymbol{b} \rangle$ a $V_{n-1}^{\perp} = \langle \boldsymbol{n} \rangle$ a označme $\boldsymbol{b}'$ kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{b}$ do V_{n-1}. Předpokládejme, že $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{n}$. Pro vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n}$ platí podle (2.7) Pythagorova věta

$$\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{b}'^2 + \boldsymbol{n}^2. \tag{17.7}$$

Dále je

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{b}'|} = \frac{|\boldsymbol{b}'|^2}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}'|} = \frac{|\boldsymbol{b}'|}{|\boldsymbol{b}|},\quad \cos\psi = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{n}|} = \frac{(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{n}|} = \frac{|\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{b}|}.$$

Dosazením do (17.7) dostaneme

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi = 1$$

a odtud $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Dokázali jsme větu:

Věta 17.4
Nechť jsou V_1 a V_{n-1} dva podprostory prostoru V_n a nechť $V_{n-1}^{\perp}$ je podprostor kolmý na V_{n-1}. Označíme-li φ odchylku V_1 a V_{n-1}, potom platí

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}. \tag{17.8}$$

Příklad
Určete odchylku přímky p a roviny ρ v E_3, jestliže $p = [A, \boldsymbol{u}]$, $\rho = [B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$, kde $A = [3,-1,3]$, $\boldsymbol{u} = (1,1,2)$, $B = [2,1,1]$, $\boldsymbol{v} = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{w} = (1,0,0)$.

Řešení:
1.způsob: Nejprve určíme odchylku ψ přímky p a normály roviny ρ. Za normálový vektor roviny ρ vezmeme vektorový součin $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$= (0,-1,-1). Dále

$$\cos\ \psi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|} = \frac{|(1,1,2)\cdot(0,-1,-1)|}{\sqrt{1+1+4}\,\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

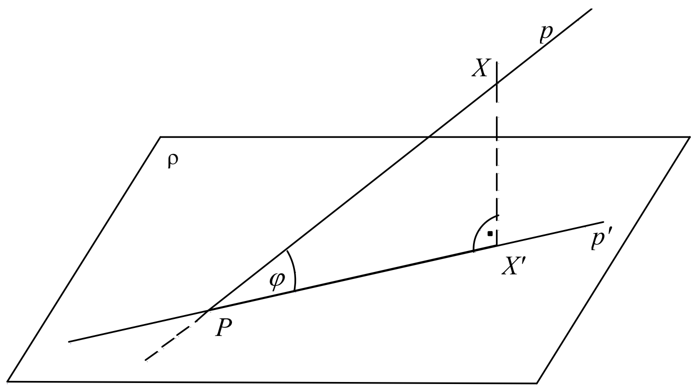
Tedy $\psi = \dfrac{\pi}{6}$. Podle předchozí věty je odchylka φ přímky p a roviny ρ rovna $\dfrac{\pi}{3}$.

2. způsob: Odchylku φ přímky p a roviny ρ určíme jako odchylku vektoru $\boldsymbol{u}$ přímky p a jeho kolmého průmětu $\boldsymbol{u}'$ do zaměření $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$ roviny ρ.

Pomocí Gram-Schmidtova procesu vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ nejprve ortogonalizujeme. Položme $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + k\boldsymbol{w}$. Po vynásobení posledního vztahu vektorem $\boldsymbol{w}'$ dostaneme $k = -1$, tedy $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (0, 1, -1)$. Vektory $\boldsymbol{w}'$, $\boldsymbol{v}'$ znormujeme a dostaneme $\boldsymbol{w}'' = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}'' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Pro kolmý průmět $\boldsymbol{u}'$ vektoru $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u}' = k\boldsymbol{w}'' + l\boldsymbol{v}''$, přičemž $k = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}'' = 1$, $l = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Po dosazení vychází $\boldsymbol{u}' = (1, 0, 0) - \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pro odchylku φ platí $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}'|} = \frac{1}{2}$. Odtud $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Poznámka

Ve druhém způsobu řešení předchozího příkladu jsme použili kolmého průmětu vektoru ze zaměření přímky p do zaměření roviny ρ. Odchylka přímky p a roviny ρ je pak rovna odchylce vektoru ze zaměření přímky p a jeho kolmého průmětu. Často se hovoří o *kolmém průmětu* p' *přímky* p do roviny ρ, obr.



To je přímka ležící v rovině ρ, která je dána např. průsečíkem P s rovinou ρ a kolmým průmětem jednoho svého bodu X, který je různý od P. Množinou kolmých průmětů všech bodů přímky p do roviny ρ je právě přímka p'. Odchylka přímky p a roviny ρ je potom rovna odchylce přímky p a jejího kolmého průmětu p' do roviny ρ.

Nyní uvedeme větu, která udává vztah mezi odchylkou vektorových podprostorů V_1 a V_{n-1} a odchylkou jejich ortogonálních doplňků.

Věta 17.5
Nechť V_1 a V_{n-1} jsou podprostory vektorového prostoru V_n a nechť $V_1^\perp$ a $V_{n-1}^\perp$ jsou po řadě jejich ortogonální doplňky. Potom odchylka podprostorů V_1 a V_{n-1} je rovna odchylce podprostorů $V_1^\perp$ a $V_{n-1}^\perp$.

Důkaz:
Označme odchylky podprostorů V_1 a V_{n-1}, $V_1^\perp$ a $V_{n-1}^\perp$, V_1 a $V_{n-1}^\perp$ po řadě α, β, γ. Potom platí podle (17.8)

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

a odtud $\alpha = \beta$.

Odchylku dvou libovolných podprostorů vektorového prostoru V_n uvádět nebudeme. Její zavedení je trochu složitější, a navíc je známo několik možností, jak odchylku definovat. Ačkoliv jsou tyto definice různé, všechny musí splývat v případech $n = 1, 2, 3$. Dále je přirozené požadovat, aby se odchylka podprostorů V_r a V_s rovnala odchylce jejich ortogonálních doplňků $V_r^\perp$ a $V_s^\perp$.

Na závěr proto definujme odchylku dvou nadrovin, která v sobě zahrnuje poslední reálný, dosud nezahrnutý případ, odchylku dvou rovin v E_3.

Definice 17.5
Nechť V_{n-1} a V'_{n-1} jsou podprostory vektorového prostoru V_n. Odchylkou podprostorů V_{n-1} a V'_{n-1} rozumíme odchylku jejich ortogonálních doplňků $V_{n-1}^{\perp}$ a $V'^{\perp}_{n-1}$.

Poslední definice využijeme ke stanovení odchylky dvou rovin v E_3.

Příklad
Určete odchylku φ rovin ρ, σ v E_3.

Řešení:
a) Je-li v k.s.s. ρ: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, σ : $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$,
potom

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

b) Jestliže $\rho = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, $\sigma = [B, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}]$ potom

$$\cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{z})|}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{z}|}.$$

Cvičení
1) Určete odchylku rovin $\rho = [A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, $\sigma = [B, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}]$, jestliže
A = [1,2,3], $\boldsymbol{u}$ = (0,2,-1), $\boldsymbol{v}$ = (1,-1, 0),
B = [-1,0,1], $\boldsymbol{w}$ = (1,0,-2), $\boldsymbol{z}$ = (0,1,1).
Výsledek: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.
2) Přímkou p proložte rovinu ρ, která svírá s osou y úhel $\varphi = 45^o$.
$p: x = -3 - 3t, \quad y = 4 + t, \quad z = -2 + t$.
Výsledek: $y - z - 6 = 0,\ 3x + 5y + 4z - 3 = 0$.

3) Určete odchylku φ přímky p a roviny ρ,

$p: x + y + 3z = 0,$ $\quad \rho: 2x + y + z + 1 = 0.$
$\quad x - y - \ z = 0,$

Výsledek: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}.$

4) Najděte pravoúhlý průmět přímky *p* do roviny ρ,
$p: x = 4t$ $\quad \rho: x - y + 3z + 2 = 0.$
$\quad y = 4 + 3t$
$\quad z = -1 - 2t$
Výsledek: $x = -4 - 7s,\ y = 1 - 4s,\ z = 1 + s.$

5) Určete rovnici roviny ρ, která prochází body *A*, *B* a která je kolmá k rovině σ,
A = [-1, -2, 0], *B* = [1, 1, 2], σ: $x + 2y - 2z - 4 = 0.$
Výsledek: $10x - 6y - z - 2 = 0.$

6) Průsečíkem přímky *p* s rovinou ρ veďte přímku kolmou k rovině σ, kde
$p: x = 12 + 4t$ $\quad \rho: 3x + 5y - z - 2 = 0,$ $\quad \sigma: x - y + 6z - 2 = 0.$
$\quad y = 9 + 3t$
$\quad z = 1 + t$
Výsledek: $x = s,\ y = -s,\ z = -2 + 6s.$

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. Alexandrov, P.S.: *Kurs analytičeskoj geometrii i linejnoj algebry*. Nauka, Moskva 1979.
2. Berger, M.: *Geometr*y I, II. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1987.
3. Bican, L.: *Lineární algebra a geometrie*. Academia, Praha 2000.
4. Bydžovský, B.: *Úvod do analytické geometrie.* JČMF, Praha 1956.
5. Coxeter, H.S.M.: *Introduction to geometry.* Wiley & Sons, New York - London 1961.
6. Čech, E.: *Základy analytické geometrie I.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1956.
7. Gantmacher, F.R.: *Teorija matric.* Nauka, Moskva 1988.
8. Kuroš, A.G.: *Kurs vysšej algebry*. Nauka, Moskva 1975.
9. Pech, P., Strobl, J.: *Analytická geometrie lineárních útvarů.* Jihočeská univerzita, České Budějovice 1994.
10. Peschl, E.: *Analytická geometrie a lineární algebra*. SNTL, Praha 1971.
11. Pogorelov, A.V.: *Geometrija*. Nauka, Moskva 1984.
12. Rozenfeld, B.A.: *Mnogomernaja geometrija*. Nauka, Moskva 1966.
13. Sekanina, M. a kol.: *Geometrie I,II*. SPN, Praha 1986.

doc. RNDr. Pavel Pech, CSc.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE
LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

Roku 2004 vydala Jihočeská univerzita
Tiskárna Johanus Č. Budějovice
1. vydání

ISBN 80-7040-741-7