JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

KUŽELOSEČKY

Pavel Pech

České Budějovice 2004

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

KUŽELOSEČKY

Pavel Pech

České Budějovice 2004

Recenzenti:

doc. Ing. Lada Vaňatová, CSc., RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

© Pavel Pech, 2004

ISBN 80-7040-755-7

OBSAH

Předmluva ……………………………………………………………. 5
1. Elipsa ……………………………………………………….. 7
2. Hyperbola ……………………………………………………….. 26
3. Parabola ………………………………………………………... 44
4. Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše ……………………... 56
5. Transformace soustavy souřadnic ……………………………... 65
6. Uvedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar
pomocí otočení a posunutí ……………………………………….. 75
7. Obecné vlastnosti kuželoseček ………………………………… 90
8. Singulární kuželosečky ………………………………………… 101
9. Tečna a polára kuželosečky ……………………………………. 113
10. Sdružené průměry kuželosečky ……………………………….. 122
11. Hlavní směry kuželosečky ..…………………………………… 129
12. Uvedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar
užitím hlavních směrů …………………………………………. 135
13. Výsledky cvičení …………………………………………………... 143
Seznam použité literatury ……………………………………… 149

PŘEDMLUVA

V této učebnici jsou podány základy teorie algebraických křivek 2. stupně, které též nazýváme kuželosečkami. Pro studium této knihy se předpokládají znalosti základního kurzu analytické geometrie lineárních útvarů, viz např. [10]. Některé důležité pojmy jsou zopakovány, aby byl text přístupný většímu okruhu čtenářů.

Důležitá je filosofie výkladu. Existuje řada publikací na téma kuželosečky a zdálo by se, že je velmi jednoduché o kuželosečkách přednášet na vysoké škole. Není to však pravda, alespoň z mého pohledu. Většina učebnic o kuželosečkách jsou vlastně učebnicemi algebry, geometrie bývá velmi málo. V tomto textu jsem se pokusil shrnout své zkušenosti z několikaleté přednášky na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích tak, aby v něm vedle algebry měla místo i geometrie a aby se tyto dvě disciplíny vzájemně doplňovaly. V textu je zařazeno mnoho obrázků, protože geometrie bez obrázků není geometrií.

Úvodní kapitoly pojednávají o jednotlivých kuželosečkách a jejich vlastnostech. Je uvedeno několik definic a konstrukcí kuželoseček. Byla snaha definovat kuželosečky různými způsoby a pokud možno jednotným způsobem. V první části je kladen důraz na geometrii, tedy na řešení úloh syntetickou metodou a na nakreslení objektu. Tyto geometrické vlastnosti jsou v zápětí vystřídány algebraickými vlastnostmi kuželoseček, takže student by měl umět najít rovnici kuželosečky z daných základních prvků, napsat rovnici tečny daným bodem, daným směrem atd. Tento přístup se prolíná celou učebnicí.

Od kapitoly 6, tedy přibližně v jedné polovině, jsou kuželosečky zkoumány jako algebraické křivky druhého stupně. Po zavedení nezbytných pojmů je provedena klasifikace kuželoseček převedením jejich rovnice na kanonický tvar pomocí otočení a posunutí soustavy souřadnic. V dalších kapitolách jsou z algebraického hlediska zkoumány singulární body, asymptotické směry a střed kuželosečky. Dále jsou studovány tečna a její zobecnění polára, sdružené směry a sdružené průměry. V závěru jsou pomocí charakteristické rovnice a vlastních čísel nalezeny hlavní směry kuželosečky a na základě této metody je ukázána klasifikace kuželoseček a převedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar. Tato metoda je použita při klasifikaci kvadratických ploch, které však zde zkoumány nejsou. Během výkladu byl kladen důraz na

skutečnost, že zaváděné pojmy nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Používali jsme hlavně kartézskou soustavu souřadnic, ale někdy i lineární, pokud to povaha věci dovolovala.
Každá kapitola obsahuje kromě výkladu též řadu řešených příkladů. Na konci každé kapitoly jsou cvičení, která obsahují další příklady k samostatné práci. V závěru knížky ve výsledcích je možné si výsledky zkontrolovat.
Kromě tradičního rýsování tužkou s použitím pravítka a kružítka byl během přednášek a cvičení používán též dynamický software Cabri II. Používání tohoto softwaru vyžaduje při konstrukci úlohy stejné znalosti jako klasické rýsování, takže v tomto směru studentům počítač práci nijak neulehčuje. Na druhé straně, rýsování pomocí počítače je velmi vysoké kvality, počítač studenty motivuje, dynamický software umožňuje sestrojením jediného bodu objektu např. bodu elipsy znázornění všech bodů dané množiny, software dovoluje vytváření hypotéz apod.
Poděkování patří recenzentům - paní doc. Ing. L. Vaňatové, CSc. a panu RNDr. J. Horovi, CSc. za pečlivé přečtení rukopisu a cenné rady a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

V Českých Budějovicích 16. června 2004

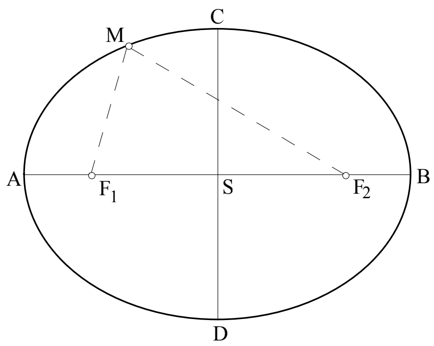
Pavel Pech

1 Elipsa

Základní vlastnosti

Definice

Elipsa je množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní.



Body F_1, F_2 nazýváme *ohniska*[1] elipsy. Spojnice libovolného bodu M elipsy s ohnisky F_1, F_2 nazveme *průvodiče bodu* M. Někdy budeme průvodičem bodu M rozumět vzdálenost $|MF_1|$ popř. $|MF_2|$. Elipsa je potom množina bodů, které mají od dvou daných bodů stálý součet průvodičů . Tento součet budeme značit $2a$, tj. platí

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a.$$

Vzdálenost ohnisek F_1, F_2 značíme $2e$ a nazýváme *ohnisková vzdálenost*. Zřejmě platí $a > e.$ Číslo e se nazývá (*délková*) *výstřednost* elipsy a značí vzdálenost ohnisek elipsy od středu S elipsy. Místo slova výstřednost se též užívá názvu *excentricita*. Číslo a nazýváme *délka hlavní poloosy* elipsy a číslo $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ nazýváme *délka vedlejší poloosy*. Přímka, na níž leží ohniska elipsy F_1, F_2 je *hlavní osa* elipsy. Body A, B na hlavní ose elipsy, které náleží elipse jsou *hlavní vrcholy* elipsy. Pro ně platí $|AS| = |BS| = a$. Přímka jdoucí středem S elipsy, kolmo na hlavní osu o, je *vedlejší osa* elipsy. Body C, D elipsy, ležící zároveň na vedlejší ose, jsou *vedlejší vrcholy* elipsy. Pro vedlejší vrcholy

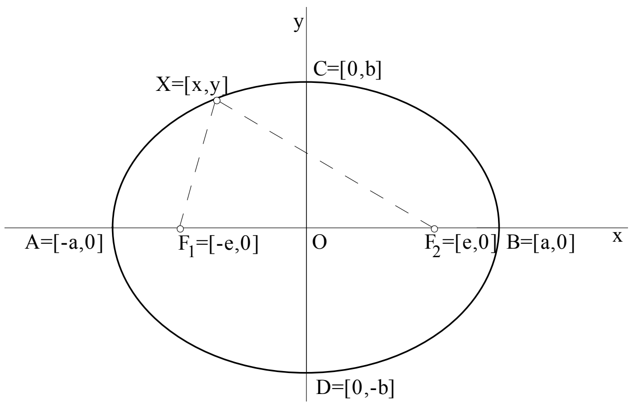
[1] z lat. "focus" = ohnisko

platí $|CS| = |DS| = b$ a $|CF_1| = |CF_2| = |DF_1| = |DF_2| = a$. Pravoúhlý trojúhelník SF_1C nazýváme *charakteristický trojúhelník* elipsy. Jeho strany jsou vázány vztahem $a^2 = b^2 + e^2$.
Všimněme si, že v případě, kdy ohniska splynou v jeden bod, dostaneme kružnici. Potom $e = 0$, tj. kružnice má nulovou excentricitu a platí $a = b$.
V literatuře se často setkáváme s názvem excentricita pro číslo $\varepsilon = e / a$, které budeme pro odlišení nazývat *numerická výstřednost*.
Dále zavedeme pojem vnějších a vnitřních bodů elipsy. Bod X se nazývá *vnější bod* elipsy, jestliže $|F_1X| + |F_2X| > 2a$. Bod X je *vnitřním bodem* elipsy, jestliže $|F_1X| + |F_2X| < 2a$. Rovina je tak elipsou rozdělena na tři části

- na množinu vnitřních bodů elipsy, které tvoří *vnitřek* elipsy (obsahuje ohniska),
- na množinu bodů elipsy,
- na množinu vnějších bodů elipsy, které tvoří *vnějšek* elipsy.

Rovnice elipsy

V této části odvodíme rovnici elipsy. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$.



Nechť $X = [x, y]$ je libovolný bod elipsy. Podle definice platí

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a. \tag{1}$$

Rozepsáním rovnice (1) dostáváme

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

Druhý sčítanec na levé straně převedeme na pravou stranu a rovnici umocníme. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=a^2-xe.$$

Dalším umocněním s využitím vztahu $a^2-e^2=b^2$ dostáváme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Tedy každý bod $X=[x,y]$ elipsy, vyhovující (1), splňuje rovnici (2).

Ukážeme nyní obráceně, že každý bod X o souřadnicích $[x,y]$, který vyhovuje rovnici (2), je bodem elipsy, tj. splňuje vztah (1). Úpravou rovnice (2) dostaneme

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{nebo} \quad y^2=(a^2-e^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Odtud

$$|XF_1|=\sqrt{(x+e)^2+y^2}=\sqrt{\left(a+\frac{e}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{e}{a}x\right|=a+\frac{e}{a}x,$$

neboť z (2) plyne $|x|<a$, z definice elipsy pak $a>e$. Analogicky

$$|XF_2|=\sqrt{(x-e)^2+y^2}=\sqrt{\left(a-\frac{e}{a}x\right)^2}=a-\frac{e}{a}x.$$

Sečtením obou vztahů dostáváme rovnici (1). □

Ukázali jsme, že vztahy (1) a (2) jsou ekvivalentní. Můžeme tedy definovat elipsu také následujícím způsobem:

Definice

Elipsa je množina bodů $X=[x,y]$, které vyhovují v nějaké kartézské soustavě souřadnic rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Rovnice (3) se nazývá *kanonická rovnice elipsy*.

Dále jsme ukázali, že pro průvodiče libovolného bodu $X = [x, y]$ elipsy (3) s ohnisky $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$ platí

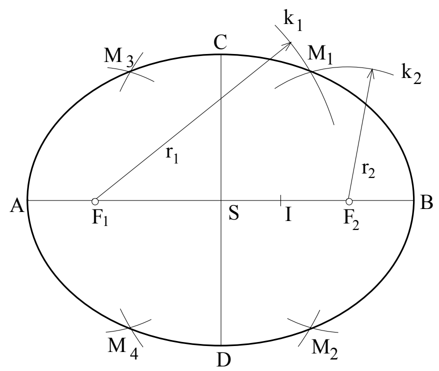
$$|XF_1| = a + \frac{e}{a}x \quad \text{a} \quad |XF_2| = a - \frac{e}{a}x. \tag{4}$$

Poznámka
V případě kružnice je $e = 0$. Označíme-li $r = a = b$, potom má rovnice kružnice o poloměru r se středem v počátku tvar

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Konstrukce elipsy

Jednotlivé body elipsy lze sestrojit následujícím způsobem - tzv. *bodová konstrukce elipsy*. Na úsečce omezené ohnisky F_1, F_2 zvolme pomocný bod I a sestrojme kruhové oblouky k_1, k_2 o poloměrech $r_1 = |AI|$, $r_2 = |BI|$ se středy v ohniscích F_1, F_2.

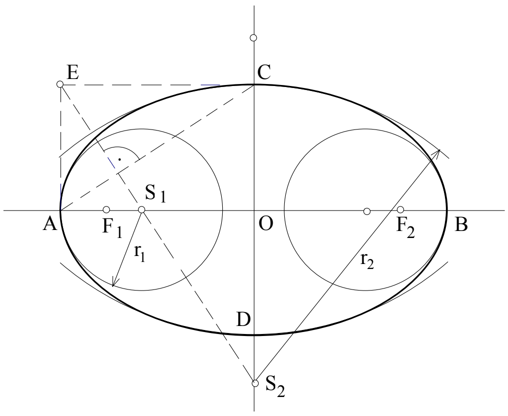


V průsečících dostáváme body M_1, M_2, M_3, M_4 elipsy. Např. pro bod M_1 platí

$$|M_1F_1| + |M_1F_2| = |AI| + |IB| = |AB| = 2a.$$

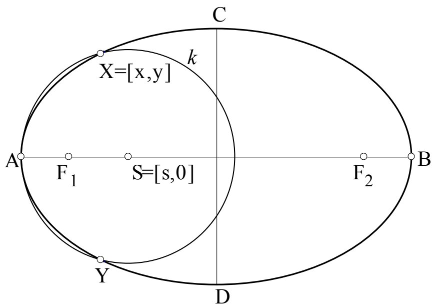
Součet průvodičů bodu M_1 je roven $2a$, tedy bod M_1 náleží elipse s vrcholy A, B.

Při rýsování nahrazujeme elipsu v okolí jejích vrcholů oblouky *oskulačních kružnic*[2]. Tyto kružnice „nejlépe“ ze všech kružnic nahrazují



elipsu, jak se dokazuje v diferenciální geometrii. Ukažme si jejich konstrukci. Body A, O, C doplníme na obdélník $AOCE$ a z vrcholu E spustíme kolmici na úhlopříčku AC. Průsečík této kolmice s hlavní a vedlejší poloosou dává středy S_1 a S_2 příslušných oskulačních kružnic. Oprávněnost této konstrukce možno nahlédnout následujícím způsobem.

Nechť k je libovolná kružnice, mající střed S na hlavní ose elipsy a procházející např. vrcholem A elipsy. Rovnice této kružnice má tvar



$(x-s)^2 + y^2 = (a-s)^2$. Pro průsečík $X = [x, y]$ kružnice k s elipsou o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ platí vztah

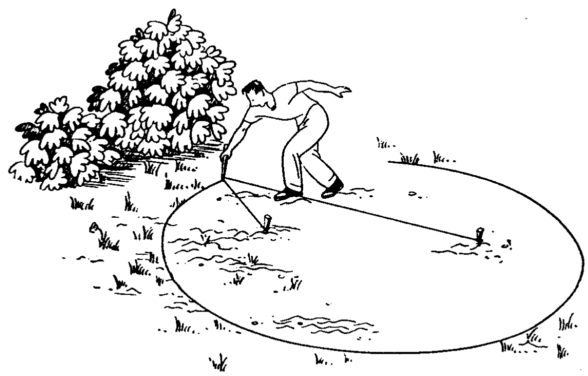
[2] z lat. "osculum" = polibek

$$x^2e^2 - 2a^2sx - a^2(e^2 - 2as) = 0.$$

Kružnice k bude „nejlépe“ nahrazovat elipsu v okolí vrcholu A, jestliže její průsečíky A a X s elipsou splynou.
Tento případ nastane, jestliže má hořejší kvadratická rovnice dvojnásobný kořen, tj. jestliže její diskriminant je roven nule. Diskriminant je roven nule právě když je splněn vztah

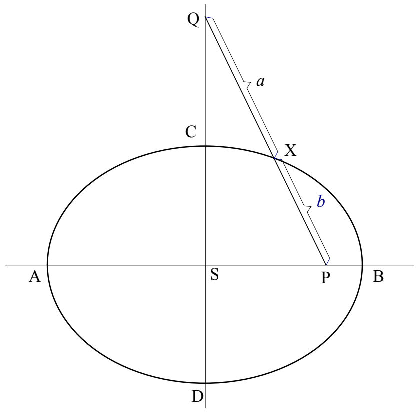
$$\left(as - e^2\right)^2 = 0,$$

tj. když $s = \dfrac{e^2}{a}$. Pro poloměr r_1 takové kružnice platí $r_1 = a - s = \dfrac{b^2}{a}$. Pro poloměr oskulační kružnice ve vedlejších vrcholech elipsy analogicky dostáváme $r_2 = \dfrac{a^2}{b}$. Odtud také plyne uvedená konstrukce středů S_1, S_2 oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy. Platí totiž, že trojúhelníky ES_1A a CAE jsou podobné. Odtud $\dfrac{|S_1A|}{|AE|} = \dfrac{|AE|}{|CE|}$. Oskulační kružnice ve vrcholech elipsy se někdy nazývají *hyperoskulační kružnice*, termín oskulační kružnice je pak vyhrazen pro kružnici, kterou nahrazujeme elipsu v libovolném jejím bodě.
Z definice elipsy plyne další jednoduchá konstrukce, která má příznačný název *zahradnická konstrukce elipsy.*

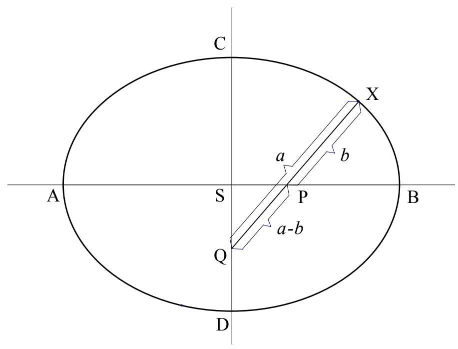


Upevníme-li konce provázku o délce $2a$ v ohniscích F_1, F_2, potom při pohybu hrotu, při kterém zůstává provázek stále napnutý, opisuje hrot elipsu, viz obrázek, který je převzat ze [7].

Jiná konstrukce elipsy je založena na pohybu proužku papíru, odtud její název *proužková konstrukce elipsy*.
Rozeznáváme dvě proužkové konstrukce elipsy - *součtovou* a *rozdílovou*.
Při součtové konstrukci elipsy se po dvou k sobě kolmých přímkách pohybuje svými koncovými body úsečka PQ délky $a+b$. Potom bod X, dělící úsečku PQ v poměru $a:b$ opisuje elipsu o poloosách a,b. Při rozdílové konstrukci se po dvou k sobě kolmých osách pohybuje svými dvěma koncovými body úsečka P,Q délky $a-b$. Naše tvrzení dokážeme např. pro součtovou proužkovou konstrukci.
Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby osy x a y byly v daných kolmých přímkách a předpokládejme, že body P,Q,X, mají v této soustavě souřadnice $P=[p,0]$, $Q=[0,q]$, $X=[x,y]$.



Součtová proužková konstrukce



Rozdílová proužková konstrukce

Podle Pythagorovy věty platí

$$p^2 + q^2 = (a+b)^2. \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků POQ, XX_1Q, PX_2X dále plyne

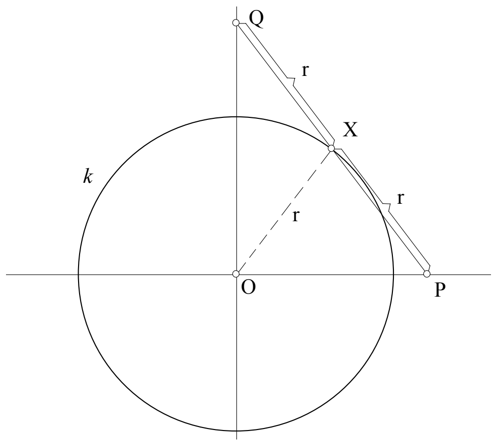
$$\frac{x}{p} = \frac{a}{a+b}, \qquad \frac{y}{q} = \frac{b}{a+b}$$

a odtud

$$p = x\frac{a+b}{a} \qquad \text{a} \qquad q = y\frac{a+b}{b}.$$

Dosazením těchto vztahů do (1) dostáváme rovnici elipsy. Bod X se tedy pohybuje po elipse.
Analogicky se provede důkaz pro rozdílovou proužkovou konstrukci.

Poznámka
Na principu proužkové konstrukce je založen přístroj *elipsograf*, pomocí kterého je možno narýsovat libovolnou elipsu. Jedná se tedy o zobecněné kružítko, neboť umístíme-li např. v součtové konstrukci hrot X do středu



úsečky, jejíž krajní body P, Q se pohybují po dvou k sobě kolmých přímkách, dostaneme kružnici.

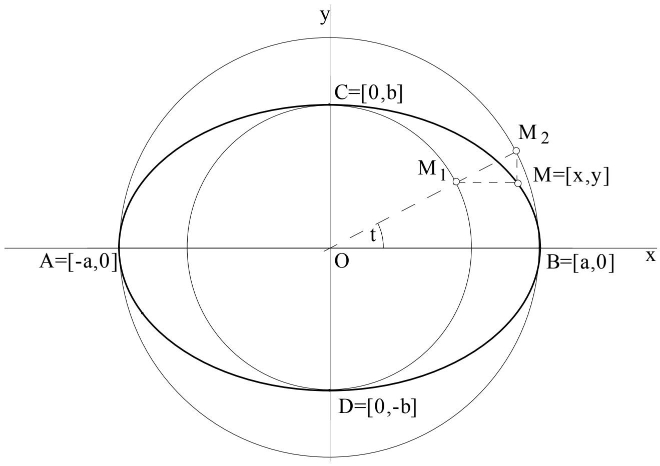
Tento speciální případ lze dokázat též přímo. V pravoúhlém trojúhelníku POQ je bod X středem přepony PQ. Potom z Thaletovy věty plyne, že délka těžnice OX je rovna polovině přepony, tedy je konstantní. Tímto způsobem je řešeno např. zavírání a otvírání dveří ve vozidlech městské hromadné dopravy.

Další konstrukce, tzv. *trojúhelníková konstrukce* elipsy o poloosách a, b, je následující. Nad úsečkami AB a CD sestrojíme po řadě dvě soustředné kružnice, tzv. *hlavní vrcholovou kružnici* a *vedlejší vrcholovou kružnici.* Polopřímka p vedená středem elipsy protíná kružnice v bodech M_1 a M_2. Potom se rovnoběžka s hlavní osou elipsy, vedená bodem M_1, a rovnoběžka s vedlejší osu elipsy, vedená bodem M_2, protínají v bodě M elipsy. Označíme-li totiž t úhel, který svírá polopřímka p s kladnou částí osy x, potom pro souřadnice x, y bodu M v dané soustavě souřadnic platí

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t, \tag{2}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi)$. Často píšeme $[x, y] = [a\cos t, b\sin t]$.

Dosadíme-li vztahy (2) do rovnice elipsy, dostaneme identitu. To znamená, že takto vytvořený bod M náleží elipse.



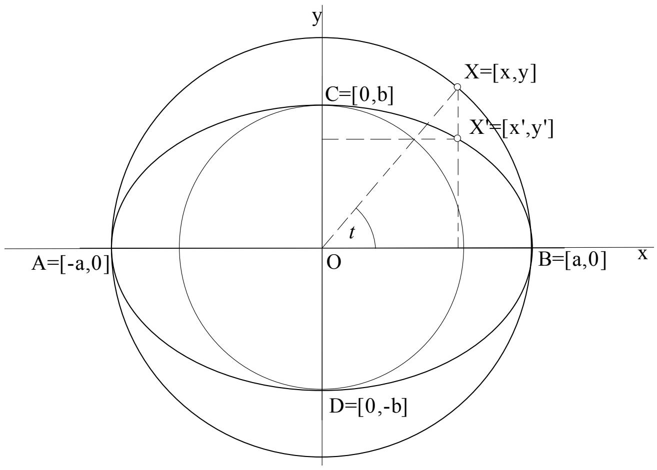
Rovnice (2) nazýváme *parametrické rovnice* elipsy.

Afinní obraz kružnice

Podle trojúhelníkové konstrukce ke každému reálnému číslu $t \in \langle 0, 2\pi)$ existuje jediný bod elipsy $X(t) = [a\cos t, b\sin t]$. Podobně můžeme libovolnému bodu $X = [x, y]$ kružnice přiřadit bod $X' = [x', y']$ elipsy, ležícímu na rovnoběžce s osou y. Oba body X a X' mají stejné x-ové souřadnice, pro y-ové souřadnice platí $y = a\sin t$, $y' = b\sin t$. Odtud máme $y' = \frac{b}{a}y$, obr. Toto zobrazení přiřazuje bodu $X = [x, y]$ bod $X' = [x', y']$ tak, že platí

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \frac{b}{a}\,y. \end{aligned} \tag{1}$$

Zobrazení dané rovnicemi (1) nazýváme *pravoúhlá afinita* . Osa x je *osa afinity*. Ze vztahu (1) vidíme, že tato přímka je jediná množina *samodružných bodů*, tj. bodů, které se zobrazují samy na sebe. Směr daný dvojicí sobě odpovídajících bodů X, X' je *směr afinity*, který je v případě pravoúhlé afinity kolmý na osu afinity. Pravoúhlá afinita (1) zobrazí

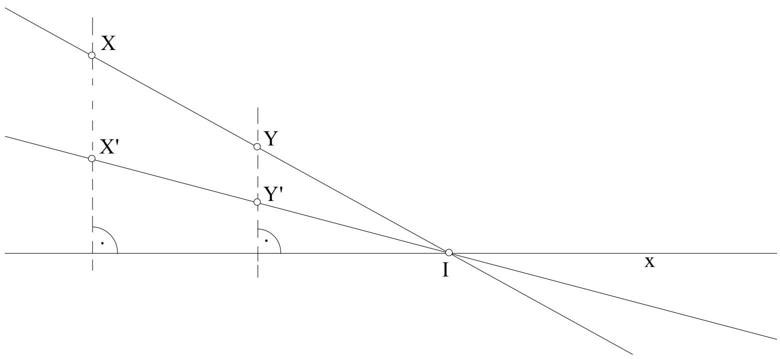


kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = a^2$ na křivku o rovnici $x'^2 + \left(\frac{a}{b}y'\right)^2 = a^2$,

což je rovnice elipsy $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Dokázali jsme větu:

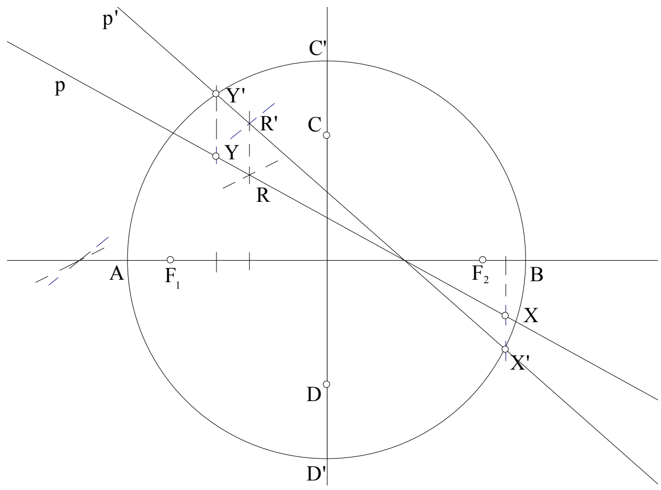
Věta
Obrazem kružnice v pravoúhlé afinitě (1) je elipsa.

Snadno se ukáže, že pravoúhlá afinita je určena osou afinity x a párem



odpovídajících bodů X, X', kde $XX' \perp x$. Je-li Y libovolný bod roviny, určíme jeho obraz následovně. Sestrojíme přímku XY a její průnik I s osou afinity. Bod Y' leží v průniku přímky $X'I$ a kolmice na osu afinity bodem Y, obr.

Pravoúhlé afinity můžeme využít při konstrukci průsečíků elipsy a přímky p. Předpokládejme, že elipsa je dána např. vrcholy A, B a ohnisky F_1, F_2. Sestrojíme hlavní vrcholovou kružnici v. Vedlejšímu vrcholu C odpovídá bod C' na hlavní kružnici. Máme tedy pár odpovídajících bodů, osou afinity je hlavní osa elipsy. Přímce p odpovídá přímka p', která prochází průsečíkem přímky p s osou afinity a bodem R', který je obrazem libovolně zvoleného bodu R přímky p, a který je sestrojen podle předchozí konstrukce. Průsečíkům X', Y' přímky p' s kružnicí v odpovídají hledané průsečíky X, Y přímky p s elipsou.



Tečna elipsy

Předpokládejme, že bod $M = [m, n]$ je bod elipsy o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Bodem M veďme libovolnou přímku r, jejíž parametrické rovnice jsou

$$r: \quad x = m + ut, \quad y = n + vt, \tag{2}$$

kde t je parametr a $\boldsymbol{u} = (u, v)$ je směrový vektor přímky r.
Budeme hledat společné body elipsy a přímky r. Dosaďme proto rovnice (2) do (1). Dostáváme rovnici pro neznámou t tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{3}$$

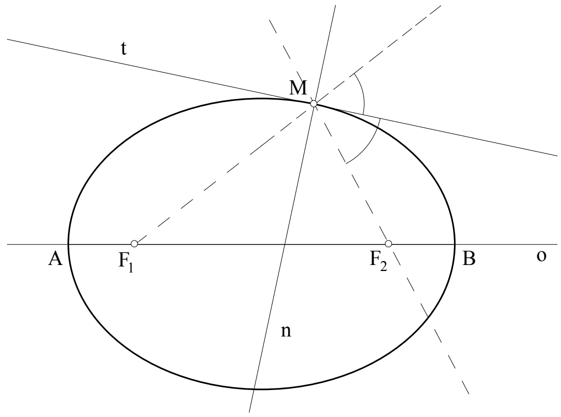
kde

$$\begin{aligned} A &= a^2v^2 + b^2u^2, \\ B &= vna^2 + umb^2, \\ C &= b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Rovnice (3) je kvadratická, ze (4) totiž plyne, že $A \neq 0$. Protože bod M náleží elipse, je zřejmě $C = 0$. Rovnice (3) se potom redukuje na tvar

$$At^2 + 2Bt = 0. \tag{5}$$

Jeden kořen této rovnice je nula. Tento kořen vede, po dosazení do rovnice (2), k průsečíku M přímky r a elipsy. Bod M bude dvojnásobným průsečíkem přímky r a elipsy, jestliže nula bude dvojnásobným kořenem rovnice $t(At + 2B) = 0$, tj. jestliže $B = 0$. Ze



vztahu $0 = B = vna^2 + umb^2$ dostaneme např. volbou $u = na^2$, $v = -mb^2$ souřadnice u, v směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ přímky r. Zřejmě je takto zvolený vektor $\boldsymbol{u}$ vždy nenulový a přímka r v každém bodě elipsy existuje.

Definice
Nechť M je libovolný bod elipsy. Přímka, procházející bodem M, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s elipsou, se nazývá *tečna elipsy s dotykovým bodem* M . Přímka, procházející bodem M, která je kolmá na tečnu se nazývá *normála v bodě M.*

Nyní odvodíme rovnici tečny elipsy s bodem dotyku $M = [m, n]$. Přímka r má parametrické rovnice

$$r: \quad x = m + na^2 t, \\ y = n - mb^2 t.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr t, má obecná rovnice přímky r tvar

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1. \tag{6}$$

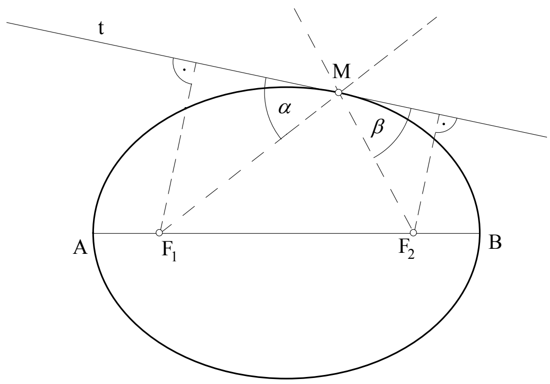
Rovnice (6) je *rovnice tečny elipsy* (1) s bodem dotyku $M = [m, n]$.

Poznámka
Pro lepší zapamatování rovnice tečny elipsy je užitečné všimnout si podoby rovnice tečny elipsy (6) s rovnicí elipsy (1).

V další části uvedeme jednu velmi důležitou vlastnost tečny elipsy, která nám umožní sestrojení tečny elipsy v libovolném jejím bodě. Nejprve zavedeme další potřebný pojem.
Průvodiče bodu M elipsy, tj. spojnice bodu M s ohnisky F_1, F_2, dělí rovinu na dvě dvojice vrcholových úhlů. Té dvojici vrcholových úhlů, která obsahuje střed elipsy S, říkáme *vnitřní úhly průvodičů* bodu M. Dvojice vrcholových úhlů, která neobsahuje střed elipsy, tvoří *vnější úhly průvodičů* bodu M. A nyní již ke zmíněné vlastnosti tečny elipsy.

Věta
Tečna elipsy půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.

Důkaz: Soustavu souřadnic zvolme tak, aby daná elipsa měla rovnici (1). Pro ohniska F_1, F_2 pak je $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ a pro bod M elipsy nechť je $M=[m,n]$. Rovnice tečny v bodě M je dána vztahem (6). Stačí ukázat, že průvodiče F_1M a F_2M svírají s tečnou t stejný úhel.



Ukážeme, že $\sin\alpha=\sin\beta$. Pro vzdálenost $|F_1t|$ ohniska F_1 od tečny t platí podle (6) $|F_1t|=\dfrac{\left|\dfrac{-em}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{m^2}{a^4}+\dfrac{n^2}{b^4}}}=\dfrac{\varepsilon m+a}{ka}$, kde jsme označili $\varepsilon=\dfrac{e}{a}$, $k=\sqrt{\dfrac{m^2}{a^4}+\dfrac{n^2}{b^4}}$. Pro vzdálenost $|F_1M|$ ohniska F_1 od bodu dotyku M je podle (4) z kapitoly "Rovnice elipsy "

$|F_1M|=a+\varepsilon m$ a $\sin\alpha=\dfrac{|F_1t|}{|F_1M|}=\dfrac{1}{ka}$. Pro druhý úhel β analogicky dostaneme $|F_2t|=\dfrac{\left|\dfrac{em}{a^2}-1\right|}{k}=\dfrac{a-\varepsilon m}{ka}$ a $|F_2M|=a-\varepsilon m$. Tedy $\sin\beta=\dfrac{|F_2t|}{|F_2M|}=\dfrac{1}{ka}$. Odtud $\sin\alpha=\sin\beta$ a $\alpha=\beta$. □

Poznámka

Této vlastnosti tečny by bylo využívat např. v medicínské praxi. Necháme-li rotovat elipsu kolem hlavní osy, vznikne plocha zvaná *rotační elipsoid*. Představte si komoru tvaru rotačního elipsoidu a umístěme do jednoho ohniska nemocný orgán pacienta, který ozařujeme látkou, umístěnou ve druhém ohnisku. Vyzařované paprsky se odrážejí od stěn elipsoidu do jediného bodu, do druhého ohniska. Paprsek jdoucí např. z ohniska F_1 se odrazí od stěny elipsoidu podle fyzikálního zákona „úhel odrazu se rovná úhlu dopadu“, přičemž plochu nahrazujeme v blízkosti bodu dopadu tečnou rovinou plochy, čili v řezu tečnou elipsy. Elipsu tak můžeme chápat jako „usměrňovač paprsků“ do jednoho bodu.

Pro tečnu elipsy dále platí následující věta, které se též někdy používá jako definice tečny.

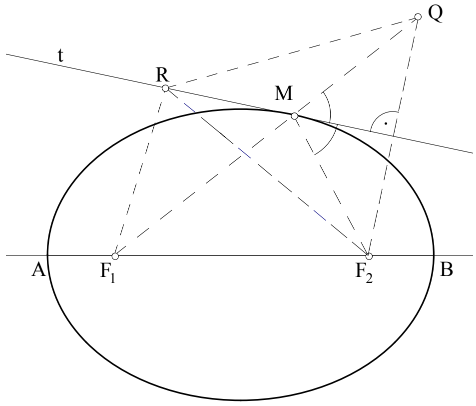
Věta
Tečna elipsy je přímka, která má s elipsou jediný společný bod, jejíž všechny ostatní body jsou vnější.

Důkaz: Dokážeme, že přímka, která půlí úhel průvodičů bodu M elipsy má, kromě bodu dotyku M, všechny ostatní body vnější.
Nechť R je libovolný bod tečny t, různý od bodu M. Pro průvodiče bodu R je

$$|F_1R| + |F_2R| = |F_1R| + |QR| > |F_1Q| = |F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

a odtud

$$|F_1R| + |F_2R| > 2a.$$



Tedy bod R je bodem vnějším. □

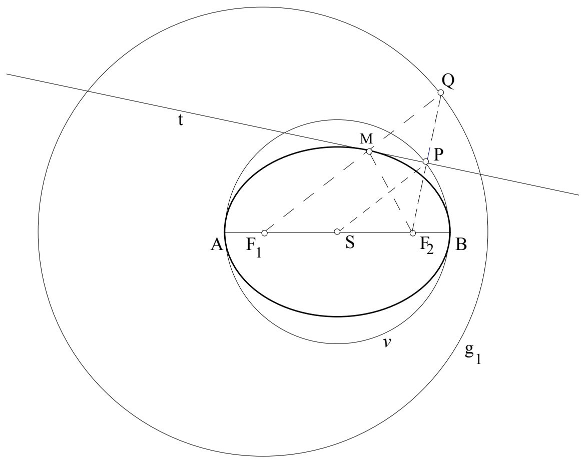
Ohniskové vlastnosti elipsy

Dále vyslovíme a dokážeme dvě věty, kterých se často užívá ke konstrukci elipsy z daných prvků.

Věta
Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že bod Q má vlastnost z věty, tj. je souměrný např. s ohniskem F_2 podle tečny t. Protože tečna půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku M, je

$$|F_1Q|=|F_1M|+|MQ|=|F_1M|+|MF_2|=2a,$$



odtud plyne, že bod M leží na kružnici $g_1=(F_1,2a)$.
Nechť obráceně bod Q je libovolný bod kružnice g_1. Označme t osu úsečky F_2Q a sestrojme průsečík M přímek t a F_1Q. Bod M zřejmě vždy existuje, neboť kdyby byly přímky t a F_1Q rovnoběžné, potom bude přímka F_2Q kolmá na F_1Q a trojúhelník F_1F_2Q bude pravoúhlý. Odtud $|F_1Q|<|F_1F_2|<2a$ a to je spor. Pro průsečík M platí

$|F_1M|+|F_2M|=|F_1M|+|MQ|=|F_1Q|=2a$, tj. bod M náleží elipse. Přímka t prochází bodem M a je osou úhlu QMF_2, tedy je tečnou, podle níž je bod Q souměrný s ohniskem F_2. □

Poznámka
Kružnice $g_1=(F_1,2a)$, $g_2=(F_2,2a)$ se nazývají *řídící kružnice* elipsy.

V další větě budeme zkoumat paty kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na tečny.

Věta
Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy o poloměru a.

Důkaz: Nechť bod P je pata kolmice spuštěné např. z ohniska F_2 na tečnu t, obr. Jelikož tečna t je osou úhlu QMF_2, je bod P středem úsečky QF_2 a střed elipsy S je středem úsečky F_1F_2. Úsečka SP je proto v trojúhelníku F_1F_2Q střední příčkou a $|SP|=\frac{1}{2}|F_1Q|=a$. Bod P tedy náleží kružnici $v=(S,a)$.
Obráceně se obdobným způsobem jako v předchozí větě ukáže, že libovolný bod P kružnice $v=(S,a)$ je patou kolmice spuštěné z ohniska na nějakou tečnu elipsy. □

Poznámka
1) Kružnice $v=(S,a)$ se nazývá (*hlavní*) *vrcholová kružnice* elipsy.
2) Množina pat kolmic spuštěných z pevného bodu-pólu P na tečny křivky se nazývá *úpatnice* dané křivky vzhledem k pólu P. Úpatnicí elipsy s pólem v jednom ohnisku elipsy je tedy podle poslední věty vrcholová kružnice elipsy v.

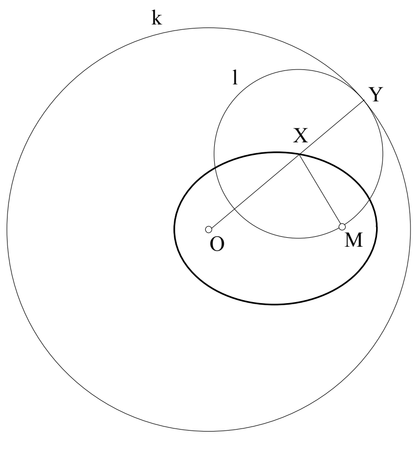
Příklad
Je dána kružnice k a uvnitř kružnice pevný bod *M*. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí daným bodem *M*.

Řešení: Označme $k=(O,r)$. Nechť kružnice l je libovolná kružnice splňující podmínky úlohy, obr. Označme X její střed a nechť Y je bod dotyku kružnic k a l. Jak známo, body O,X,Y leží na jedné přímce a platí

$$|OX|+|XM|=|OX|+|XY|=|OY|=r.$$

Tedy součet vzdáleností bodu X od dvou daných pevných bodů O,M je konstantní a bod X náleží elipse s ohnisky v bodech O,M, jejíž délka hlavní poloosy je $\frac{r}{2}$.

Obráceně, je-li bod X libovolný bod uvedené elipsy, potom je $r=|OX|+|XM|=|OX|+|XY|$ a odtud $|XM|=|XY|$. Bod X je tedy středem kružnice, která se dotýká dané kružnice k a prochází daným bodem M.



Závěr: Hledanou množinou bodů je elipsa s ohnisky ve středu O kružnice k a v bodě M, jejíž délka hlavní poloosy je rovna $\frac{r}{2}$. □

V poslední úloze jsme vlastně řešili úlohu určit elipsu, známe-li její řídící kružnici a obě ohniska, z nichž jedno je ve středu řídící kružnice.

Cvičení

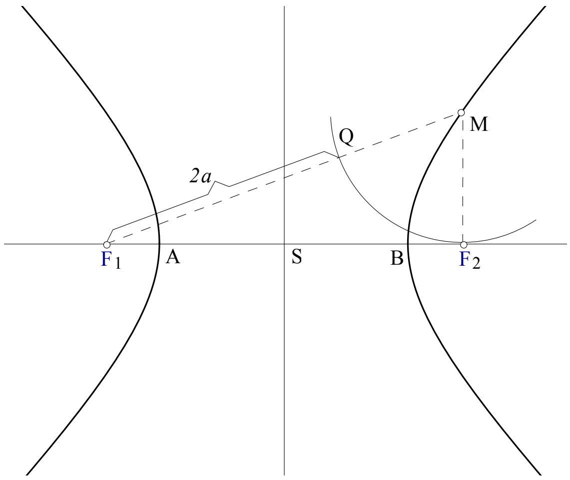
1. Sestrojte elipsu, jsou-li dány hlavní vrcholy A, B a bod M elipsy.
2. Z bodu R veďte tečny k elipse.
3. K elipse veďte tečny daným směrem s.
4. Do trojúhelníku PQR vepište elipsu tak, aby daný bod F_1 byl jejím ohniskem.
5. Sestrojte elipsu, je-li dáno:
   a) hlavní vrchol A, vedlejší vrchol C, délka hlavní poloosy a,
   b) hlavní vrchol A, vedlejší vrchol C, délka vedlejší poloosy b,
   c) ohniska F_1, F_2, bod M elipsy,
   d) ohnisko F_1, vedlejší vrchol C, délka vedlejší poloosy b,
   e) ohnisko F_1, vedlejší vrchol C, excentricita e,
   f) hlavní vrchol A, ohnisko F_1, délka vedlejší poloosy b,
   g) hlavní vrcholy A, B, tečna t,
   h) ohniska F_1, F_2, tečna t,
   i) ohnisko F_1, bod M elipsy, délka vedlejší poloosy b, excentricita e,
   j) ohnisko F_1, tečny t_1, t_2, délka hlavní poloosy a,
   k) ohnisko F_1, tečna t s bodem dotyku T, délka hlavní poloosy a,
   l) ohnisko F_1, bod M elipsy, tečna t, délka vedlejší poloosy a,
   m) ohnisko F_1, body M_1, M_2 elipsy, délka hlavní poloosy a,
   n) ohnisko F_1, tečny t_1, t_2, bod V vedlejší osy.
6. Napište rovnici kružnice, která se dotýká os souřadnic a prochází bodem $M = [-8, 1]$.
7. Je dán trojúhelník ABC svými vrcholy $A = [4, -1]$, $B = [-1, -1]$, $C = [1, 3]$. Napište rovnici kružnice trojúhelníku opsané.
8. Napište rovnici kružnice vepsané trojúhelníku $A = [2, -3]$, $B = [16, 15/2]$, $C = [-2, 0]$.

2 Hyperbola

Základní vlastnosti

Definice

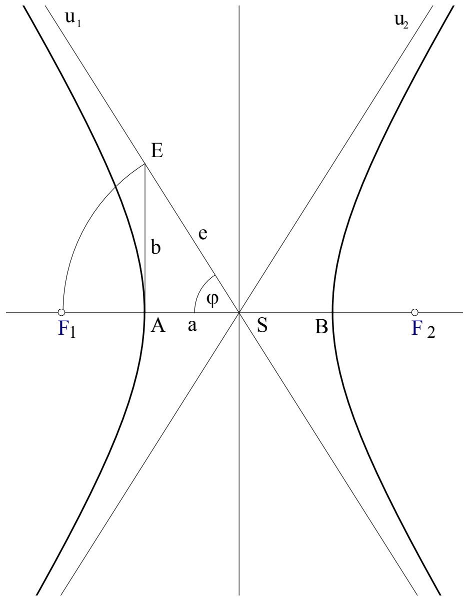
Hyperbola je množina bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní.



Body F_1, F_2 nazýváme *ohniska* hyperboly. Konstantní rozdíl vzdáleností budeme značit $2a$. Spojnice libovolného bodu M hyperboly s ohnisky F_1, F_2 jsou *průvodiče* bodu M. Můžeme též říci, že hyperbola je množina bodů, které mají od dvou daných bodů stálý rozdíl průvodičů, tj.

$$\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a .$$

Vzdálenost ohnisek F_1, F_2 značíme $2e$ a nazýváme ji *ohnisková vzdálenost*. Podle definice platí $a < e$. Číslo e se nazývá *délková výstřednost* (*excentricita*) hyperboly a vyjadřuje vzdálenost ohnisek hyperboly od *středu* S hyperboly. Číslo a nazýváme *délka hlavní poloosy* hyperboly a číslo $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ nazýváme *délka vedlejší poloosy*. Přímka, na níž leží ohniska F_1, F_2 je *hlavní osa* hyperboly. Body A, B hyperboly ležící na hlavní ose jsou (*hlavní*) *vrcholy* hyperboly. Pro body A, B platí $|AS| = |BS| = a$. Přímka jdoucí středem S kolmo k hlavní ose je *vedlejší osa* hyperboly. Z definice je zřejmé, že vedlejší osa žádné body hyperboly neobsahuje (rozdíl průvodičů bodů na vedlejší ose je roven nule). Hyperbola se skládá ze dvou disjunktních částí, které nazýváme *větve* hyperboly. Pro body M na jedné větvi je $|MF_1| - |MF_2| = 2a$, zatímco pro body druhé větve hyperboly máme $|MF_2| - |MF_1| = 2a$.



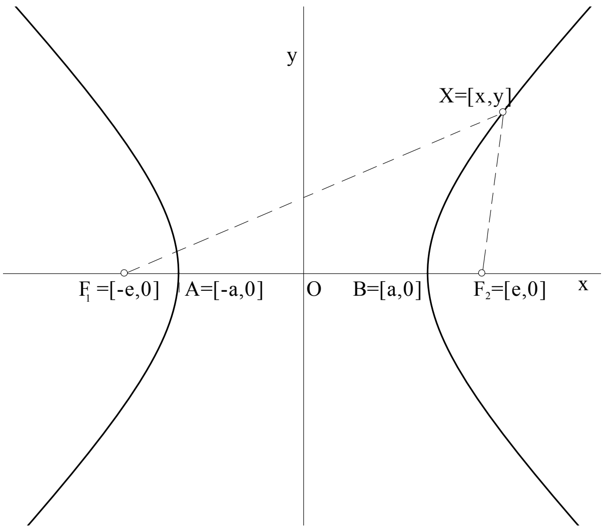
Číslo $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ se nazývá *numerická výstřednost*. Numerická výstřednost hyperboly je vždy větší než jedna, neboť $e > a$.
Pro určení tvaru hyperboly jsou velmi užitečné *asymptoty* u_1, u_2 hyperboly. Jsou to přímky jdoucí středem hyperboly S svírající s hlavní osou úhel φ, pro který platí $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.
Bod X se nazývá *vnější bod* hyperboly, platí-li $\left\| F_1X \right| - \left| F_2X \right\| < 2a$. Bod X se nazývá *vnitřní bod* hyperboly, platí-li $\left\| F_1X \right| - \left| F_2X \right\| > 2a$.
Hyperbola tak dělí rovinu na

- *vnějšek* hyperboly, který je tvořen vnějšími body,
- na body hyperboly
- a *vnitřek* hyperboly (obsahuje ohniska), který je tvořen vnitřními body hyperboly.

V případě, že $e = a\sqrt{2}$, potom $a = b$ a hyperbola se nazývá *rovnoosá*. Asymptoty rovnoosé hyperboly jsou, jak snadno nahlédneme, vzájemně kolmé.

Rovnice hyperboly

Nyní odvodíme rovnici hyperboly. Předpokládejme, že hyperbola je dána ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní poloosy a. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby platilo $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$.



Dále předpokládejme, že $X = [x, y]$ je libovolný bod hyperboly. Podle definice hyperboly platí

$$\left| |XF_1| - |XF_2| \right| = 2a. \qquad (1)$$

Rozepsáním rovnice (1) dostáváme

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Rovnici povýšíme na druhou

$$x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)}\,.$$

Po dalším umocnění a úpravě dostaneme

$$a^4 + x^2e^2 - x^2a^2 - e^2a^2 - y^2a^2 = 0.$$

S následným užitím vztahu $b^2 = e^2 - a^2$ získáme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Obráceně, předpokládejme, že bod $X = [x, y]$ vyhovuje vztahu (2). Chceme ukázat, že potom bod X náleží hyperbole o poloosách a, b, tj. že platí (1). Je

$$|F_1X| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad |F_2X| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Vyjádříme-li y^2 ze vztahu (2), po krátké úpravě máme

$$\begin{aligned} |XF_1| &= \sqrt{\left(\frac{e}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x + a\right| = \frac{e}{a}x + a, \quad &&\text{pro } x > a, \\ &= \sqrt{\left(\frac{e}{a}x + a\right)^2} = -\frac{e}{a}x - a, &&\text{pro } x < -a, \end{aligned} \tag{3}$$

a

$$\begin{aligned} |XF_2| &= \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x - a\right| = \frac{e}{a}x - a, \quad &&\text{pro } x > a, \\ &= \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = -\frac{e}{a}x + a, &&\text{pro } x < -a. \end{aligned} \tag{4}$$

Využili jsme při tom nerovnosti $|x| \geq a$, která plyne z (2), a nerovnosti $e > a$ z definice hyperboly. Odečtením (4) od (3) dostaneme vztah (1). Tedy bod X náleží hyperbole.
Rovnice (2) je *kanonická rovnice hyperboly*.
Z našich úvah vyplývá i tato možnost definice hyperboly:

Definice
Hyperbola je množina bodů $X = [x, y]$ v rovině, které v nějaké kartézské soustavě souřadnic vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Odvodíme ještě parametrické rovnice hyperboly.

Nechť pro souřadnice bodu $X = [x, y]$ platí

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \tan t, \tag{5}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi)$, $t \neq \frac{\pi}{2}$, $t \neq \frac{3\pi}{2}$. Je zřejmé, že vztahy (5) vyhovují rovnici hyperboly (2). Rovnice (5) nazýváme *parametrické rovnice hyperboly*.

Uvedeme ještě jiné, často užívané parametrické rovnice hyperboly, využívající vlastností funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus. Jak známo, pro hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus platí vztah

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \text{ pro všechna reálná } t.$$

Připomeňme, že

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pro bod $X = [x, y]$ roviny, položme

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t, \tag{6}$$

kde parametr t je libovolné reálné číslo. Dosadíme-li rovnice (6) do kanonické rovnice hyperboly (2), dostaneme identitu. Rovnice (6) jsou parametrické rovnice hyperboly.

Asymptoty hyperboly o poloosách a, b dostaneme z rovnice (2), položíme-li na pravou stranu nulu, tj.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{7}$$

Rozepsáním (7) máme

$$(bx - ay)(bx + ay) = 0,$$

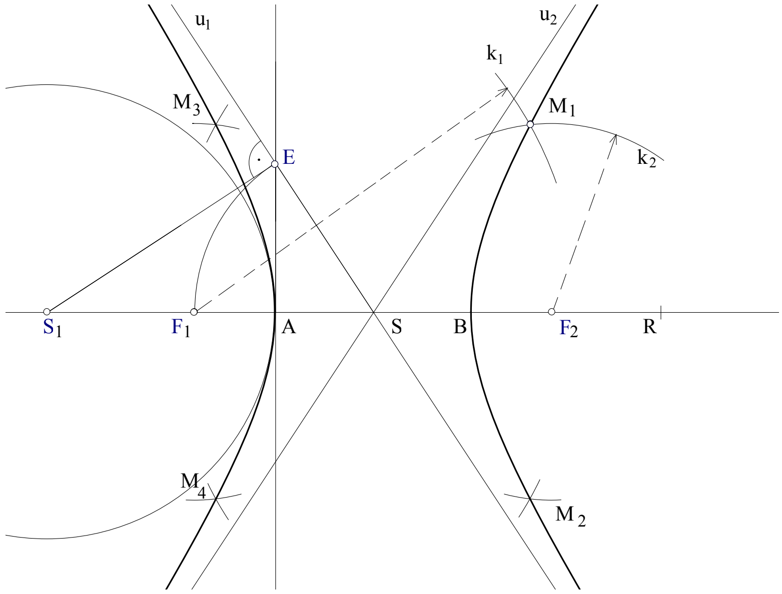
a odtud pro rovnice asymptot u_1, u_2 dostaneme

$$u_1: \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

$$u_2: \quad y = \frac{b}{a}x.$$

Konstrukce hyperboly

Jednotlivé body hyperboly můžeme snadno sestrojit následujícím způsobem, tzv. *bodová konstrukce hyperboly*. Zvolme na polopřímce opačné k F_2F_1 libovolný bod R a z ohnisek F_1, F_2 opišme kruhové oblouky k_1, k_2 o poloměrech $|AR|$, $|BR|$. Průsečíky kruhových oblouků



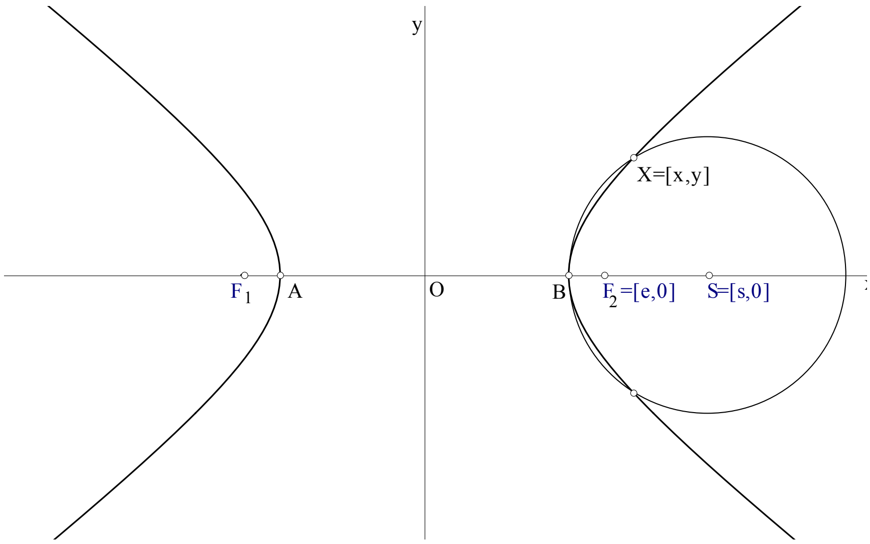
k_1, k_2 dávají body M_1, M_2, M_3, M_4 hyperboly.

Při konstrukci se hyperbola nahrazuje v okolí vrcholů, obdobně jako v případě elipsy, oblouky *oskulačních kružnic*. Konstrukci oskulační kružnice popíšeme. V hlavním vrcholu A vztyčíme kolmici a jejím průsečíkem E s asymptotou vedeme kolmici k této asymptotě. Průsečík této kolmice s hlavní osou dává střed S_1 oskulační kružnice.

Oprávněnost této konstrukce lze vidět z následující úvahy. Nechť k je libovolná kružnice mající střed S na hlavní ose hyperboly a procházející např. vrcholem B hyperboly. Rovnice této kružnice má tvar $(x-s)^2 + y^2 = (s-a)^2$. Pro průsečík $X = [x, y]$ kružnice k s hyperbolou o rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ platí vztah

$$x^2 e^2 - 2a^2 sx - a^2(e^2 - 2as) = 0.$$

Kružnice k bude „nejlépe“ nahrazovat hyperbolu v okolí vrcholu B, jestliže její průsečíky B a X s hyperbolou splynou. Tento případ nastane, jestliže má hořejší kvadratická rovnice dvojnásobný kořen, tj.



jestliže její diskriminant je roven nule. Diskriminant je roven nule právě když je splněn vztah

$$\left(as - e^2\right)^2 = 0,$$

nebo také $s = \dfrac{e^2}{a}$. Pro poloměr ρ takové kružnice je $\rho = s - a = \dfrac{b^2}{a}$. Odtud také plyne uvedená konstrukce středu oskulační kružnice ve vrcholech hyperboly. Platí totiž, že trojúhelníky SAE a EAS_1 jsou podobné, tedy $\dfrac{|S_1A|}{|AE|} = \dfrac{|AE|}{|AS|}$.

Tečna hyperboly

Nechť $M = [m, n]$ je libovolný bod hyperboly a nechť r je libovolná přímka určená bodem M a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v)$. Předpokládejme, že hyperbola je dána kanonickou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Rovnice přímky r jsou

$$r: \quad \begin{aligned} x &= m + tu, \\ y &= n + tv. \end{aligned} \qquad (2)$$

Hledejme společné body přímky r a hyperboly. Dosazením rovnic (2) do (1) získáme rovnici tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \qquad (3)$$

kde pro koeficienty A, B, C platí

$$\begin{aligned} A &= b^2u^2 - a^2v^2, \\ B &= b^2um - a^2vn, \\ C &= b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2. \end{aligned} \qquad (4)$$

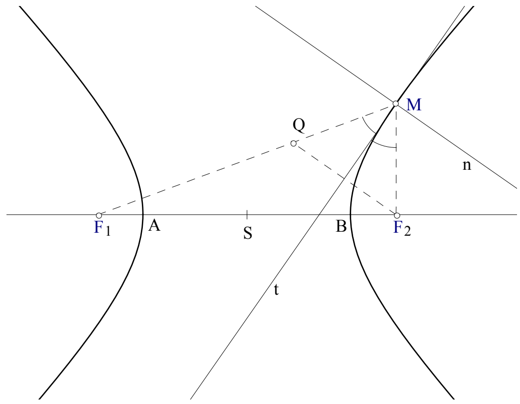
Zřejmě je $C = 0,$ neboť bod M náleží hyperbole. Rovnice (3) se potom redukuje na tvar

$$At^2 + 2Bt = 0. \qquad (5)$$

Tato rovnice je kvadratická pro $A \neq 0$, tj. pro $\boldsymbol{u} \neq (a, b)$ nebo $\boldsymbol{u} \neq (a, -b)$, jak plyne ze (4). Zvolme směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky r tak, aby $\boldsymbol{u} \neq (a, b)$ a $\boldsymbol{u} \neq (a, -b)$. Potom rovnice (3) má dvojnásobný kořen právě když nula vyhovuje rovnici $At + 2B = 0,$ tj. jestliže $B = 0.$ Ze vztahu $0 = B = b^2um - a^2vn$ vypočteme souřadnice směrového vektoru $\boldsymbol{u} = (u, v)$ přímky $r,$ která má s hyperbolou dvojnásobný průsečík $M = [m, n]$. Stačí volit např. $u = a^2n, \ \ v = b^2m.$ Takto zvolený vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$ je zřejmě pro jakoukoliv volbu bodu M hyperboly nenulový a taková přímka tedy v každém bodě hyperboly existuje.

Definice

Nechť M je libovolný bod hyperboly. Přímka procházející bodem M, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s hyperbolou, se nazývá *tečna hyperboly s dotykovým bodem* M. Přímka procházející bodem M, která je kolmá na tečnu se nazývá *normála v bodě* M.



Nyní odvodíme rovnici tečny hyperboly s bodem dotyku $M=[m,n]$. Přímka r má parametrické rovnice

$$r:\quad x = m + na^2 t,$$
$$y = n + mb^2 t.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr t, má (vzhledem k tomu, že v rovnici (4) je $C=0$) obecná rovnice přímky r tvar

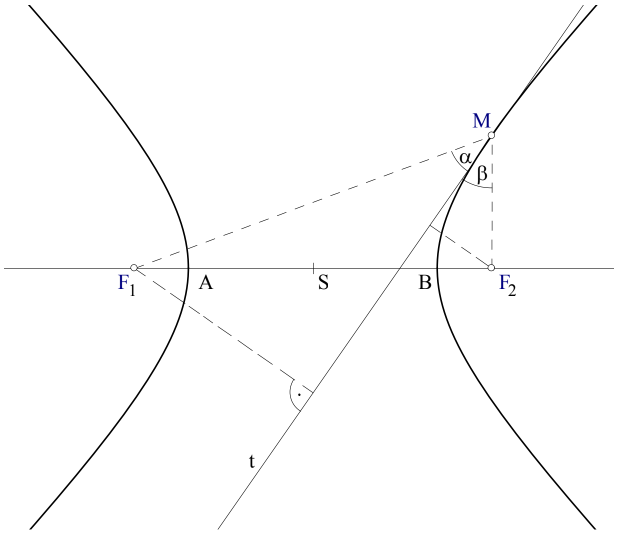
$$r:\quad \frac{xm}{a^2} - \frac{ym}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Rovnice (6) je *rovnice tečny hyperboly* (1) s bodem dotyku $M=[m,n]$.

Poznámka
Pro lepší zapamatování rovnice tečny hyperboly je užitečné si všimnout podoby rovnice tečny (6) s rovnicí hyperboly (1).

V další části uvedeme důležitou vlastnost tečny hyperboly, která nám umožní sestrojení tečny hyperboly v libovolném jejím bodě. Nejprve zavedeme další potřebný pojem.
Průvodiče bodu M hyperboly, tj. spojnice bodu M s ohnisky F_1, F_2, dělí rovinu na dvě dvojice vrcholových úhlů. Té dvojici vrcholových úhlů, která obsahuje střed hyperboly, říkáme *vnější úhly průvodičů* bodu M. Dvojice vrcholových úhlů neobsahující střed tvoří *vnitřní úhly průvodičů* bodu M. A nyní již ke zmíněné vlastnosti tečny hyperboly.

Věta
Tečna hyperboly půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.



Důkaz: Tvrzení dokážeme analytickou metodou. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby daná elipsa měla rovnici (1). Pro ohniska F_1, F_2 pak je $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ a pro bod M elipsy nechť je $M = [x_0, y_0]$. Rovnice tečny t v bodě M je dána vztahem (6). Ukážeme, že průvodiče F_1M a F_2M svírají s tečnou t stejný úhel. Stačí ukázat, že $\sin\alpha = \sin\beta$. Pro vzdálenost $|F_1 t|$ ohniska F_1 od tečny t platí

$$|F_1 t| = \frac{\left|\frac{-ex_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{ka},$$ kde jsme označili $k = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$,

$\varepsilon = \frac{e}{a}$. Pro vzdálenost $|F_1M|$ ohniska F_1 od bodu dotyku M je podle (3) z kapitoly "Rovnice hyperboly" $|F_1M| = |\varepsilon x_0 + a|$ a vychází

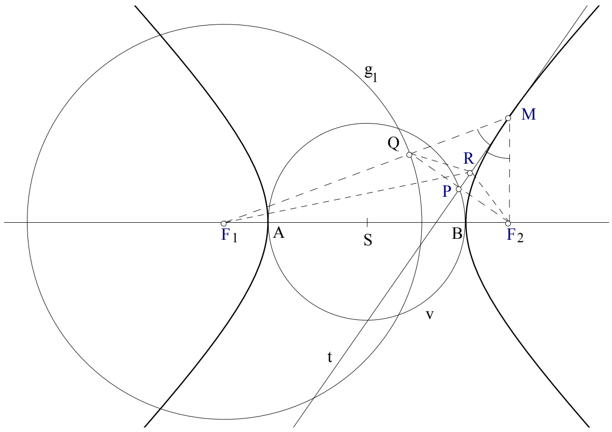
$$\sin\alpha = \frac{|F_1 t|}{|F_1 M|} = \frac{1}{ka}.$$

Pro druhý úhel β analogicky dostaneme

$$|F_2t| = \frac{\left|\dfrac{ex_0}{a^2} - 1\right|}{k} = \frac{|\,a - \varepsilon x_0\,|}{ka} \quad \text{a} \quad |F_2M| = |\,a - \varepsilon x_0\,|\,.$$

Tedy $\sin\beta = \dfrac{|F_2t|}{|F_2M|} = \dfrac{1}{ka}$. Odtud $\sin\alpha = \sin\beta$ a $\alpha = \beta$. □

Pro tečnu hyperboly dále platí následující věta, které se též někdy používá jako definice tečny.



Věta
Tečna hyperboly je přímka, která má s hyperbolou jediný společný bod, jejíž ostatní body jsou vnější.

Důkaz: Dokážeme, že přímka, která půlí úhel průvodičů bodu M hyperboly má, kromě bodu dotyku M, všechny ostatní body vnější. Nechť R je libovolný bod tečny různý od bodu M. Pro průvodiče bodu R je

$$|F_1R| - |F_2R| = |F_1R| - |QR| < |F_1Q| = |F_1M| - |F_2M| = 2a$$

a odtud

$$|F_1R| - |F_2R| < 2a\,.$$

Tedy bod R je bodem vnějším. □

Ohniskové vlastnosti hyperboly

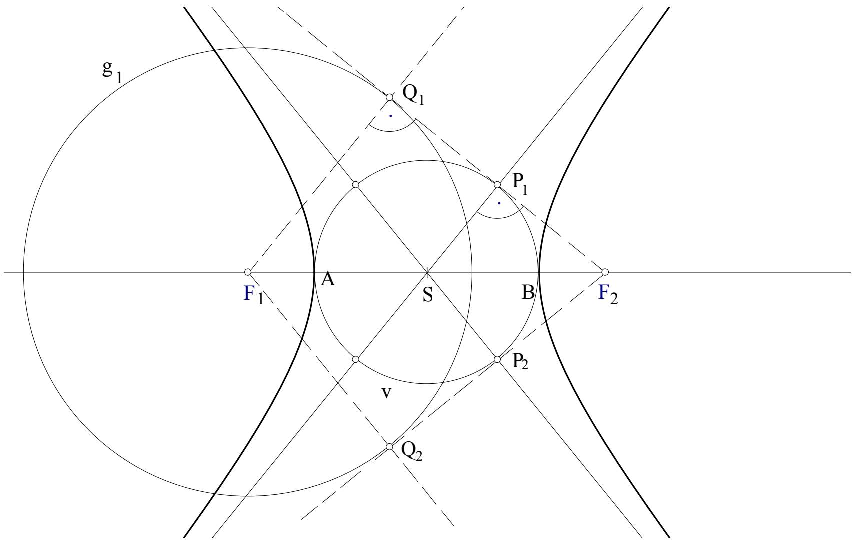
Dále vyslovíme a dokážeme dvě věty, kterých se často užívá ke konstrukci hyperboly z daných prvků.

Věta
Množina bodů souměrných s jedním ohniskem hyperboly podle všech tečen leží na kružnici se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že bod Q má vlastnost z věty tj. je souměrný např. s ohniskem F_2 podle tečny t. Protože tečna půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku M, platí

$$|F_1Q| = |F_1M| - |MQ| = |F_1M| - |MF_2| = 2a.$$

Odtud plyne, že bod M leží na kružnici $g_1 = (F_1, 2a)$. □



Poznámka
Všimněme si rozdílu mezi právě dokázanou větou a obdobnou větou pro elipsu. U elipsy je hledanou množinou *celá* kružnice $g_1 = (F_1, 2a)$, zatímco u hyperboly její podmnožina nebo jinak řečeno, z kružnice g_1 je

nutno některé body vyjmout. Jsou to ty body, které nejsou souměrné s ohniskem F_1 podle některé tečny. Ukažme, které body to jsou, obr.
Nechť Q je libovolný bod kružnice g_1. Označme t osu úsečky F_2Q a sestrojme průsečík M přímek t a F_1Q. Bod M zřejmě vždy existuje, kromě případu, že přímky t a F_1Q jsou rovnoběžné. Potom přímka F_2Q je kolmá na F_1Q trojúhelník F_1F_2Q je pravoúhlý. Z kružnice g_1 je tedy nutno vyjmout bod Q_1, který je bodem dotyku tečny ke kružnici g_1 z ohniska F_2. Analogicky je nutno z kružnice g_1 vyjmout bod Q_2, který je symetrický s bodem Q_1 podle hlavní osy hyperboly.
Kružnice $g_1 = (F_1, 2a)$, $g_2 = (F_2, 2a)$ se nazývají *řídící kružnice hyperboly*.

V další větě budeme zkoumat paty kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na tečny.

Věta
Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na kružnici se středem ve středu hyperboly o poloměru a.

Důkaz: Nechť bod P je pata kolmice spuštěné např. z ohniska F_2 na tečnu t. Jelikož tečna t je osou úhlu QMF_2, je bod P středem úsečky QF_2, střed hyperboly S je středem úsečky F_1F_2. Úsečka SP je proto v trojúhelníku F_1F_2Q střední příčkou a $|SP| = \frac{1}{2}|F_1Q| = a.$ Bod P tedy náleží kružnici $v = (S, a)$. □

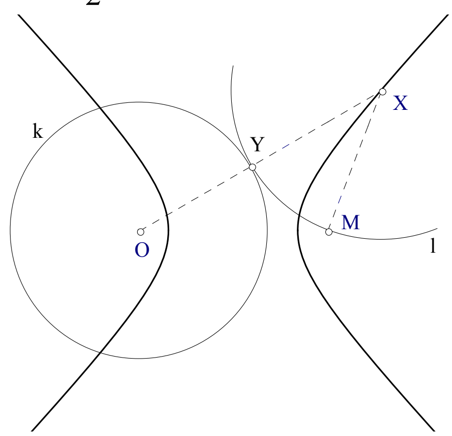
Poznámka
Také zde je nutné si všimnout rozdílu mezi právě uvedenou větou a analogickou větou pro elipsu. Hledanou množinou zde není celá kružnice v, ale pouze její podmnožina. Z kružnice v je nutno vyjmout body dotyku tečen P_1, P_2, vedených ke kružnici v z ohnisek F_1 a F_2.
Kružnice $v = (S, a)$ se nazývá *vrcholová kružnice* hyperboly.

Příklad
Je dána kružnice k a vně kružnice pevný bod M. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí daným bodem M.

Řešení: Označme $k=(O,r)$ kružnici se středem O a poloměrem r. Nechť kružnice l je libovolná kružnice splňující podmínky úlohy, která má s kružnicí k např. vnější dotyk. Označme X její střed a nechť Y je bod dotyku kružnic k a l. Jak známo, body O, X, Y leží na jedné přímce a platí

$$|OX|-|XM|=|OX|-|XY|=|OY|=r.$$

Tedy rozdíl vzdáleností bodu X od dvou daných pevných bodů O, M je konstantní a bod X náleží hyperbole s ohnisky v bodech O, M, jejíž délka hlavní poloosy je $\frac{r}{2}$.



Obráceně, je-li X libovolný bod uvedené hyperboly, potom $r=|OX|-|XM|=|OX|-|XY|$ a odtud $|XM|=|XY|$. Bod X je tedy středem kružnice, která se dotýká dané kružnice k a prochází daným bodem M.

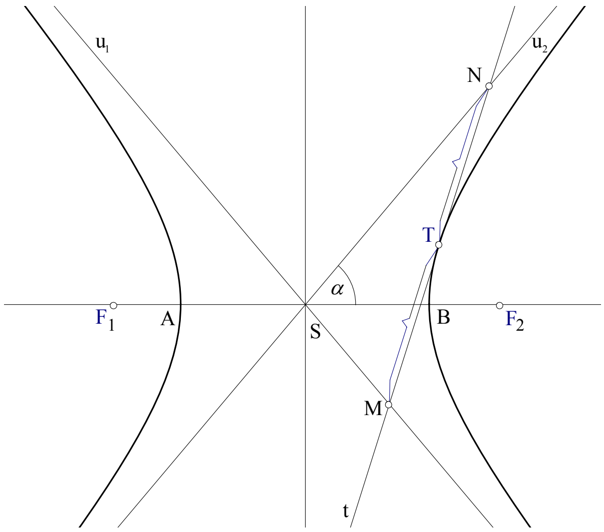
Závěr: Hledanou množinou bodů je hyperbola s ohnisky ve středu O kružnice k a v bodě M, jejíž délka hlavní poloosy je rovna $\frac{r}{2}$. □

Další vlastnosti hyperboly

V této části uvedeme některé další vlastnosti hyperboly. Platí věta:

Věta

Úsek tečny omezený asymptotami hyperboly je půlen bodem dotyku.



Důkaz: Větu dokážeme analytickou metodou. Při vhodně zvolené soustavě souřadnic je rovnice hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, rovnice tečny t s bodem dotyku $T=[x_0,y_0]$ je $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ a rovnice asymptot u_1, u_2 hyperboly je $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Najdeme průsečíky M,N tečny t s asymptotami u_1, u_2. Z rovnice tečny vyjádříme y a dosadíme do rovnice asymptot. Je $y=\left(\frac{xx_0}{a^2}-1\right)\frac{b^2}{y_0}$ a odtud

$$x^2\,\frac{a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2}{a^4{y_0}^2}-2x\frac{b^2x_0}{a^2{y_0}^2}+\frac{b^2}{{y_0}^2}=0.$$

Protože bod dotyku $T = [x_0, y_0]$ leží na hyperbole, je $a^2 y_0^{\ 2} - b^2 x_0^{\ 2} = a^2 b^2$ a rovnice pro výpočet průsečíků má po vynásobení nenulovou konstantou tvar

$$x^2 - 2xx_0 + a^2 = 0\,. \tag{1}$$

Součet kořenů rovnice (1) je podle Vietových vzorců roven $2x_0$ a odtud x-ová souřadnice středu je x_0. Středem úsečky M, N je tedy bod dotyku $[x_0, y_0]$. □

Předchozí větu lze využít ke konstrukci tečny v daném bodě, známe-li asymptoty hyperboly. Stačí sestrojit příčku, jejíž krajní body leží na hyperbole, a která je daným bodem půlena (s pomocí středové souměrnosti). Výsledky věty užijeme ve větě následující.

Věta
Tečna hyperboly spolu s asymptotami určuje trojúhelník, který má konstantní obsah.

Důkaz: Dokážeme, že obsah trojúhelníka *SMN* nezávisí na volbě tečny. Nechť $M = [x_1, y_1]$ a $N = [x_2, y_2]$. Pro obsah P trojúhelníka *SMN* platí $P = \frac{1}{2} |SM| \cdot |SN| \sin 2\alpha$, kde 2α je úhel asymptot. Dále je $|SM| \cos\alpha = x_1$, $|SN| \cos\alpha = x_2$. Tedy $P = \frac{1}{2} \frac{x_1 x_2}{\cos^2 \alpha} \sin 2\alpha$. Ze vztahu (1) plyne $x_1 x_2 = a^2$. Po dosazení a úpravě dostaneme vztah

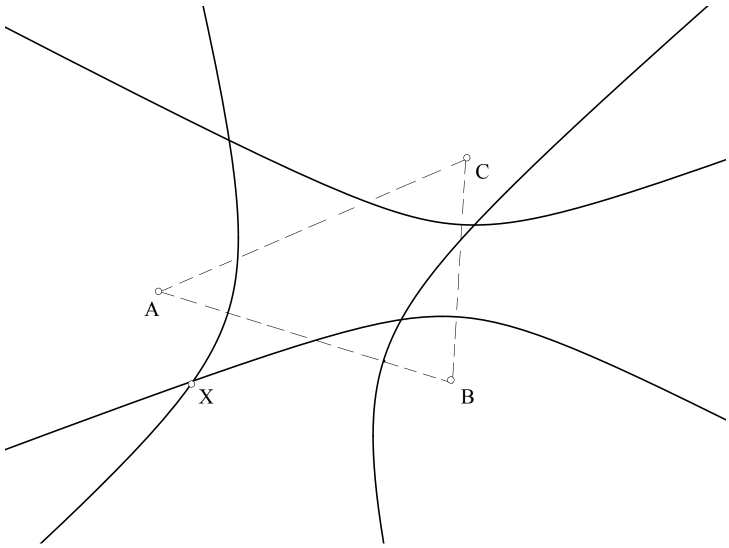
$$P = a^2 \tan\alpha\,, \tag{2}$$

který nezávisí na volbě tečny. □

Na závěr této kapitoly uvedeme úlohu, ve které se vlastností hyperboly využívá v praktické činnosti. Jedná se o takzvanou *zvukoměřičskou úlohu* (název je převzat ze starší literatury).

Zvukoměřičská úloha
Ve třech různých místech *A,B,C* byl v zaznamenán zvukový signál po řadě v časech t_1, t_2, t_3. Určete místo zdroje signálu.

Řešení: Předpokládejme, že časy jsou udány v sekundách a že platí $t_1 \le t_2 \le t_3$. V místě *A* byl signál zaznamenán nejdříve, v místě *B* byl signál zaznamenán se zpožděním $t_2 - t_1$ sekund oproti místu *A*. Předpokládáme-li, že se zvuk šíří rychlostí *v* m/s (je to přibližně 330 m/s), je zdroj signálu X o $(t_2 - t_1)v$ metrů dál od místa *B* než od místa *A*. Tedy pro *rozdíl* vzdáleností platí $|XB| - |XA| = (t_2 - t_1)v$ a zdroj signálu X leží na hyperbole, jejíž ohniska jsou v bodech *A,B* a $2a = (t_2 - t_1)v$. Uvažujeme pouze tu větev hyperboly, která je blíže bodu *A*, obr.



Analogicky vyšetříme situaci vzhledem k bodům *B,C* (příp. *A,C*). V tomto případě platí pro vzdálenosti $|XB|$, $|XC|$ rovnost $|XC| - |XB| = (t_3 - t_2)v$ a bod X leží na hyperbole, jejíž ohniska jsou v bodech *B,C* a $2a = (t_3 - t_2)v$. Opět uvažujeme pouze jednu větev hyperboly, a sice tu, která je blíže bodu *B*. Průsečík dvou větví hyperboly dává hledaný bod *X*. □

Poznámka

a) Uvedené vlastnosti hyperboly se v současné době velmi využívá pro stanovení polohy v rovině či v prostoru s použitím kontrolních bodů - geostacionárních družic, které jsou zavěšeny nad zemským povrchem. V prostoru se místo hyperbol používá prostorová analogie - rotační jednodílný hyperboloid. Rovněž zvukový signál je nahrazen jiným druhem signálu (rádiový, laserový, světelný apod.)

b) Dříve se k určení bodu X, vzhledem k náročnosti výpočtu v daném čase, nahrazovaly hyperboly jejich asymptotami.

Cvičení

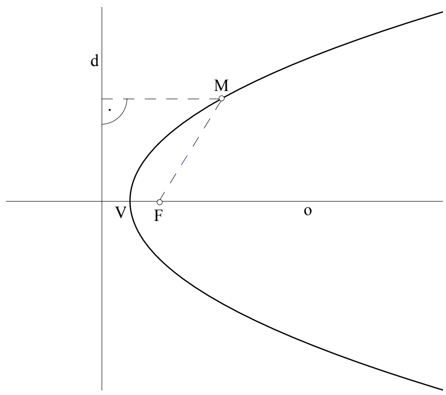
1. Z bodu R veďte tečny k hyperbole.
2. Sestrojte hyperbolu, je-li dáno
   a) ohnisko F_1, asymptota m, směr s druhé asymptoty,
   b) ohniska F_1, F_2, tečna t,
   c) ohniska F_1, F_2, bod M hyperboly,
   d) hlavní vrcholy A, B, tečna t,
   e) ohnisko F_1, tečna t s bodem dotyku T, směr s hlavní osy,
   f) ohnisko F_1, asymptota m, délka hlavní poloosy a,
   g) ohnisko F_1, asymptota m, tečna t,
   h) střed S, asymptota m, tečna t, délka hlavní poloosy a,
   i) ohnisko F_1, tečna t_1 s bodem dotyku T_1, další tečna t_2,
   j) ohnisko F_1, body M_1, M_2 hyperboly, délka hlavní poloosy a,
   k) ohnisko F_1, tečny t_1, t_2, délka hlavní poloosy a.
3. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, je-li dán střed S, tečna t, délka hlavní poloosy a.
4. K hyperbole veďte tečny, které svírají s hlavní osou úhel 75°.
5. Určete kanonický tvar hyperboly $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$. Kuželosečku nakreslete.
6. Určete kuželosečku $xy + 3x - y + 1 = 0$. Návod: Z rovnice vyjádřete proměnnou y.

3 Parabola

Základní vlastnosti

Definice

Parabola je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu F a dané přímky d stejnou vzdálenost.



Bod F nazýváme *ohnisko*, přímka d je *řídící přímka*. Spojnice libovolného bodu M paraboly s ohniskem F a přímka kolmá na řídící přímku procházející bodem M jsou *průvodiče* bodu M. Někdy budeme průvodičem bodu M rozumět vzdálenost $|MF|$ popř. $|Md|$. Parabola je množina bodů, které mají od dané přímky a daného bodu stejné průvodiče, tj.

$$|MF| = |Md|.$$

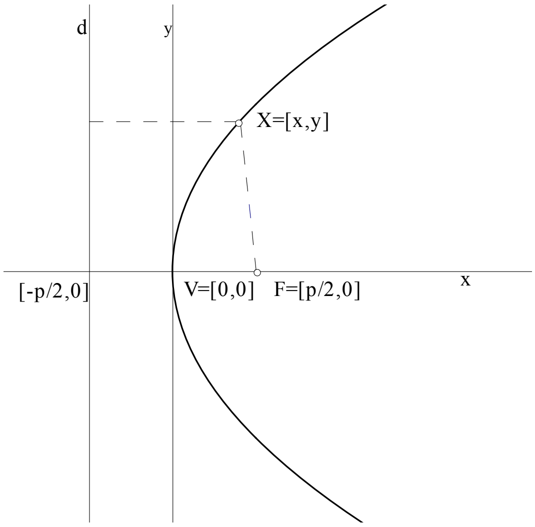
Vzdálenost ohniska od řídící přímky je *parametr* p. Přímka kolmá k řídící přímce d a procházející ohniskem F je *osa* o paraboly. Bod V na ose, který půlí vzdálenost bodu F od řídící přímky, se nazývá *vrchol*.

Dále zavedeme pojem vnějších a vnitřních bodů paraboly. Bod X nazveme *vnějším bodem* paraboly, jestliže $|XF| > |Xd|$. Platí-li vztah $|XF| < |Xd|$, potom se bod X nazývá *vnitřní bod* paraboly. Parabola tak dělí rovinu na tři části

- *vnějšek* paraboly, který je tvořen vnějšími body,
- *body* paraboly,
- *vnitřek* paraboly (obsahuje ohnisko), který je tvořen vnitřními body paraboly.

Rovnice paraboly

Nyní odvodíme rovnici paraboly. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a rovnice řídící přímky d byla $d: \quad x = -\frac{p}{2}$. Nechť $X = [x, y]$ je libovolný bod roviny.



Předpokládejme nejprve, že bod X náleží parabole. Potom podle definice

$$|XF| = |Xd|. \tag{1}$$

Rozepíšeme-li tento vztah v souřadnicích, dostáváme

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Umocníme tuto rovnici na druhou a po krátké úpravě máme

$$y^2 = 2px. \tag{2}$$

Obráceně předpokládejme, že pro bod $X = [x, y]$ platí rovnice (2). Dosazením za y^2 z (2) do výrazu $|XF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ dostaneme $|XF| = \left|x + \frac{p}{2}\right| = |Xd|$. Tedy platí (1).

Rovnice (2) se nazývá *kanonická rovnice paraboly*. Vzhledem k tomu můžeme definovat parabolu následujícím způsobem:

Definice
Parabola je množina bodů $X=[x,y]$ v rovině, které v nějaké kartézské soustavě souřadnic vyhovují rovnici

$$y^2 = 2px..$$

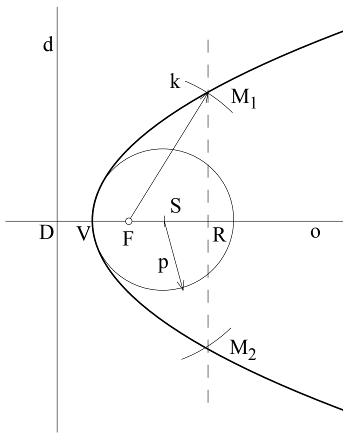
Ukažme ještě parametrické rovnice paraboly. Zde stačí položit

$$x=\frac{1}{2p}t^2,\quad y=t, \tag{3}$$

kde t je libovolné reálné číslo. Rovnice (3) nazýváme *parametrické rovnice* paraboly.

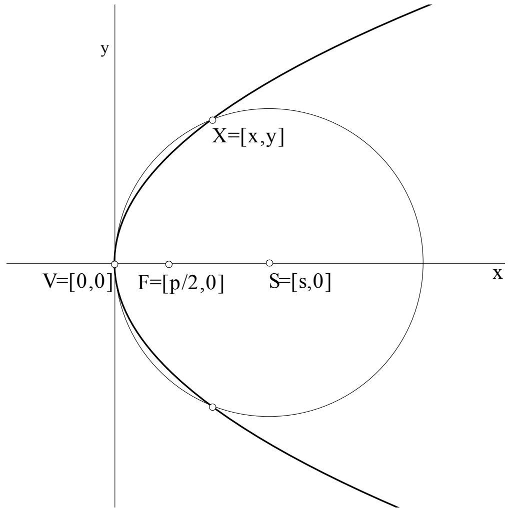
Konstrukce paraboly

Libovolný bod paraboly, která je dána ohniskem F a řídící přímkou d, sestrojíme takto tzv. *bodová konstrukce paraboly*.



Nejprve sestrojíme vrchol V paraboly, který leží na ose o a pro který je $|VF|=|Vd|$. Dále v libovolném bodě R polopřímky VF sestrojíme kolmici k ose paraboly a najdeme její průsečíky M_1, M_2 s kružnicí *k*, která má střed v ohnisku F a poloměr $|Rd|$. Body M_1, M_2 zjevně náleží parabole.

Při konstrukci nahrazujeme parabolu v okolí vrcholu V obloukem *oskulační kružnice*. Její střed S sestrojíme snadno, neboť jak se dokazuje v diferenciální geometrii, poloměr oskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu je roven parametru p. Stačí tedy nanést vzdálenost $p = |Fd|$ na polopřímku VF a dostaneme střed S oskulační kružnice paraboly. Oprávněnost této konstrukce můžeme nahlédnout následovně.



Mějme libovolnou kružnici k se středem $S = [s, 0]$ na ose paraboly, o rovnici $(x - s)^2 + y^2 = s^2$, která má s parabolou $y^2 = 2px$ společný vrchol $V = [0, 0]$. Pro průsečík $X = [x, y]$ kružnice s parabolou platí rovnice

$$x^2 - 2x(p - s) = 0 .$$

Průsečík X splyne s vrcholem paraboly, jestliže má tato rovnice dvojnásobný kořen, což nastane právě když $s = p$.

Tečna paraboly

Předpokládejme, že bod $M = [m, n]$ je bodem paraboly o rovnici

$$y^2 - 2px = 0. \qquad (1)$$

Bodem M veďme libovolnou přímku r, jejíž parametrické rovnice jsou

$$r: \quad \begin{aligned} x &= m + ut, \\ y &= n + vt, \end{aligned} \qquad (2)$$

kde t je parametr a $\boldsymbol{u} = (u, v)$ je směrový vektor.

Budeme hledat společné body paraboly a přímky $r.$ Dosaďme proto rovnice (2) do (1). Dostáváme rovnici pro neznámou t tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \qquad (3)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= v^2, \\ B &= nv - pu, \\ C &= n^2 - 2pm. \end{aligned} \qquad (4)$$

Protože bod M náleží parabole, je zřejmě $C = 0.$ Rovnice (3) se potom redukuje na tvar

$$At^2 + 2Bt = 0. \qquad (5)$$

Rovnice (5) je kvadratická právě když $A \neq 0$ a to nastane podle (4) pouze

v případě kdy $v \neq 0$. Zvolme tedy směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$ přímky r tak aby nebyl rovnoběžný s osou paraboly. Jeden kořen této rovnice je nula. Tento kořen vede, po dosazení do rovnice (2), k průsečíku M přímky r a paraboly. Bod M bude dvojnásobným průsečíkem přímky r a paraboly, jestliže nula bude dvojnásobným kořenem rovnice (5) $t(At + 2B) = 0,$ tj. jestliže $B = 0.$ Ze vztahu $0 = B = nv - pu$ dostaneme např. volbou $u = n,\ v = p$ souřadnice u, v směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ přímky $r.$ Zřejmě je takto zvolený vektor $\boldsymbol{u}$ vždy nenulový a přímka r v každém bodě paraboly existuje.

Definice

Nechť M je libovolný bod paraboly. Přímka procházející bodem M, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s parabolou, se nazývá *tečna paraboly s dotykovým bodem* M. Přímka procházející bodem M, která je kolmá na tečnu se nazývá *normála v bodě* M.

Nyní odvodíme rovnici tečny paraboly s bodem dotyku $M = [m, n]$.

Přímka r má parametrické rovnice

$$r: \quad x = m + tn$$
$$y = n + tp.$$

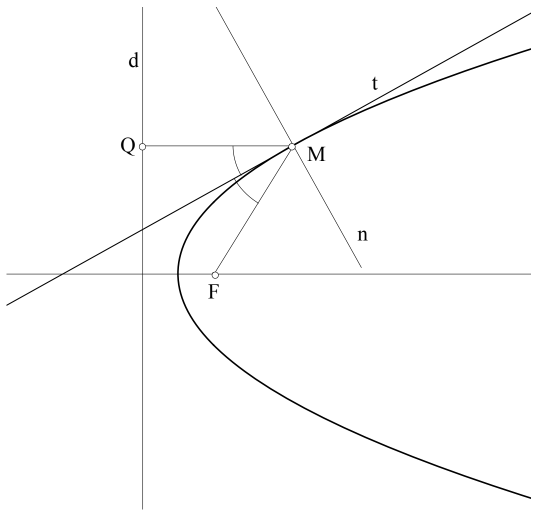
Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr t, má obecná rovnice přímky r tvar

$$r: \quad yn - p(x - m) - n^2 = 0. \tag{6}$$

Odečteme-li od obou stran rovnice (6) výraz pm, lze tuto rovnici (protože bod M náleží parabole, je $n^2 - 2pm = 0$) upravit na následující tvar

$$r: \quad yn - p(x + m) = 0. \tag{7}$$

Rovnice (7) je *rovnice tečny* paraboly (1) s bodem dotyku $M = [m, n]$.

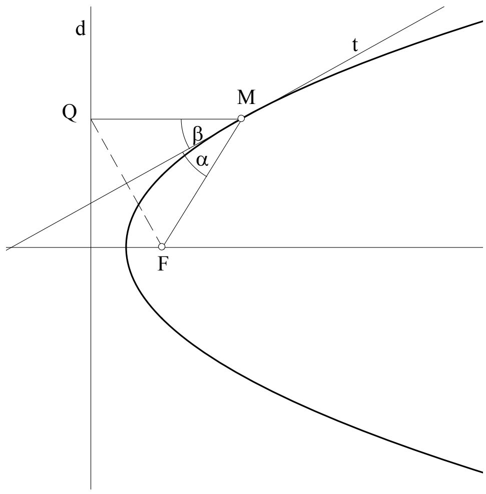


Poznámka
Pro lepší zapamatování rovnice tečny paraboly je užitečné si všimnout podoby rovnice tečny (7) s rovnicí paraboly (1).

Dále dokážeme důležitou vlastnost tečny paraboly, které se též, obdobně jako u elipsy, využívá v praxi. Nejprve však zaveďme pojem úhlu průvodičů. Průvodiče bodu M paraboly dělí rovinu paraboly na dvě dvojice vrcholových úhlů. Ty dva vrcholové úhly, z nichž jeden obsahuje vrchol paraboly, jsou *vnější úhly průvodičů* bodu M paraboly. Zbylé dva vrcholové úhly jsou *vnitřní úhly průvodičů* bodu M. A nyní slíbená věta:

Věta
Tečna paraboly půlí vnější úhel průvodičů.

Důkaz: Větu dokážeme užitím analytické metody. Pro parabolu o rovnici $y^2 = 2px$ je $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$, rovnice tečny t v bodě $M = [x_0, y_0]$ paraboly je



podle (7) $t: \ px - y_0 y - px_0 = 0$ a platí $y_0^{\ 2} = 2px_0$.

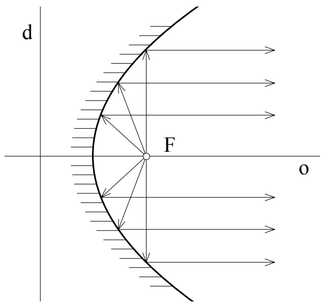
Ukážeme, že úhly, které svírá tečna t s přímkami QM a FM jsou shodné. Stačí ukázat, že je splněna rovnost $\sin\alpha = \sin\beta$. Platí

$$\sin\alpha = \frac{|Ft|}{|FM|} = \frac{\left|\frac{p^2}{2} + px_0\right|}{\sqrt{p^2 + y_0^{\ 2}}\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^{\ 2}}} = \frac{p}{k},$$ kde jsme označili

$k = \sqrt{p^2 + y_0^{\ 2}}$. Analogicky $\sin\beta = \dfrac{|Qt|}{|MQ|} = \dfrac{|-y_0^{\ 2} + 2px_0|}{\sqrt{p^2 + y_0^{\ 2}}\,|x_0|} = \dfrac{p}{k}$,

tedy $\sin\alpha = \sin\beta$ a $\alpha = \beta$. □

Právě dokázaná vlastnost tečny paraboly má široké použití v praxi. Například při konstrukci svítilen má svítilna tvar rotačního paraboloidu, který vznikne rotací paraboly kolem osy. Situaci můžeme sledovat na řezu paraboloidu rovinou obsahující osu rotace. Řezem je parabola, v jejímž ohnisku je umístěno vlákno žárovky. Světelné paprsky se odrážejí od stěn paraboloidu do jediného směru, který je rovnoběžný s osou rotace. Parabola tak působí jako usměrňovač, který paprskům všech možných směrů dává jediný směr. Na stejném principu jsou založeny i televizní parabolické antény, sluneční pece apod.



Pomocí předchozí věty dokážeme následující vlastnost tečny paraboly, které se někdy užívá k definici tečny paraboly.

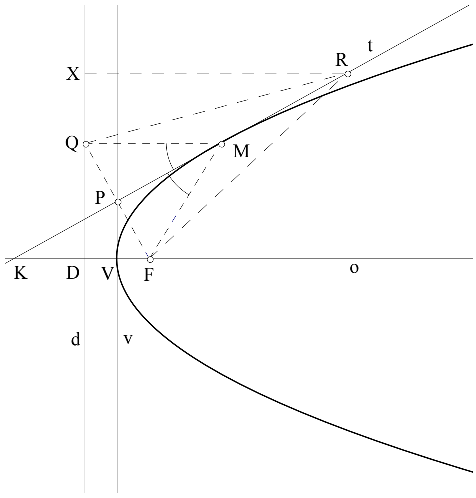
Věta

Tečna paraboly je přímka, která má s parabolou jediný společný bod, jejíž všechny ostatní body jsou vnější.

Důkaz:

Větu dokážeme syntetickou metodou. Je-li R libovolný bod tečny t paraboly, různý od bodu dotyku M, potom $|RF| = |RQ|$, protože tečna t půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku M. Z pravoúhlého trojúhelníka QXR dále plyne $|RQ| > |Rd|$. Odtud $|RF| > |Rd|$, tedy bod R je vnějším bodem paraboly. □

Dále následují dvě věty, které pojednávají o množině bodů souměrných s ohniskem podle tečen a o množině pat kolmic z ohniska na tečny.



Věta
Množina bodů souměrných s ohniskem paraboly podle všech tečen je řídící přímka d.

Důkaz: Nechť bod Q je souměrný s ohniskem F podle tečny t. Protože tečna půlí vnější úhel průvodičů, jsou trojúhelníky PFM a PQM shodné. Odtud $|QM|=|FM|$, tj. bod Q náleží řídící přímce d. Obráceně, nechť Q je libovolný bod řídící přímky d. Sestrojíme osu t úsečky QF. Rovnoběžka s osou paraboly bodem Q vždy protne přímku t v bodě M, pro který platí $|QM|=|MF|$ neboť t je osa úsečky QF. Bod M tedy náleží parabole a přímka t je její tečnou. □

Věta
Množina pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna v.

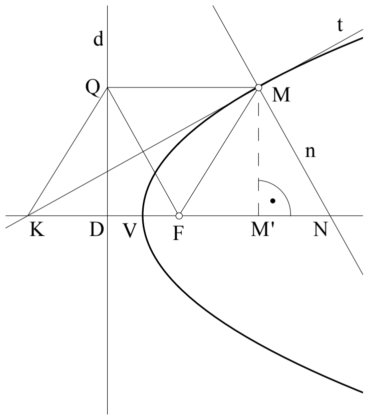
Důkaz: Nechť bod P je patou kolmice, která je spuštěna z ohniska F na tečnu t. Bod P je středem strany QF a bod V je středem strany DF. Potom je přímka PV střední příčkou v trojúhelníku DFQ, odkud plyne, že bod P náleží vrcholové tečně v.
Důkaz obrácené implikace je analogický. □

V další části zavedeme dva nové pojmy. Nechť je v libovolném bodě M paraboly sestrojena tečna t. Bod dotyku M promítneme kolmo na osu paraboly o do bodu M'. Označme písmenem K průsečík tečny t s osou o a písmenem N průsečík normály n s osou paraboly o. Potom úsečku KM' nazýváme *subtangenta* a úsečku $M'N$ *subnormála*.

Platí následující věta:

Věta

Subtangenta je půlena vrcholem a délka subnormály je rovna parametru p paraboly.



Důkaz: Obě tvrzení věty plynou okamžitě z pravoúhlého trojúhelníka $KM'M$ a pravoúhlého trojúhelníka $NM'M$, který je shodný s trojúhelníkem FDQ. Dále je vhodné si uvědomit, že čtyřúhelník $KFMQ$ je kosočtverec. □

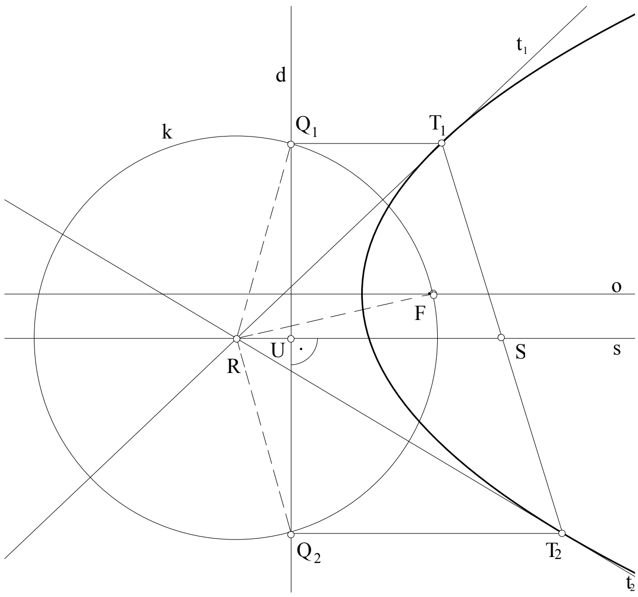
V následující větě uvedeme vlastnost paraboly, které se často využívá ke konstrukci paraboly z daných prvků.

Věta

Přímka, která spojuje průsečík dvou tečen paraboly se středem spojnice jejich bodů dotyku je rovnoběžná s osou paraboly.

Důkaz: Označme průsečík tečen paraboly t_1, t_2 písmenem R a jejich body dotyku po řadě T_1, T_2, obr. Protože tečna půlí úhel průvodičů, je tečna t_1 osou úsečky FQ_1 a tečna t_2 osou úsečky FQ_2. Proto platí

$|RQ_1|=|RF|=|RQ_2|$, a to znamená, že body Q_1, F, Q_2 leží na kružnici $k=(R,|RF|)$. Bodem *R* veďme rovnoběžku *s* s osou *o* paraboly. Přímka *s* je kolmá na úsečku Q_1Q_2, která je tětivou kružnice *k*. Jak známo, z vlastnosti tětivy kružnice, kolmice na tětivu Q_1Q_2 středem *R* kružnice protíná tětivu Q_1Q_2 v jejím středu *U*. Přímka *s* protíná strany lichoběžníka $Q_1Q_2T_2T_1$ s pravými úhly při vrcholech Q_1, Q_2 v bodech *U* a *S*. Protože $s \parallel Q_1T_1 \parallel Q_2T_2$, je úsečka *US* střední příčka lichoběžníka $Q_1Q_2T_2T_1$. Odtud plyne, že bod *S* je středem strany T_1T_2. Ukázali jsme, že přímka $RS \parallel o$. □



Poznámka

Přímka *RS* se nazývá průměr paraboly. Později ukážeme, že tečna v bodě, v němž *RS* protíná parabolu je rovnoběžná s T_1T_2. Obdobná vlastnost platí i pro elipsu a hyperbolu. V těchto případech si je třeba uvědomit, že průměr elipsy i hyperboly prochází středem kuželosečky. Pokuste se věty pro elipsu a hyperbolu zformulovat.

Cvičení

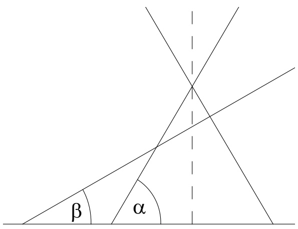
1. Z bodu *R* veďte tečny k parabole.
2. K parabole veďte tečny daným směrem *s*.

3. Sestrojte parabolu, je-li dáno:
   a) osa o, bod M paraboly, parametr p,
   b) vrchol V, tečna t s bodem dotyku T,
   c) vrcholová tečna v, bod M paraboly, parametr p,
   d) osa o, vrchol V, bod M paraboly,
   e) osa o, ohnisko F, tečna t,
   f) osa o, tečna t s bodem dotyku T,
   g) ohnisko F, tečny t_1, t_2,
   h) vrcholová tečna v, tečny t_1, t_2,
   i) ohnisko F, body M_1, M_2 paraboly,
   j) ohnisko F, tečna t, bod M paraboly,
   k) vrcholová tečna v, tečna t s bodem dotyku T,
   l) řídící přímka d, tečny t_1, t_2,
   m) řídící přímka d, tečna t, bod M paraboly,
   n) tečny t_1, t_2 a jejich body dotyku T_1, T_2.
4. Z bodu P na řídící přímce d veďte tečny k parabole. Dokažte, že tečny jsou vzájemně kolmé.
5. Ukažte, že rovnicí $2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ je dána parabola, určete její parametr p a vrchol.
6. Určete množinu bodů, které mají od přímky q a bodu M stálý součet vzdáleností. Návod: Řešte analytickou nebo syntetickou metodou.
7. Určete parametr a vrchol paraboly $y^2 - 10x - 2y = 0$. Kuželosečku nakreslete.

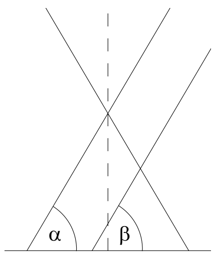
4 Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše

Řezy na rotační kuželové ploše

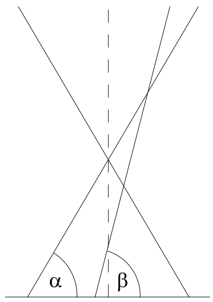
Křivky, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách, se souhrnně nazývají *kuželosečky*, neboť je lze získat, jak sám název napovídá, jako řezy na kuželové ploše. Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy totiž dostaneme právě jen elipsu, hyperbolu nebo parabolu. Typ kuželosečky, který obdržíme, je závislý na tom, pod jakým úhlem protíná rovina řezu kuželovou plochu.
Označme α úhel, který svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace. Označme dále β úhel, který svírá rovina řezu σ s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy. Potom mohou nastat tyto tři případy:



a)



b)



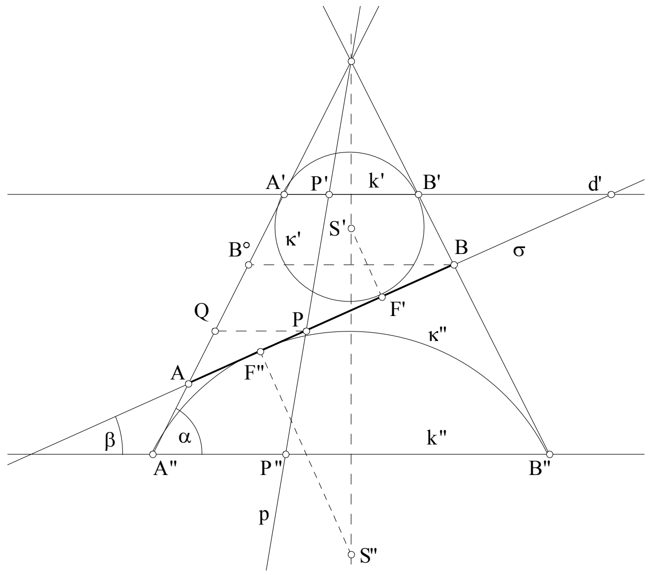
c)

a) $\alpha > \beta$, řezem je elipsa.
b) $\alpha = \beta$, řezem je parabola.
c) $\alpha < \beta$, řezem je hyperbola.

Důkaz tohoto tvrzení podává následující věta:

Věta (Quételetova-Dandelinova[1])
Rovina σ, která neprochází vrcholem kuželové plochy a která svírá s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy úhel β menší než je úhel α, který svírají povrchové přímky kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace, protíná kuželovou plochu v elipse. Je-li úhel α roven úhlu β, potom rovina σ protíná kuželovou plochu v parabole. Je-li úhel β větší než úhel α, potom řezem roviny σ a kuželové plochy je hyperbola. Ohniska F' a F'' popř. ohnisko F v případě paraboly, jsou body dotyku kulových ploch κ', κ'' vepsaných kuželové ploše, které se zároveň dotýkají roviny řezu σ.

Důkaz:
a) eliptický řez
V tomto případě předpokládejme, že $\alpha > \beta$:



Nechť P je libovolný bod řezu. Ukážeme, že platí
$$|PF'|+|PF''|=|AB|, \qquad (1)$$

[1] čti: Kételetova - Dándelenova. L. A. J. Quételet (1796-1874) - belgický matematik a astronom, zakladatel matematické statistiky, G. P. Dandelin (1794-1847) - belgický fyzik a matematik.

kde body F' a F'' jsou body dotyku kulových ploch κ' a κ'', které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny σ řezu. Dále jsme označili k', k'' kružnice, podél kterých se kulové plochy κ' a κ'' dotýkají dané rotační kuželové plochy a P', P'' značí společné body povrchové přímky p kuželové plochy procházející bodem P a kružnic k' a k''.
Důkaz je založen na této vlastnosti: Vedeme-li bodem P tečny ke kulové ploše, potom úseky na tečně z bodu P do bodu dotyku jsou stejné. Proto platí $|PF'| = |PP'|$, $|PF''| = |PP''|$ a odtud

$$|PF'| + |PF''| = |P'P''|.$$

Tím jsme již ukázali, že řezem je elipsa, neboť vzdálenost $|P'P''|$ je nezávislá na volbě bodu P. Nyní ještě ukážeme, že $|P'P''| = |AB|$. Platí totiž

$$|P'P''| = |A'A''| = |A'A| + |AA''| = |AF'| + |AF''| = |AF''| + |F'F''| + |AF''|. \tag{2}$$

Analogicky je

$$|P'P''| = |BF'| + |BF''| = |BF'| + |F'F''| + |BF'|. \tag{3}$$

Porovnáním pravých stran (2) a (3) dostaneme $|AF''| = |BF'|$ a např. ze vztahu (2) plyne

$$|P'P''| = |AF''| + |F''F'| + |F'B| = |AB|.$$

Odtud dostáváme vztah (1). Řezem je elipsa s velikostí hlavní osy $2a = |AB|$.

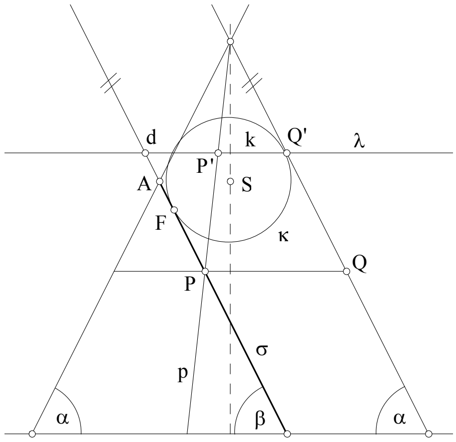
b) *parabolický řez*:
Nyní je $\alpha = \beta$. Ukážeme, že pro libovolný bod řezu roviny σ a rotační kuželové plochy platí

$$|PF| = |Pd|,$$

kde přímka d je průsečnice roviny λ obsahující kružnici k, podél níž se kulová plocha κ dotýká kuželové plochy, a roviny řezu σ. Je

$$|PF| = |PP'| = |QQ'|.$$

Z rovnoběžníka $PQQ'd$ plyne rovnost $|QQ'| = |Pd|$ a odtud naše tvrzení, obr.



c) *hyperbolický řez:*
Nyní předpokládejme, že úhel α, který svírají povrchové přímky kuželové plochy s rovinou tvořící kružnice, je menší než úhel β, který svírá rovina řezu s rovinou tvořící kružnice. Označme dále P libovolný bod řezu. Dokážeme, že platí

$$|PF''|-|PF'|=|AB|.$$

Je

$$|PF''|-|PF'|=|PP''|-|PP''|=|P'P''|.$$

Vzdálenost $|P'P''|$ nezávisí na volbě bodu P, proto je rozdíl $|PF''|-|PF'|$ konstantní a řezem je hyperbola. Ukažme, že tato konstanta je rovna $|AB|$. Platí

$$|P'P''|=|A'A''|=|AA''|-|AA'|=|AF''|-|AF'|=|AB|+|BF''|-|AF'|.$$

Zcela analogicky je

$$|P'P''|=|B'B''|=|BB'|-|BB''|=|BF'|-|BF''|=|AB|+|AF'|-|BF''|.$$

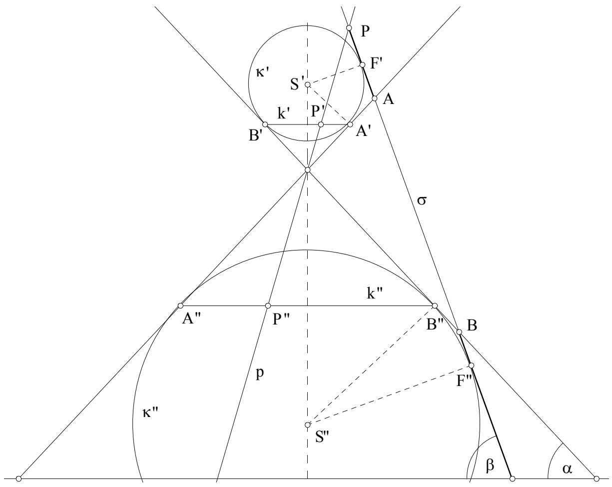
Porovnáním obou posledních vztahů dostáváme rovnost

$$|AF'|=|BF''|$$

a odtud

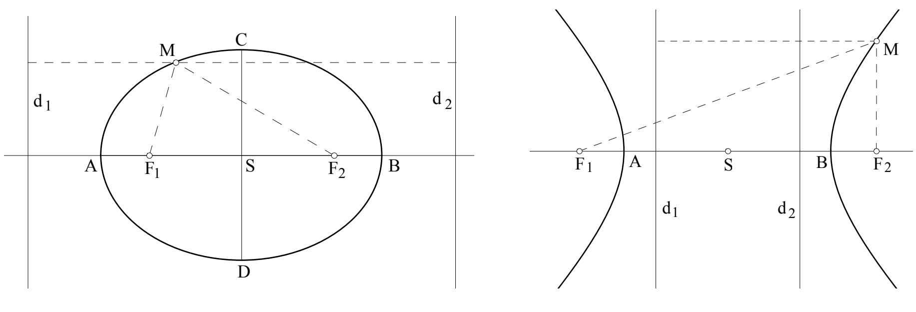
$$|P'P''|=|AB|,$$

což jsme chtěli dokázat, obr.



Řídící přímka kuželosečky

Při zkoumání kuželoseček je na první pohled patrný rozdíl v definicích elipsy a hyperboly na straně jedné a definicí paraboly na straně druhé. V definici elipsy a hyperboly se zkoumá součet a rozdíl průvodičů bodů od dvou daných bodů, zatímco v definici paraboly se zkoumají průvodiče bodů od dané přímky a bodu. Pokusme se tuto nejednotnost odstranit a definovat všechny tři kuželosečky stejným způsobem. Nejprve zavedeme pojem řídící přímky i pro elipsu a hyperbolu.



Řídící přímky elipsy a hyperboly

Definice

Řídícími přímkami d_1, d_2 elipsy (hyperboly) nazýváme přímky, které jsou kolmé na hlavní osu ve vzdálenosti $\frac{a}{\varepsilon}$ od středu, kde ε je numerická výstřednost elipsy (hyperboly).

Připomeňme, že $\varepsilon = \frac{e}{a}$, kde e je (délková) výstřednost. V případě elipsy je $a > e$, a proto $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{e} > a$. Řídící přímky d_1, d_2 tedy leží vně elipsy a elipsu neprotínají. V případě hyperboly analogicky vychází $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{e} < a$, neboť $a < e$. I v tomto případě řídící přímky hyperboly hyperbolu neprotínají.
Odpověď na způsob, který definuje elipsu, hyperbolu a parabolu jednotným způsobem, dává následující věta:

Věta

Kuželosečka je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu F a dané přímky d stálý poměr vzdáleností rovný konstantě ε. Je-li $\varepsilon < 1$, kuželosečka je elipsa, pro $\varepsilon = 1$ je kuželosečka parabola a pro $\varepsilon > 1$ je kuželosečka hyperbola.

Důkaz:

a) V případě elipsy zkoumejme nejprve poměr vzdáleností libovolného bodu elipsy $M = [x, y]$ od ohniska $F_2 = [e, 0]$ a řídící přímky $d_2: \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$. Je

$$|MF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(a - \frac{e}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{e}{a}x\right| = a - \frac{e}{a}x = a - \varepsilon x = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right),$$

$$|Md_2| = \frac{a}{\varepsilon} - x,$$

a odtud

$$\frac{|MF_2|}{|Md_2|} = \varepsilon = \frac{e}{a} < 1.$$

Obráceně, nechť bod M je takový bod roviny, pro který platí

$$\frac{|MF_2|}{|Md_2|} = \varepsilon < 1,$$

kde F_2 je libovolný bod a d_2 libovolná přímka roviny. Označme p vzdálenost ohniska F_2 od řídící přímky d_2. Položme $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $p = \frac{a^2}{e} - e.$

Potom $a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} p$, $e = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} p.$

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $M = [x, y]$, $F_2 = [e, 0]$ a $d_2: \ x = \frac{a}{\varepsilon}$. Potom je $|MF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ a $|Md_2| = \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|$ a dosazením ho hořejšího vztahu máme

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \varepsilon \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|.$$

Tuto rovnici umocníme na druhou

$$(x-e)^2 + y^2 = (a - \varepsilon x)^2,$$

a odtud

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Stejný výsledek dostaneme, budeme-li zkoumat poměr vzdáleností libovolného bodu M elipsy od ohniska F_1 a řídící přímky d_1.

b) V případě hyperboly zkoumejme opět poměr vzdáleností libovolného bodu $M = [x, y]$ hyperboly např. od ohniska $F_2 = [e, 0]$ a od řídící přímky $d_2: \ x = \frac{a}{\varepsilon}$.

Pro body jedné větve hyperboly, pro něž je $x > a$, vychází

$$|MF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x - a\right| = \frac{e}{a}x - a = \varepsilon x - a = \varepsilon\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right),$$

$$|Md_2| = x - \frac{a}{\varepsilon}.$$

Pro body $M = [x, y]$ druhé větve hyperboly je $x < -a$ a platí

$$|MF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x - a\right| = -\frac{e}{a}x + a = -\varepsilon x + a = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right),$$

$$|Md_2| = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Pro všechny body hyperboly tedy skutečně platí

$$\frac{|MF_2|}{|Md_2|} = \varepsilon = \frac{e}{a} > 1.$$

Důkaz opačné implikace je zcela obdobný jako v případě elipsy a nebudeme jej provádět.
Totéž vychází, vezmeme-li dvojici F_1, d_1.

c) Pro parabolu, která je dána ohniskem F a řídící přímkou d, plyne přímo z definice

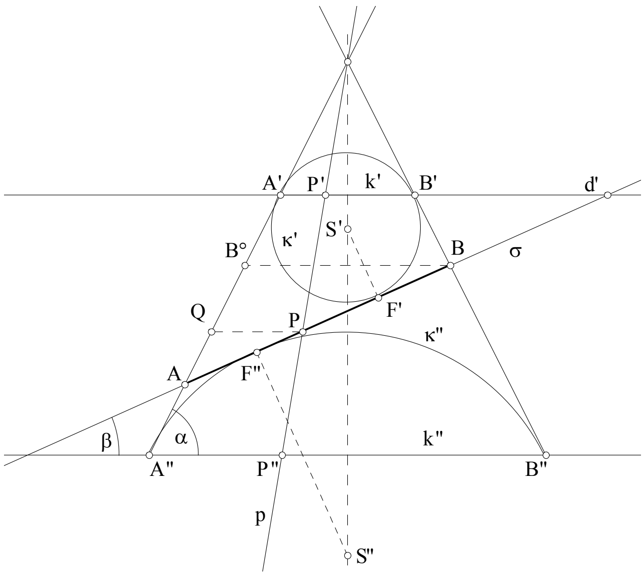
$$\frac{|MF|}{|Md|} = 1,$$

kde M je libovolný bod paraboly. □

Právě dokázanou větu je možno též snadno dokázat pomocí Dandelinovy-Quételetovy věty. Ukažme si to na případu elipsy.
Označme přímku, v níž se protínají rovina kružnice, podél níž se dotýká kulová plocha κ' kuželové plochy, a rovina řezu σ, písmenem d'. Ukážeme, že poměr vzdáleností libovolného bodu P řezu od bodu F' a přímky d' je konstantní a menší než jedna.
Je

$$\frac{|PF'|}{|Pd'|} = \frac{|PP'|}{|Pd'|} = \frac{|QA'|}{|Pd'|} = \frac{|AB^0|}{|AB|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \varepsilon = \text{konst.}$$

Ukážeme ještě, že $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$. Je



$$|AB^0| = |AA'| - |A'B^0| = |AF'| - |BF'| = 2e\,,$$

odtud

$$\varepsilon = \frac{|AB^0|}{|AB|} = \frac{2e}{2a} = \frac{e}{a}\,. \qquad \square$$

Obdobný důkaz pro hyperbolu přenecháme čtenáři.

Cvičení

1. Dokažte, že řezem rotační válcové plochy a roviny, která není rovnoběžná s osou válcové plochy, je elipsa. Návod: Jedná se o analogii Dandelinovy - Quételetovy věty na válcové ploše.

2. Ukažte na příkladech z praxe, kde všude se vyskytují kuželosečky. Pokuste se najít všechny druhy kuželoseček - elipsu, hyperbolu i parabolu v jednotlivých oborech lidské činnosti, např. v umění, v architektuře a stavebnictví, ve fyzice, v průmyslu apod.

5 Transformace soustavy souřadnic

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak se mění souřadnice bodů afinního prostoru A_n při změně lineární soustavy souřadnic. Ve druhé části budeme zkoumat transformaci kartézské soustavy souřadnic v eukleidovském prostoru. Zopakujeme stručně pojem lineární soustavy souřadnic, viz [10].

Definice
Nechť P je pevně zvolený bod z A_n a nechť $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ je báze zaměření V_n. Potom *lineární* (*afinní*) *soustavou souřadnic* S v A_n rozumíme $(n+1)$-tici

$$S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\} \tag{1}$$

Bod P se nazývá *počátek* lineární soustavy souřadnic S.

Lineární soustavou souřadnic (6) je každému bodu $X \in A_n$ jednoznačně přiřazena uspořádaná n-tice reálných čísel $[x_1, x_2, ..., x_n]$ tak, že platí

$$X - P = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i . \tag{2}$$

Vztah (2) lze též psát v ekvivalentním tvaru

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i , \tag{2'}$$

ve kterém je bod X vyjádřen jako součet bodu a vektoru. Čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ nazýváme souřadnice bodu X a zapisujeme $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$.
Obdobně zavádíme souřadnice vektoru. Je-li $\boldsymbol{u}$ libovolný vektor vektorového prostoru V_n ze zaměření A_n a platí-li $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i$, nazýváme čísla $u_1, u_2, ..., u_n$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ a píšeme $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Pro větší přehlednost budeme psát souřadnice bodů ve hranatých závorkách a souřadnice vektorů v kulatých závorkách.

Souřadnice bodu X resp. vektoru $\boldsymbol{u}$ *závisí* na volbě soustavy souřadnic S. Změníme-li S, změní se i souřadnice bodu X. Jak se mění souřadnice bodu X při změně soustavy souřadnic je předmětem následujících úvah. Nechť X je libovolný bod afinního prostoru A_n. Předpokládejme, že bod X má v lineární soustavě souřadnic $S=\{P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\}$ souřadnice $X=[x_1,x_2,...,x_n]$. Pro bod X potom platí vztah (2′).

Zvolme nyní jinou soustavu souřadnic $S'=\{Q,\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,...,\boldsymbol{e}'_n\}$. Předpokládejme, že v původní soustavě souřadnic S má bod Q souřadnice $[q_1,q_2,...,q_n]$, tj.

$$Q=P+\sum_{i=1}^{n}q_i\boldsymbol{e}_i \tag{3}$$

a nechť pro vektory $\boldsymbol{e}'_i$ „čárkované“ báze platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + ... + a_{1n}\boldsymbol{e}_n\\
\boldsymbol{e}'_2 &= a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + ... + a_{2n}\boldsymbol{e}_n\\
&\text{.......................................}\\
\boldsymbol{e}'_n &= a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + ... + a_{nn}\boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}$$

nebo

$$\boldsymbol{e}'_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_j. \tag{4}$$

Matice $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\ i,j=1,2,...,n$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n}\\ .... & .... & .... & ....\\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn}\end{pmatrix}$$

se nazývá *matice přechodu* od báze $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\}$ k bázi $\{\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,...,\boldsymbol{e}'_n\}$. Souřadnice bodu X v „nové“ soustavě souřadnic S' označme $X=[x'_1,x'_2,...,x'_n]$, tj.

$$X=Q+\sum_{i=1}^{n}x'_i\boldsymbol{e}'_i. \tag{5}$$

Dosazením vztahů (3) a (4) do rovnosti (5) dostáváme

$$X = Q + \sum_{i=1}^{n} x'_i \boldsymbol{e}'_i = P + \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_j = P + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x'_i + q_j \right) \boldsymbol{e}_j .$$

Porovnáním s (2′) dostáváme

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x'_i + q_j , \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

Vzorce (6) jsou *transformační rovnice*, které vyjadřují vztah mezi „starými“ a „novými“ souřadnicemi bodu X. Vztah (6) lze přehledně napsat pomocí matic. Považujeme-li totiž souřadnice bodů X a Q za matice typu $(1,n)$ a označíme-li je písmeny $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{X}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $\boldsymbol{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, dostáváme transformační rovnice (6) v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}' \boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}. \tag{7}$$

Obdobně nyní odvodíme vztah pro souřadnice vektoru v původní a nové soustavě souřadnic.

Nechť libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ má v soustavě S resp. S' souřadnice $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ resp. $\boldsymbol{u} = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$.

Potom je $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} u'_i \boldsymbol{e}'_i$ a vzhledem k (4) máme

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u'_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} u'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u'_i \right) \boldsymbol{e}_j ,$$

a odtud porovnáním souřadnic

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u'_i , \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

Vzorce (8) jsou transformační rovnice pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$. Označíme-li $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{U}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ matice typu $(1, n)$, můžeme vztah (8) vyjádřit v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}' \boldsymbol{A} . \tag{9}$$

Potřebujeme-li vyjádřit $\boldsymbol{X}'$ ve vztahu (7) pomocí $\boldsymbol{X}$, stačí vynásobit maticovou rovnici (7) maticí inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

Dostáváme

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Pro $\boldsymbol{U}'$ v (9) analogicky platí

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Připomeňme, že inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ vždy existuje, neboť matice přechodu $\boldsymbol{A}$ je regulární. Vyjádříme-li totiž prvky nečárkované báze pomocí čárkované, máme

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a'_{jk}\boldsymbol{e}'_k, \tag{10}$$

kde $\boldsymbol{A}' = (a'_{jk})$ je matice přechodu od báze $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n\}$ k bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$. Dosazením za $\boldsymbol{e}_j$ z (10) do (4) dostaneme

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{n} a'_{jk}\boldsymbol{e}'_k = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ij}a'_{jk}\boldsymbol{e}'_k,$$

a odtud, porovnáme-li levou a pravou stranu poslední rovnosti, dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a'_{jk} = \delta_i^k,$$

tj. maticově vyjádřeno $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice. Součin dvou čtvercových matic je jednotková matice a to je možné pouze tehdy, jsou-li matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}'$ regulární.

Definujeme-li na zaměření V_n afinního prostoru A_n skalární součin, dostaneme eukleidovský prostor E_n. V eukleidovském prostoru je výhodné zvolit soustavu souřadnic $S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ tak, aby vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ byly jednotkové a vzájemně kolmé, tj. aby báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ byla ortonormální. Taková soustava souřadnic se nazývá *kartézská soustava souřadnic*[1]. Souřadnice bodu nazýváme *kartézské* (*pravoúhlé*) *souřadnice*.

Vyšetříme, jakým způsobem jsou souřadnice téhož bodu X vázány ve dvou různých kartézských soustavách. Předpokládejme, že

[1] Název kartézská soustava souřadnic je odvozen od jména zakladatele analytické geometrie, jímž je francouzský matematik R. Descartes (1596-1650), zvaný též podle latinského přepisu Cartesius.

v eukleidovském prostoru E_n máme dány dvě kartézské soustavy souřadnic S a S' a nechť X je libovolný bod. Použijeme téhož značení jako v případě transformace lineární soustavy souřadnic. Protože eukleidovský prostor je zároveň afinním prostorem, platí zde stejné transformační rovnice (7) a (9). Matice přechodu $\boldsymbol{A}$ od báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ k bázi $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ je zde navíc *ortogonální*, tj. platí pro ni vztah $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$. To snadno nahlédneme touto úvahou. Vynásobíme-li totiž skalárně rovnici $\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j$ vektorem $\boldsymbol{e}'_k$, dostaneme

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\boldsymbol{e}_s = \sum_{j,s=1}^{n} a_{ij}a_{ks}\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_s = \sum_{j,s=1}^{n} a_{ij}a_{ks}\delta_j^s = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}$$

a odtud v důsledku platnosti vztahu $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_i^j$ dostáváme $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$, odkud plyne $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Nyní podrobně rozebereme transformaci kartézské soustavy souřadnic v E_2, tj. v rovině. Předpokládejme, že v eukleidovské rovině je dána kartézská soustava souřadnic $S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, v níž má libovolný bod X roviny souřadnice $X = [x, y]$. Zvolme dále jinou kartézskou soustavu souřadnic $S' = \{Q, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, ve které má bod X souřadnice $X = [x', y']$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ k bázi $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, tj. platí vztah

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Nechť bod Q má v původní soustavě souřadnic S souřadnice $[p, q]$.
Protože $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}'_1| = |\boldsymbol{e}'_2| = 1$ a $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0$, proto

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad \text{a} \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0. \tag{11}$$

Z rovnic (11) plyne, že existuje jediný úhel φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, pro který platí $a_{11} = \cos\varphi$, $a_{12} = \sin\varphi$. Pro hodnoty a_{21} a a_{22} jsou nyní možné dva případy:

1) $a_{21} = -\sin\varphi$, $a_{22} = \cos\varphi$, nebo 2) $a_{21} = \sin\varphi$, $a_{22} = -\cos\varphi$.

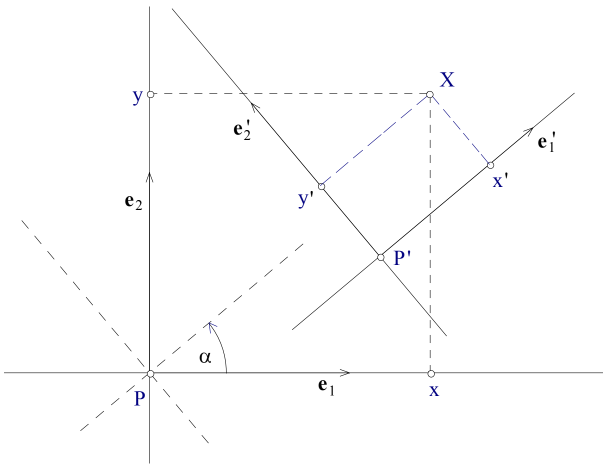
1) V prvním případě mají podle (7) transformační rovnice tvar

$$(x, y) = (x', y')\begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix} + (p, q) \ , \tag{12}$$

nebo po složkách

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + p, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + q. \end{aligned} \tag{13}$$

V tomto případě jsme soustavu souřadnic $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ posunuli do bodu P' a zároveň jsme otočili vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ kolem počátku P o (orientovaný) úhel α .



Všimněme si, že matice přechodu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je skutečně ortogonální a platí $\det \boldsymbol{A} = 1$. Tato vlastnost charakterizuje tzv. *přímé shodnosti* (otočení a posunutí).
Potřebujeme-li vyjádřit z (12) čárkované souřadnice pomocí nečárkovaných, stačí si uvědomit, že inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je rovna matici transponované $\boldsymbol{A}^T$, tj.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li zprava rovnost (12) inverzní maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$, dostaneme

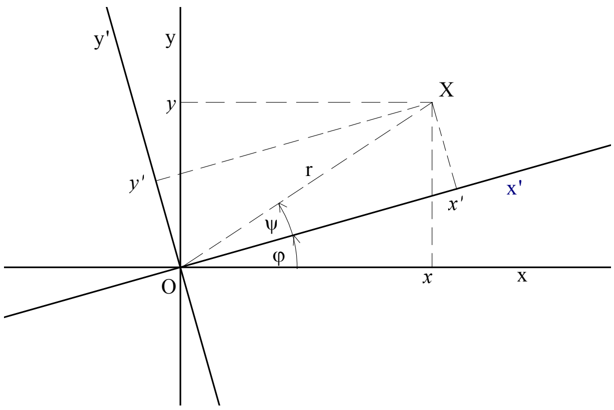
$$(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix} - (p, q)\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} x' &= \quad (x-p)\cos\varphi + (y-q)\sin\varphi, \\ x_2' &= -(x-p)\sin\varphi + (y-q)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Poznámka

Transformační vzorce (13) můžeme nalézt také následujícím velmi jednoduchým způsobem. Předpokládejme, že libovolný bod X má v kartézské soustavě souřadnic $S = \{P, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ souřadnice $X = [x, y]$ a v kartézské soustavě souřadnic $S' = \{P, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'\}$, která má stejný počátek jako S a je otočená o úhel φ, souřadnice $X = [x', y']$.



Pro souřadnice $[x, y]$ a $[x', y']$ bodu X platí vztahy

$$x = r\cos(\varphi + \psi)\,,\; y = r\sin(\varphi + \psi) \;\text{ a }\; x' = r\cos\psi\,,\; y' = r\sin\psi\,.$$

Rozepsáním podle součtových vzorců dostaneme

$$x = r\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi,$$
$$y = r\sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\sin\psi. \tag{14}$$

Dosazením za $x' = r\cos\psi$, $y' = r\sin\psi$ do (14) dostaneme rovnice

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \tag{15}$$

které vyjadřují závislost souřadnic $[x, y]$ a $[x', y']$ bodu X při otočení kartézské soustavy souřadnic S o úhel φ. Posuneme-li počátek P otočené soustavy souřadnic S' do bodu $P' = [p, q]$, dostaneme rovnice (13).
Transformační rovnice otočení a posunutí (13) můžeme vyjádřit pomocí matic také takto

$$(x, y, 1) = (x', y', 1)\begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi, & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ p, & q, & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Tento způsob budeme později často používat.

2) Ve druhém případě mají transformační vzorce tvar

$$(x, y) = (x', y')\begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ \sin\varphi, & -\cos\varphi \end{pmatrix} + (p, q) \tag{17}$$

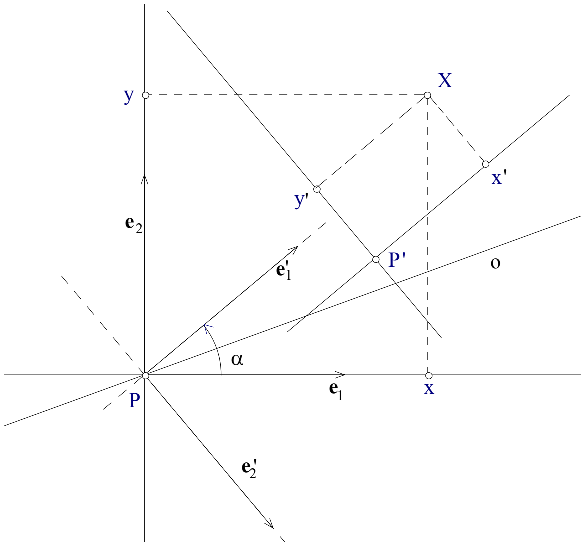
nebo

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + p,$$
$$y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + q. \tag{18}$$

Matice přechodu má nyní tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ \sin\alpha, & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

a platí pro ni $\det \boldsymbol{A} = -1$. Jedná se o tzv. *nepřímou shodnost* (posunutá osová souměrnost), obr.



Vidíme, že vektory $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ jsou obrazy vektorů $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ v osové souměrnosti s osou souměrnosti o.

Cvičení

1. Jestliže souřadnice bodu $X = [x, y]$ splňují rovnici $x\,y - 1 = 0$, jakou rovnici splňují jeho nové souřadnice x', y', když nová kartézská soustava souřadnic vznikla z původní soustavy otočením o 45°?

2. Napište transformační rovnice pro souřadnice téhož bodu X při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic k druhé kartézské soustavě souřadnic, která vznikne z první otočením o úhel 30°.

3. V rovině je dána transformace soustavy, jejíž rovnice jsou

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' - \frac{11}{5},$$
$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{27}{5}.$$

a) Zjistěte, zda se jedná o otočení a posunutí a pomocí pravítka a kružítka určete úhel otočení.
b) Určete rovnici přímky $x' = 0$ v nečárkované soustavě souřadnic.
c) Určete rovnici křivky $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0$ v čárkované soustavě souřadnic.

4. Transformace soustavy souřadnic je dána rovnicemi

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' - 1,$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' + 2.$$

a) Zjistěte, zda se jedná o otočení a posunutí a pomocí pravítka a kružítka určete úhel otočení.
b) Určete rovnici křivky $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ v čárkované soustavě souřadnic.
c) Určete rovnici přímky $y' = 0$ v nečárkované soustavě souřadnic

6 Uvedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar pomocí otočení a posunutí

Kuželosečky jako algebraické křivky 2. stupně

V této kapitole a dalších kapitolách budeme vyšetřovat kuželosečky z algebraického hlediska. Kuželosečku definujeme jako množinu bodů, jejichž souřadnice v dané soustavě souřadnic splňují algebraickou rovnici 2. stupně.

Definice

Kuželosečka nebo též *algebraická křivka 2. stupně* je množina bodů X v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují v nějaké lineární soustavě souřadnic rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

kde a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ jsou reálná čísla a $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.

Rovnici (1) nazveme rovnicí kuželosečky nebo krátce budeme hovořit o kuželosečce (1).

Poznámka

1) Pokud by v (1) platilo $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, potom by rovnice (1) byla lineární a vyjadřovala by přímku.
2) Vyjádření rovnice kuželosečky ve tvaru (1) (tj. s dvojkami u některých koeficientů) je čistě technické a umožňuje nám vyjádřit rovnici kuželosečky maticově

$$\begin{pmatrix} x, & y, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (2)$$

kde matice kuželosečky je symetrická, tj. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$.

3) *Algebraickou křivkou n-tého stupně* nazveme takovou křivku, jejíž body mají souřadnice, které vyhovují algebraické rovnici n-tého stupně, tj. polynomu či mnohočlenu n-tého stupně. Koeficienty polynomu jsou obvykle z nějakého tělesa. V této knížce je tímto tělesem těleso reálných čísel.

Naším cílem bude zjistit, které rovinné křivky splňují rovnici (1). K tomu, abychom provedli klasifikaci algebraických křivek 2. stupně, budeme postupovat následujícím způsobem.
Nejprve vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic, pomocí otočení a posunutí, zjednodušíme rovnici (1) na nejjednodušší možný tvar - tzv. kanonický tvar. Poté provedeme klasifikaci.
Rovnici (1) vyhovují všechny kuželosečky, které jsme zkoumali v předchozích kapitolách - elipsa, jejíž kanonická rovnice má tvar $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, hyperbola o rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ i parabola $y^2 - 2px = 0$. Kromě těchto regulárních kuželoseček, vyhovují rovnici (1) i tzv. singulární kuželosečky - dvě různoběžky, např. $bx + ay = 0$ a $bx - ay = 0$, dané rovnicí $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, dvě rovnoběžky, např. $x + a = 0$ a $x - a = 0$, dané rovnicí $x^2 - a^2 = 0$, jediný bod, např. bod $[0,0]$, který vyhovuje rovnici $x^2 + y^2 = 0$ či množina prázdná, která je dána např. rovnicí $x^2 + 1 = 0$. Ukážeme, že kromě těchto regulárních a singulárních kuželoseček, žádná jiná křivka rovnici (1) nevyhovuje.
Podáváme tak druhý možný přístup výkladu kuželoseček - tzv. *algebraický přístup*, na rozdíl od předchozího *geometrického přístupu*, kde jsme např. definovali kuželosečky jako řezy na rotační kuželové ploše. Pokud rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy, dostaneme podle Dandelinovy-Quételetovy věty regulární kuželosečky - elipsu, hyperbolu a parabolu. Pokud připustíme možnost, že rovina řezu prochází vrcholem kuželové plochy, dostaneme všechny ostatní singulární případy. Abychom tímto způsobem získali všechny singulární kuželosečky zahrneme mezi kuželovou plochu i plochu válcovou, kterou můžeme chápat jako kuželovou plochu s vrcholem v nekonečnu.
Zavedení kuželoseček geometricky nebo algebraicky tedy vede na stejnou třídu křivek, které budeme nazývat *kuželosečky*. Právě naznačený způsob výkladu je často užitečný i při zkoumání jiných objektů. Daný objekt můžeme zkoumat algebraickými i geometrickými metodami. Jako jednoduchý příklad poslouží soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, na kterou se můžeme dívat jako na soustavu algebraických rovnic nebo jako na dvě přímky v rovině.

Uvedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar pomocí otočení a posunutí

Je dána kuželosečka κ, jejíž rovnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic je

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Změníme-li soustavu souřadnic, změní se i rovnice (1) kuželosečky κ. Naším úkolem bude najít takovou soustavu souřadnic, ve které bude rovnice kuželosečky κ co nejjednodušší. Vhodnou soustavu souřadnic nalezneme pomocí otočení a posunutí.

Nechť $S = \{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ je kartézská soustava souřadnic, v níž má kuželosečka κ rovnici (1). Mějme nyní jinou kartézskou soustavu souřadnic $S' = \{P, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ a předpokládejme, že soustava S' vznikla ze soustavy S otočením okolo bodu P o úhel α. Potom pro souřadnice $[x, y]$ resp. $[x', y']$ libovolného bodu X eukleidovské roviny E_2, vyjádřené v soustavě S resp. S' platí podle (15) z kapitoly 5 vztah

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Dosadíme-li za x a y ze vztahů (2) do rovnice kuželosečky (1), dostaneme rovnici

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{3}$$

kde

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\
a'_{12} &= -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\
a'_{13} &= a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\
a'_{23} &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\
a'_{33} &= a_{33}.
\end{aligned}$$

Zvolme úhel otočení α tak, aby v rovnici (3) vymizel člen obsahující součin $x'y'$, tj. aby $a'_{12} = 0$. Potom platí

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

a odtud

$$a_{12}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha = 0. \tag{4}$$

Můžeme předpokládat, že $a_{12} \neq 0,$ neboť v opačném případě by již člen obsahující součin xy nebyl v rovnici (1) obsažen. Odtud plyne, že $\sin 2\alpha \neq 0,$ (kdyby totiž $\sin 2\alpha = 0$ potom ze (4) plyne $a_{12} = 0$ a to je spor). Lze tedy rovnici (4) psát ve tvaru

$$\operatorname{cotan} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5}$$

Všimněme si, že rovnice (5) má v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ právě jedno řešení. S pomocí vzorce (5) tedy umíme nalézt takový úhel α, že rovnice (3) kuželosečky v soustavě souřadnic otočené o úhel α již neobsahuje člen $a'_{12}x'y'$. Pro danou hodnotu α zaveďme tradiční označení $a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{22} = \lambda_2$, tj. rovnice kuželosečky má nyní tvar

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{6}$$

Alespoň jedno z čísel λ_1, λ_2 je různé od nuly, neboť jinak by (6) nebyla rovnicí kuželosečky. Pokusme se rovnici (6) vhodnou volbou soustavy souřadnic dále zjednodušit.
Budeme rozlišovat dva případy:

1) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$ - *eliptický a hyperbolický případ*,
2) právě jedno z čísel λ_1, λ_2 je rovno nule - *parabolický případ*.

Případ 1) V rovnici (6) doplníme členy, které obsahují x' na úplný čtverec. Totéž provedeme se členy, které obsahují y'. Dostáváme

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2} = 0. \tag{7}$$

Položme

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}.$$

Tyto rovnice vyjadřují posunutí počátku P soustavy souřadnic do bodu $\left[-\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right]$. Označíme-li dále $a''_{33} = a'_{33} - \frac{{a'_{13}}^2}{\lambda_1} - \frac{{a'_{23}}^2}{\lambda_2}$, můžeme rovnici (7) psát ve tvaru

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a''_{33} = 0. \tag{8}$$

Nyní jsou opět možné dva případy:

1a) λ_1, λ_2 mají stejná znaménka - *eliptický případ*,

1b) λ_1, λ_2 mají různá znaménka - *hyperbolický případ*.

Případ 1a) Předpokládejme nejprve, že $a''_{33} \neq 0$. Pak lze (8) psát ve tvaru

$$\frac{x''^2}{-\frac{a''_{33}}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{a''_{33}}{\lambda_2}} = 1. \tag{9}$$

Mají-li koeficienty λ_1, λ_2 a koeficient a''_{33} opačná znaménka, potom je $-\frac{a''_{33}}{\lambda_1} > 0$, $-\frac{a''_{33}}{\lambda_2} > 0$. Označíme-li $a = \sqrt{-\frac{a''_{33}}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{a''_{33}}{\lambda_2}}$, lze (9) psát

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Rovnice (10) je *kanonická rovnice elipsy* o poloosách a, b.

Je-li znaménko koeficientů λ_1, λ_2 a koeficientu a''_{33} stejné, je $-\frac{a''_{33}}{\lambda_1} < 0$, $-\frac{a''_{33}}{\lambda_2} < 0$. Označíme-li $a = \sqrt{\frac{a''_{33}}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{a''_{33}}{\lambda_2}}$, lze (9) psát ve tvaru

$$-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Množina bodů vyhovující této rovnici je množina prázdná. Rovnice (11) je *rovnice imaginární elipsy*.

Je-li konečně $a''_{33} = 0$, má rovnice (8) tvar

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0. \tag{12}$$

Jelikož λ_1, λ_2 mají stejná znaménka, vyhovuje rovnici (12) jediný bod $[0,0]$. Říkáme, že (12) je *rovnice dvou imaginárních přímek*, které se protínají v jediném reálném bodě.

Případ 1b) Nechť opět nejprve $a''_{33} \neq 0$. Potom lze rovnici (8) psát ve tvaru (9). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že znaménko λ_2 je stejné jako znaménko a''_{33} (v opačném případě prohodíme vektory báze). Je $-\dfrac{a''_{33}}{\lambda_1} > 0$, $-\dfrac{a''_{33}}{\lambda_2} < 0$. Položme $a = \sqrt{-\dfrac{a''_{33}}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\dfrac{a''_{33}}{\lambda_2}}$.
Potom lze (9) psát

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1. \tag{13}$$

Rovnice (13) je *kanonická rovnice hyperboly* o poloosách a, b.

Je-li $a''_{33} = 0$, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Položíme-li $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = -\lambda_2$, má rovnice (12) tvar

$$a^2 x''^2 - b^2 y''^2 = 0, \tag{14}$$

tj.

$$(ax'' - by'')(ax'' + by'') = 0\,.$$

Jedná se o *rovnici dvou různoběžek* $y'' = \dfrac{a}{b} x''$, $y'' = -\dfrac{a}{b} x''$.

Případ 2) Předpokládejme, že $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, a nechť např. $\lambda_1 \neq 0$ - *parabolický případ*. Rovnice (6) má tvar

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33} = 0. \tag{15}$$

Členy obsahující x' doplníme na úplný čtverec

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2+2a'_{23}y'+a'_{33}-\frac{a'^{\,2}_{13}}{\lambda_1}=0 \tag{16}$$

a položíme

$$x''=x'+\frac{a'_{13}}{\lambda_1}.$$

Je-li $a'_{23}\neq 0$, dostaneme

$$x''^2+\frac{2a'_{23}}{\lambda_1}\left(y'+\frac{\lambda_1 a'_{33}-a'^{\,2}_{13}}{2a'_{23}\lambda_1}\right)=0. \tag{17}$$

Označíme-li dále

$$p=\frac{a'_{23}}{\lambda_1},\quad y''=y'+\frac{\lambda_1 a'_{33}-a'^{\,2}_{13}}{2a'_{23}\lambda_1},$$

máme

$$x''^2+2py''=0. \tag{18}$$

Rovnice (18) je *kanonická rovnice paraboly*.

Je-li $a'_{23}=0$, má rovnice (16) tvar

$$\lambda_1 x''^2+a'_{33}-\frac{a'^{\,2}_{13}}{\lambda_1}=0, \tag{19}$$

po úpravě

$$x''^2+\frac{\lambda_1 a'_{33}-a'^{\,2}_{13}}{\lambda_1^2}=0. \tag{20}$$

Mohou nastat dvě možnosti:

Je-li $\lambda_1 a'_{33}-a'^{\,2}_{13}\leq 0$, položme $a^2=-\dfrac{\lambda_1 a'_{33}-a'^{\,2}_{13}}{\lambda_1^2}$ a v rovnici (20) máme

$$x''^2-a^2=0,$$

tj.

$$(x'' - a)(x'' + a) = 0\,.$$

Jde o *rovnici dvou rovnoběžek* $x'' = a$, $x'' = -a$, které v případě $a = 0$ splynou v jedinou přímku.

Je-li nakonec $\lambda_1 a'_{33} - {a'_{13}}^2 > 0$, položme $a^2 = \dfrac{\lambda_1 a'_{33} - {a'_{13}}^2}{\lambda_1^2}$. V rovnici (20) pak dostaneme

$$x''^2 + a^2 = 0.$$

Této rovnici nevyhovuje žádný reálný bod. Je to *rovnice dvou imaginárních rovnoběžek*.

Vyšetřili jsme všechny případy rovnice (1), které mohou nastat. Říkáme, že jsme provedli úplnou klasifikaci kuželoseček. Výsledky shrneme do věty:

Věta
Každá křivka druhého řádu je buď elipsa (reálná nebo imaginární) nebo hyperbola nebo parabola nebo dvojice imaginárních přímek, které se protínají v jediném reálném bodě (eliptický případ), nebo dvojice různoběžek (hyperbolický případ), nebo dvojice rovnoběžek různých, splývajících, imaginárních (parabolický případ).

Příklad 1
Vyšetřete kuželosečku, která má v dané soustavě souřadnic rovnici

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0. \tag{21}$$

Řešení: Kuželosečku vyjádříme v kanonickém tvaru. Podle (5) je

$$\operatorname{cotan} 2\alpha = \frac{3-3}{-2} = 0.$$

Pro $\alpha \in (0, 90°)$ vyhovuje jediný úhel $\alpha = 45°$. Dosazením do (2) dostáváme transformační vzorce

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45°,$$
$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45°,$$

tj. platí

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (22)$$

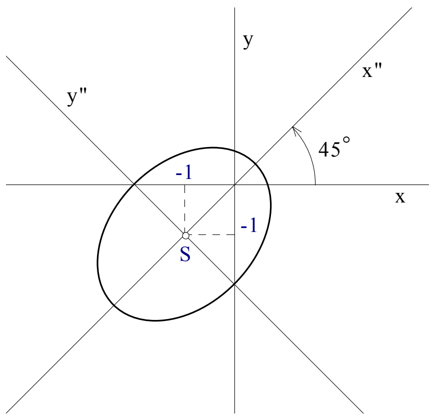
Dosazením vzorců (22) do rovnice kuželosečky (21) po úpravě dostáváme

$$x'^2 + 2x'\sqrt{2} + 2y'^2 - 2 = 0.$$

Výrazy obsahující x' doplníme na čtverec, položíme $x'' = x' + \sqrt{2}$, $y'' = y'$ a vzniklou rovnici vydělíme čtyřmi. Dostáváme kanonickou rovnici

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{2} = 1. \qquad (23)$$

Kuželosečka je elipsa o poloosách $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, jejíž střed má v původní soustavě souřadnic souřadnice $S = [-1,-1]$.



Příklad 2
Vyšetřete kuželosečku

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0. \qquad (24)$$

Řešení: Podle (5) je

$$\text{cotan}\,2\alpha = \frac{9-16}{24} = -\frac{7}{24}.$$

K tomu, abychom zjistili hodnotu $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ použijeme vzorec

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

a odtud

$$\text{cotan}2\alpha = \frac{\text{cotan}^2\alpha - 1}{2\text{cotan}\alpha}.$$

Pro výpočet $\text{cotan}\alpha$ tak dostáváme kvadratickou rovnici

$$\text{cotan}^2\alpha + \frac{7}{12}\text{cotan}\alpha - 1 = 0,$$

která má jediné nezáporné řešení $\text{cotan}\alpha = \frac{3}{4}$.

Použitím vztahů

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\text{cotan}^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha = \frac{\text{cotan}^2\alpha}{1+\text{cotan}^2\alpha},$$

dostaneme $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Transformační vzorce tedy mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', \\ y &= \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'. \end{aligned} \tag{25}$$

Dosazením těchto vztahů do (24) máme rovnici

$$25x'^2 - 150x' - 150y' + 975 = 0$$

nebo

$$(x'-3)^2 - 6(y'-5) = 0.$$

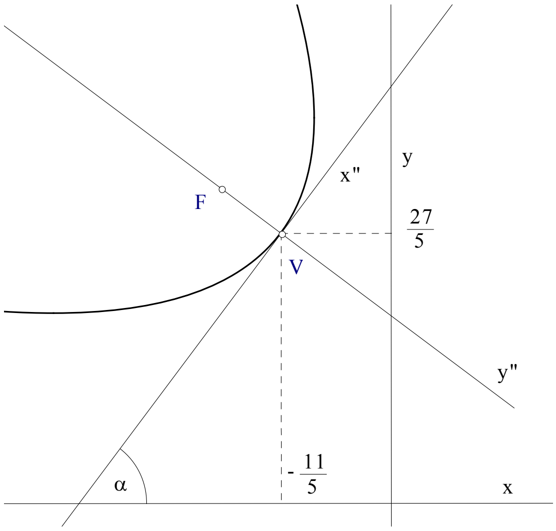
Označíme-li

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 3 \\ y'' &= y' - 5, \end{aligned} \tag{26}$$

máme konečně

$$x''^2 = 6y''. \tag{27}$$

Jedná se o parabolu, jejíž parametr $p = 3$. Dosazením x', y' ze vztahů (26) do rovnic (25) dostaneme transformační vzorce mezi původní



kartézskou soustavou souřadnic a novou „dvoučárkovanou“ soustavou souřadnic

$$x = \frac{3}{5}x'' - \frac{4}{5}y'' - \frac{11}{5},$$
$$y = \frac{4}{5}x'' + \frac{3}{5}y'' + \frac{27}{5}.$$

V původní soustavě souřadnic je $V = \left[-\frac{11}{5}, \frac{27}{5}\right]$ a osa paraboly má rovnici $o:\quad 3x + 4y - 15 = 0$.

Příklad 3
Určete kanonický tvar kuželosečky

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0. \tag{28}$$

Řešení: Je $\text{cotan}2\alpha = -\frac{4}{3}$. Stejným způsobem jako při řešení příkladu 2 dostaneme $\text{cotan}\alpha = \frac{1}{3}$ a odtud $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Transformační rovnice tedy jsou

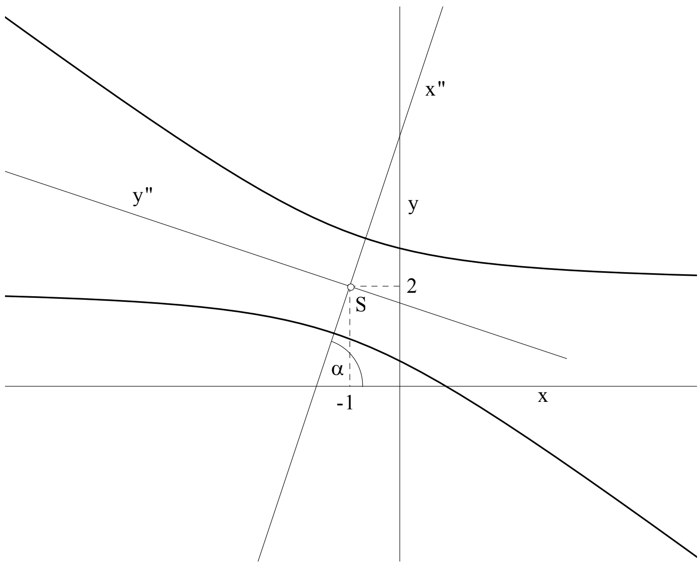
$$x = \frac{1}{\sqrt{10}} x' - \frac{3}{\sqrt{10}} y', \qquad y = \frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y'. \tag{29}$$

Dosazením do rovnice kuželosečky (28) máme

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0,$$

odtud

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$



Položíme-li $x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}$, dostaneme kanonický tvar

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Kuželosečka (28) je hyperbola o poloosách $a = 1$, $b = 3$. V původní „nečárkované“ soustavě souřadnic má hyperbola střed $S = [-1,2]$ a rovnice hlavní osy o je $o: \ 3x - y + 5 = 0$.

Příklad 4

Vyšetřete kuželosečku

$$3x^2 + xy - 2y^2 - 8x + 7y - 3 = 0. \tag{30}$$

Řešení: Počátek soustavy souřadnic nejprve posuneme do zatím neznámého bodu $[p, q]$, tj. položíme

$$\begin{aligned} x &= x' + p, \\ y &= y' + q. \end{aligned} \tag{31}$$

Po dosazení rovnic (31) do (30) dostaneme

$$\begin{aligned} &3x'^2 + x'y' - 2y'^2 + x'(6p + q - 8) + y'(p - 4q + 7) + 3p^2 + pq - 2q^2 - \\ &- 8p + 7q - 3 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Čísla p, q zvolme tak, aby platilo

$$\begin{aligned} 6p + q - 8 &= 0, \\ p - 4q + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud $p = 1$, $q = 2$. Pro tyto hodnoty má rovnice (32) tvar

$$3x'^2 + x'y' - 2y'^2 = 0. \tag{33}$$

Provedeme rozklad kvadratického trojčlenu na levé straně (33). Řešíme-li (33) jako kvadratickou rovnici pro neznámou x', dostaneme dvě řešení $x'_1 = -y'$, $x'_2 = \dfrac{2}{3}y'$.

Rovnice (33) má tvar

$$3(x' + y')\left(x' - \frac{2}{3}y'\right) = 0, \text{ tj. } (x' + y')(3x' - 2y') = 0.$$

Kuželosečka se skládá z dvojice různoběžek, které mají v čárkované soustavě souřadnic rovnice

$$\begin{aligned} x' + y' &= 0, \\ 3x' - 2y' &= 0. \end{aligned} \qquad (34)$$

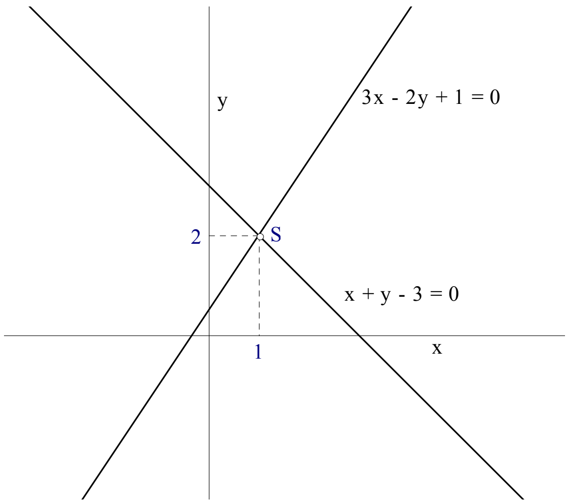
Dosadíme-li za x', y' ze vztahů (31) pro $p = 1,\ q = 2$ do (34), mají různoběžky, z nichž se skládá kuželosečka (30), v původní soustavě rovnice

$$x + y - 3 = 0 \quad \text{a} \quad 3x - 2y + 1 = 0.$$

Tyto různoběžky se protínají v bodě $S = [1, 2]$. O správnosti postupu se lze snadno přesvědčit, neboť rovnice (30) a rovnice

$$(x + y - 3)(3x - 2y + 1) = 0$$

jsou totožné.



Na uvedených příkladech jsme ukázali převedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar. V prvních třech příkladech jsme nejprve soustavu souřadnic otočili a potom posunuli. Čtvrtý příklad ukazuje, že je někdy vhodný i postup, ve kterém nejprve užijeme posunutí.

Cvičení

1. Pomocí posunutí soustavy souřadnic napište kanonický tvar kuželosečky a kuželosečku nakreslete
   a) $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 1 = 0$,

b) $3x^2 - 2y^2 - 2x - 5y + 5 = 0$,

c) $3x^2 - 2x + 5y - 6 = 0$

2. Pomocí otočení a posunutí soustavy souřadnic napište kanonický tvar kuželosečky a kuželosečku nakreslete

a) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$,

b) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 6y + 1 = 0$,

c) $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 32x + 26y + 89 = 0$,

d) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$

e) $x^2 - xy + 1 = 0$.

7 Obecné vlastnosti kuželoseček

Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

V lineární soustavě souřadnic mějme dánu kuželosečku κ o rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

a přímku p, která je dána bodem $M = [m, n]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v)$, tj. přímka p má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} p: \quad x &= m + tu, \\ y &= n + tv. \end{aligned} \tag{2}$$

Zkoumejme vzájemnou polohu kuželosečky κ a přímky p. Dosaďme rovnice (2) do rovnice kuželosečky (1). Máme

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{3}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} A &= a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2, \\ B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}), \\ C &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33}. \end{aligned} \tag{4}$$

Při řešení rovnice (3) mohou nastat tyto případy:

1) $A = 0,\ B \neq 0,\ C$ libovolné $\Rightarrow$ jediný kořen $t = -\dfrac{C}{2B}$ $\Rightarrow$ jediný průsečík,
2) $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0$ $\Rightarrow$ žádné řešení $\Rightarrow$ žádný průsečík,
3) $A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ $\Rightarrow$ každé reálné číslo je řešením $\Rightarrow$ každý bod přímky náleží kuželosečce,
4) $A \neq 0,\ B^2 - AC > 0$ $\Rightarrow$ dva různé kořeny $\Rightarrow$ dva průsečíky,
5) $A \neq 0,\ B^2 - AC = 0$ $\Rightarrow$ jeden dvojnásobný kořen $\Rightarrow$ jeden dvojnásobný průsečík,
6) $A \neq 0,\ B^2 - AC < 0$ $\Rightarrow$ žádné řešení $\Rightarrow$ žádný průsečík.

Z přehledu můžeme vidět, že přímka nemá s kuželosečkou žádný společný bod - případy 2 a 6, nebo má s kuželosečkou jeden společný bod - případy 1 a 5, nebo dva společné body - případ 4, nebo přímka náleží

kuželosečce - případ 3. V případě 1 se jedná o jednoduchý průsečík přímky s kuželosečkou, zatímco v případě 5 se jedná o tečnu kuželosečky. Také případy 2 a 6 se kvalitativně liší a budeme se jimi zabývat podrobněji. Dále vidíme, že přímka nemůže mít s kuželosečkou společné např. tři body. Pokud tedy zjistíme, že přímka má s kuželosečkou společné tři body, plyne odtud, že všechny body přímky náleží kuželosečce.
Při určování vzájemné polohy přímky a kuželosečky jsme při hledání společných bodů dospěli k rovnici (3). Tato rovnice je pro $A \neq 0$ kvadratická a pro $A = 0$ a $B \neq 0$ je to rovnice lineární. Je-li $A = 0$ a $B = 0$, rovnice (3) není ani kvadratická ani lineární. Naše další zkoumání se bude zabývat jednotlivými, shora uvedenými případy.

Asymptotický směr kuželosečky

V lineární soustavě souřadnic je dána kuželosečka

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,. \tag{1}$$

Definice
Směr, určený nenulovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v)$, pro který platí

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0, \tag{2}$$

nazýváme *asymptotický směr kuželosečky* (1).

Poznámka
Rovnice (2) je vlastně podmínka $A = 0$, kde A je koeficient v rovnici

$$At^2 + 2Bt + C = 0\,. \tag{3}$$

V tomto případě není tedy rovnice (3) kvadratická.

Ověříme, zda je definice asymptotického směru kuželosečky nezávislá na volbě soustavy souřadnic. Při transformaci lineární soustavy souřadnic

$$\begin{aligned} u &= \alpha u' + \gamma v', \\ v &= \beta u' + \delta v' \end{aligned} \tag{4}$$

dostáváme

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 =$$
$$= a_{11}(\alpha u' + \gamma v')^2 + 2a_{12}(\alpha u' + \gamma v')(\beta u' + \delta v') + a_{22}(\beta u' + \delta v')^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)u'^2 + 2\left[a_{11}\alpha\gamma + a_{12}(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_{22}\beta\delta\right]u'v' +$$
$$+ (a_{11}\gamma^2 + 2a_{12}\gamma\delta + a_{22}\delta^2)v'^2 = a'_{11}u'^2 + 2a'_{12}u'v' + a'_{22}v'^2.$$

Výraz $a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2$ přejde při afinní transformaci (4) do výrazu $a'_{11}u'^2 + 2a'_{12}u'v' + a'_{22}v'^2$ a definice asymptotického směru (2) je korektní.

Vypočítejme asymptotické směry kuželosečky (1). Ty jsou dány rovnicí (2). Předpokládejme, že $a_{11} \neq 0$. Odtud plyne, že $v \neq 0$ (souřadnice u, v nemohou být současně rovny nule) a rovnici (2) můžeme přepsat na tvar

$$a_{11}\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{u}{v}\right) + a_{22} = 0. \tag{5}$$

Odtud dostáváme

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Označme $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ diskriminant kvadratické rovnice (5).

1) Je-li $D > 0$, má kuželosečka (1) dva různé asymptotické směry

$$\boldsymbol{u}_1 = (-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}),$$
$$\boldsymbol{u}_2 = (-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}).$$

2) Je-li $D = 0$, má kuželosečka (1) jediný asymptotický směr

$$\boldsymbol{u} = (-a_{12}, a_{11}).$$

3) Je-li $D < 0$, asymptotické směry kuželosečky (1) neexistují.

Obdobně postupujeme, je-li $a_{22} \neq 0$.

Je-li v rovnici (2) $a_{11} = a_{22} = 0$, je koeficient a_{12} různý od nuly (proč?). V tomto případě se (2) redukuje na tvar

$$a_{12}u\,v = 0$$

a řešením je dvojice $\boldsymbol{u}_1 = (u, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, v)$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Asymptotické směry jsou v tomto případě směry určené vektory báze $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$.
Označme

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

tzv. *malý determinant kuželosečky* (1). Potom můžeme předchozí výsledky shrnout do věty:

Věta
Je-li $\delta > 0$, kuželosečka (1) nemá žádný asymptotický směr - říkáme, že kuželosečka je *eliptického typu*.
Je-li $\delta = 0$, kuželosečka (1) má jediný asymptotický směr - kuželosečka je v tomto případě *parabolického typu*.
Konečně, je-li $\delta < 0$, má kuželosečka (1) dva různé asymptotické směry - kuželosečka je *hyperbolického typu*.

Příklad
Určete asymptotické směry kuželosečky

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0. \tag{6}$$

Řešení: Je $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0$. Existují tedy dva různé asymptotické směry a kuželosečka (6) je hyperbolického typu. Výpočet vede na řešení rovnice

$$6uv + 8v^2 = 0 \quad \text{a odtud} \qquad v(3u + 4v) = 0.$$

Jeden asymptotický směr je $\boldsymbol{u}_1 = (u, 0)$, $u \neq 0$, tedy lze např. volit $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0)$. Pro druhý asymptotický směr $\boldsymbol{u}_2$ je např. $\boldsymbol{u}_2 = (4, -3)$.

Příklad
Určete rovnici kuželosečky, jejímiž asymptotickými směry jsou vektory souřadnicového systému $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$.

Řešení: Pro asymptotické směry platí např. $\boldsymbol{u}_1 = (1,0)$ a $\boldsymbol{u}_2 = (0,1)$.
Z rovnice

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0$$

dostáváme při dosazení $u = 1,\ v = 0$ podmínku $a_{11} = 0,$ při dosazení $u = 0,\ v = 1$ podmínku $a_{22} = 0.$ Kuželosečka, jejíž asymptotickými směry jsou směry os lineární soustavy souřadnic, má rovnici

$$2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Zabývejme se podrobněji případem vzájemné polohy kuželosečky a přímky, jejíž směr je asymptotický. Při shodném označení má rovnice (3) tvar

$$2Bt + C = 0. \tag{7}$$

Rozlišíme tři případy:

1) Je-li $B \neq 0,$ potom má rovnice (7) jediné řešení $t = -\dfrac{C}{2B}$ a přímka a kuželosečka mají jediný společný bod.
2) Je-li $B = 0,\ C = 0,$ řešením rovnice (7) je každé reálné t a přímka je součástí kuželosečky.
3) Je-li $B = 0$ a $C \neq 0,$ přímka kuželosečku neprotíná. Taková přímka se nazývá *asymptota kuželosečky*.

Tedy platí:

Věta
Přímka asymptotického směru protíná kuželosečku buď v jediném bodě nebo je součástí kuželosečky nebo kuželosečku neprotíná (asymptota).

Střed kuželosečky

Mějme dánu kuželosečku κ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

a přímku p

$$p: \quad \begin{aligned} x &= m + tu, \\ y &= n + tv \end{aligned} \tag{2}$$

a zkoumejme jejich společné body. Tato úloha vede na řešení rovnice

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{3}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2, \\ B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}), \\ C &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33}. \end{aligned} \tag{4}$$

Případ $A = 0$ jsme zkoumali v kapitole o asymptotických směrech kuželosečky. Nyní se budeme zabývat případem $B = 0$.
Předpokládejme, že $M = [m, n]$ je takový bod v rovině kuželosečky, že pro každou přímku p procházející bodem M bude hodnota B ve vztahu (4) rovna nule. To znamená, že pro souřadnice m, n bodu M budou platit rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13} &= 0, \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Rovnice (3) se v tomto případě bude redukovat na tvar

$$At^2 + C = 0. \tag{6}$$

Má-li rovnice (6) pro nějaké u, v kořen t_0, je jejím kořenem i číslo $-t_0$. Přímka p má tedy s kuželosečkou společné body X_1, X_2, kde

$$\begin{aligned} X_1 &= [m + t_0 u, n + t_0 v], \\ X_2 &= [m - t_0 u, n - t_0 v]. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že bod M je středem úsečky X_1X_2, tj. platí

$$M = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2.$$

Bude proto přirozené nazvat takový bod středem kuželosečky.

Definice
Bod M nazveme *středem kuželosečky*, jestliže má následující vlastnost: Je-li X libovolný bod kuželosečky, potom existuje bod Y kuželosečky takový, že bod M je středem úsečky XY.

O středu kuželosečky platí následující věta:

Věta
Bod $M=[m,n]$ je středem kuželosečky (1) právě když platí

$$\begin{aligned} a_{11}m+a_{12}n+a_{13}&=0,\\ a_{21}m+a_{22}n+a_{23}&=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz: Již jsme ukázali, že podmínka (7) je postačující, tj. z platnosti rovnic (7) plyne, že bod M je středem kuželosečky (1). Ukážeme, že podmínka (7) je i podmínkou nutnou.
Předpokládejme, že bod $M=[m,n]$ je středem kuželosečky (1) a nechť dále $X_1=[x_1,y_1]$ je libovolný bod kuželosečky (1). Podle definice středu existuje bod $X_2=[x_2,y_2]$ takový, že platí

$$\begin{aligned} m&=\frac{x_1+x_2}{2},\\ n&=\frac{y_1+y_2}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Body X_1 a X_2 leží na přímce p o rovnici

$$p:\quad \begin{aligned} x&=m+tu,\\ y&=n+tv, \end{aligned}$$

proto platí

$$\begin{aligned} x_1&=m+t_1u,\\ y_1&=n+t_1v \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_2&=m+t_2u,\\ y_2&=n+t_2v. \end{aligned}$$

Dosazením do (8) dostaneme podmínky

$$u\frac{t_1+t_2}{2}=0,\qquad v\frac{t_1+t_2}{2}=0.$$

Jelikož u a v nemohou být současně rovny nule, plyne odtud

$$t_1+t_2=0. \tag{9}$$

Protože t_1 a t_2 jsou kořeny rovnice (3), ze vztahu (9) plyne podmínka $B=0$ a odtud plynou, protože směr daný čísly u,v je libovolný, podmínky (7). □

Definice
Kuželosečka, která má jediný střed, se nazývá *středová kuželosečka*.

Z předchozí věty plyne, že kuželosečka má jediný střed právě když má soustava rovnic (7) jediné řešení a to nastává, jak známo z algebry, právě když pro malý determinant δ platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10}$$

V kapitole o asymptotických směrech jsme ukázali, že v případě $\delta > 0$ kuželosečka nemá asymptotický směr a kuželosečka je tzv. eliptického typu, v případě $\delta < 0$ má kuželosečka dva různé asymptotické směry a kuželosečka je tzv. hyperbolického typu. Středové kuželosečky jsou tedy pouze eliptického nebo hyperbolického typu, tj. nemají buď žádný asymptotický směr nebo mají dva asymptotické směry.

Uvažujme nyní středovou kuželosečku a předpokládejme, že tato kuželosečka má rovnici (1).

Pro střed S kuželosečky nechť platí $S = [m, n]$. Provedeme-li posunutí počátku soustavy souřadnic do středu S, platí transformační vzorce

$$\begin{aligned} x &= x' + m, \\ y &= y' + n. \end{aligned} \tag{11}$$

Dosazení (11) do rovnice (1) dává

$$\begin{aligned} &a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + x'(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + y'(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) + \\ &+ a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Označíme-li konstantní člen v (12) symbolem a'_{33}, potom vzhledem k tomu, že platí (7), má rovnice (12) tvar

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \tag{13}$$

Můžeme tedy říci, že každou středovou kuželosečku lze vyjádřit ve tvaru (13).

Kuželosečky, pro které platí $\delta = 0$, jsou parabolického typu a mají, jak známo, jediný asymptotický směr. Tyto kuželosečky budeme nazývat *nestředové kuželosečky*. Tyto kuželosečky buď střed nemají nebo mají středů nekonečně mnoho, jak uvidíme z následujících příkladů.

Příklad 1

Najděte střed kuželosečky a napište její rovnici, posuneme-li počátek soustavy souřadnic do středu kuželosečky

$$3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0. \tag{14}$$

Řešení: Je

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{4} \neq 0.$$

Kuželosečka je tedy středová. Pro souřadnice m, n středu S platí

$$3m + \frac{5}{2}n - 4 = 0$$

$$\frac{5}{2}m + n - \frac{11}{2} = 0.$$

Podle Cramerova pravidla získáme

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5/2 \\ 11/2 & 1 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{-\frac{39}{4}}{-\frac{13}{4}} = 3, \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5/2 & 11/2 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{\frac{13}{2}}{-\frac{13}{4}} = -2.$$

Střed S má tedy souřadnice $S = [3, -2]$.

Transformační rovnice

$$x = x' + 3,$$

$$y = y' - 2$$

dosadíme do rovnice (14) a po úpravě dostaneme

$$3x'^2 + 5x'y' + y'^2 - 8 = 0.$$

Příklad 2

Určete střed kuželosečky

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0. \tag{15}$$

Řešení: Je

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy kuželosečka je nestředová, parabolického typu. Ačkoliv kuželosečka není středová, vyšetříme množinu středů. Střed kuželosečky (15) musí splňovat soustavu

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3 &= 0, \\ -2x + y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že tato soustava nemá řešení, tj. střed neexistuje.

Příklad 3

Určete střed kuželosečky

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 4y + 13 = 0. \tag{16}$$

Řešení: Máme

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stejně jako v předchozím případě, kuželosečka (16) je nestředová. Pro střed platí soustava

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 4 &= 0, \\ -2x + y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ihned vidíme, že první rovnice je násobkem druhé a řešením je celá přímka p středů

$$p: \quad -2x + y + 2 = 0.$$

Cvičení

1. Určete průsečíky kuželosečky $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ s přímkou
   a) $5x - y - 5 = 0$,
   b) $x + 2y + 2 = 0$,
   c) $x + 4y - 1 = 0$
   d) $x - 3y = 0$.
2. Určete průsečíky přímek, procházejících počátkem, s kuželosečkou $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.
3. Najděte průsečíky přímky $x = p$ s kuželosečkou $x^2 - 2xy + 2x + 3y - 5 = 0$.

4. Jaká je vzájemná poloha přímky $x + y + 1 = 0$ a kuželosečky $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$?
5. Určete asymptotické směry kuželosečky
   a) $x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$,
   b) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.
6. Pro které p má kuželosečka $x^2 + 2pxy + y^2 - 3 = 0$ právě jeden asymptotický směr?
7. Napište rovnici kuželosečky, která má směry os x a y za své asymptotické směry.
8. U kuželosečky $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$ určete asymptoty jako přímky, které mají asymptotický směr a danou regulární kuželosečku neprotínají.
9. Určete rovnici kuželosečky tak, aby měla osy x a y za své asymptoty.
10. Určete asymptotické směry kuželosečky, jejíž rovnice má tvar $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$.
11. Určete střed následujících kuželoseček
    a) $y^2 - 10x - 2y = 0$,
    b) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$,
    c) $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$,
    d) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$,
    e) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
    f) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

8 Singulární kuželosečky

Je dána kuželosečka κ rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Definice
Singulárním bodem kuželosečky κ nazveme takový bod $X = [x, y]$, pro který platí

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Z prvních dvou rovnic (2) je zřejmé, že singulární bod kuželosečky je jejím středem, třetí rovnice v (2) říká, že singulární bod je bodem kuželosečky. Platí totiž, že (1) je ekvivalentní s rovnicí

$$x(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0\,.$$

Výsledek shrňme do věty:

Věta
Singulární bod kuželosečky je bodem kuželosečky a zároveň jejím středem.

Označme dále

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{K} \tag{3}$$

determinant matice $\boldsymbol{K}$ kuželosečky κ. Determinant Δ se nazývá *velký determinant kuželosečky*.

Definice
Kuželosečka se nazývá *singulární*, jestliže platí

$$\Delta = 0. \tag{4}$$

Nejprve ukážeme, že podmínka (4) je afinní invariant, tj. nezávisí na volbě lineární soustavy souřadnic.
Předpokládejme, že v nějaké lineární soustavě souřadnic má kuželosečka κ rovnici (1). Nechť v jiné lineární soustavě souřadnic má kuželosečka κ rovnici

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \qquad (5)$$

Podle (16) z kapitoly 5, vztah mezi nečárkovanými a čárkovanými souřadnicemi lze vyjádřit maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix},$$

nebo

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{C},$$

kde $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}$ je matice afinní transformace. Napišme ještě maticově rovnici kuželosečky κ v nečárkované resp. čárkované afinní soustavě souřadnic, viz (2) v kapitole 6. Je

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}^T = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{X}'^T = 0.$$

Označme $\Delta' = \det \boldsymbol{CKC}^T$. Ihned vidíme, že platí

$$\Delta' = \det \boldsymbol{CKC}^T = \det \boldsymbol{CC}^T \det \boldsymbol{K} = (\det \boldsymbol{C})^2\,\Delta. \qquad (6)$$

Pro determinant matice $\boldsymbol{C}$ platí $\det \boldsymbol{C} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, kde matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ je matice přechodu od „nečárkované“ báze k bázi „čárkované“ a ta je, jak známo, vždy regulární a má tedy nenulový determinant. Ze vztahu (6) dostáváme

$$\Delta' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

a definice singulární kuželosečky je tedy v pořádku. Všimněme si ještě, že ze vztahu (6) plyne další důležitá vlastnost velkého determinantu Δ kuželosečky. V kartézské soustavě souřadnic je totiž matice přechodu mezi dvěma bázemi ortogonální, proto platí $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \pm 1$ a odtud $\Delta = \Delta'.$ Dostáváme následující větu:

Věta
Vyjádříme-li rovnici kuželosečky ve dvou libovolných kartézských soustavách souřadnic, velký determinant Δ kuželosečky se nezmění.

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi singulárních kuželoseček. Nejprve ukážeme, že platí věta:

Věta
Obsahuje-li kuželosečka singulární bod, potom je kuželosečka singulární.

Důkaz: Nechť $X = [x, y]$ je singulární bod kuželosečky (1), tj. platí

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má podle Frobeniovy věty alespoň jedno řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti matice rozšířené soustavy, tj.

$$h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

Protože hodnost matice na levé straně je menší nebo rovna dvěma, má matice vpravo hodnost menší než tři, a to znamená, že $\Delta = 0.$ □

Dále budeme předpokládat, že pro kuželosečku κ platí podmínka (4) a prostudujeme všechny případy, které pro singulární kuželosečku mohou nastat.

1) Nejprve budeme zkoumat středové kuželosečky, tj. takové, pro které platí $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$ V tomto případě má soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

jediné řešení, které vypočteme např. podle Cramerova pravidla

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\delta}, \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\delta}$$

a kuželosečka má jediný střed $S = [m, n]$. Odtud a z podmínky (4) plyne, že střed $S = [m, n]$ splňuje (1). Platí totiž

$$m(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + n(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) + a_{13}m + a_{23}n + a_{33} = 0, \tag{8}$$

neboť $a_{13}m + a_{23}n + a_{33} = a_{13}\dfrac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\delta} + a_{23}\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\delta} + a_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta}$,

kde poslední rovnost dostaneme rozvinutím posledního řádku determinantu (3).

Singulární středová kuželosečka proto obsahuje svůj střed, který je jejím jediným singulárním bodem.

Z definice středu kuželosečky totiž plyne, že každá přímka procházející středem a libovolným bodem kuželosečky obsahuje bod kuželosečky, který je souměrný s daným bodem podle středu S. Taková přímka tedy obsahuje alespoň tři body kuželosečky, což znamená, že celá přímka náleží kuželosečce. Pokud tedy kuželosečka obsahuje kromě středu ještě nějaký další bod, potom kuželosečka obsahuje přímku. Prostudujeme podrobněji středové singulární kuželosečky.

Zvolme počátek soustavy souřadnic ve středu $S = [m, n]$ kuželosečky κ. Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' + m, \\ y &= y' + n \end{aligned}$$

převádí rovnici (1) kuželosečky κ na tvar

$$\begin{aligned} &a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + x'(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + y'(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) + \\ &+ a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

odkud plyne, vzhledem k podmínkám (7) a (8), rovnice kuželosečky κ v „čárkované“ soustavě souřadnic

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0. \tag{10}$$

Pokusme se výraz na levé straně rovnice (10) rozložit na součin. Budeme postupovat obdobně jako při výpočtu asymptotických směrů. Vydělíme rovnici (10) výrazem y'^2 a obdržíme

$$a_{11}\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x'}{y'}\right) + a_{22} = 0. \tag{11}$$

Jsou-li λ_1 a λ_2 kořeny rovnice (11), což nastane v případě, že diskriminant δ kvadratické rovnice (10) je menší než nula, lze (11) psát ve tvaru

$$a_{11}\left(\frac{x'}{y'} - \lambda_1\right)\left(\frac{x'}{y'} - \lambda_2\right) = 0\,.$$

Po úpravě dostaneme rozklad rovnice (10)

$$a_{11}(x' - \lambda_1 y')(x' - \lambda_2 y') = 0.$$

V tomto případě se kuželosečka skládá ze *dvou přímek* o rovnicích

$$x' - \lambda_1 y' = 0 \qquad \text{a} \qquad x' - \lambda_2 y' = 0, \tag{12}$$

které se protínají ve středu kuželosečky. Všimněme si, že směry přímek (12) jsou asymptotickými směry kuželosečky κ.

Nemá-li rovnice (11) reálné kořeny (případ $\delta > 0$), potom rozklad nelze provést a výraz na levé straně v (10) je stále kladný nebo stále záporný s výjimkou středu S. Kuželosečka se v tomto případě skládá z *jediného bodu* - svého středu, který je zároveň singulárním bodem.

2) Zkoumejme nyní singulární nestředové kuželosečky, tj. budeme předpokládat, že platí zároveň

$$\Delta = 0, \quad \delta = 0. \tag{13}$$

Rozvinutím velkého determinantu Δ podle posledního řádku získáme

$$\Delta = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Podmínka $\delta = 0$ znamená, že řádky v determinantu δ jsou lineárně závislé. Předpokládejme, že $a_{11} \neq 0.$ Potom existuje k takové, že platí

$$\begin{aligned} a_{21} &= ka_{11}, \\ a_{22} &= ka_{12}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ukážeme, že navíc platí

$$a_{23} = ka_{13}, \tag{16}$$

tj. že řádky (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) jsou lineárně závislé. Skutečně, ze vztahů (13), (14) a (15) totiž plyne

$$a_{31}\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{13} \\ ka_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

a odtud

$$a_{31}k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

V případě, že $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0,$ dostáváme vztah (16). Pokud $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = 0,$ jsou všechny tři determinanty v rozvoji (14) rovny nule, což opět znamená, že prvé dva řádky (a_{11}, a_{12}, a_{13}) a (a_{21}, a_{22}, a_{23}) velkého determinantu Δ jsou lineárně závislé. Ze vztahů (15) a (16) plyne

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 &= a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{12}^2y^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{12}a_{13}y + a_{13}^2 = \\ &= a_{11}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) + a_{13}^2 - a_{11}a_{33}, \end{aligned}$$

a protože $a_{11} \neq 0,$ dostáváme

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ ,$$

tj.

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0. \tag{17}$$

Z vyjádření (17) získáme následující tři případy nestředových singulárních kuželoseček:

Je-li $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0$, je kuželosečka (*dvojnásobnou*) *přímkou* p

$$p: \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0.$$

Je-li $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0$, je kuželosečka *dvojicí rovnoběžek* p_1, p_2

$$p_1: \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} = 0,$$

$$p_2: \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} = 0.$$

Je-li konečně $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 > 0$, potom je výraz na levé straně (17) stále kladný a rovnost není splněna pro žádný reálný bod. Kuželosečka je v tomto případě *množina prázdná*.

Pokud $a_{11} = 0$, plyne z podmínky $\delta = 0$ rovnost $a_{12} = 0$ a z podmínky $\Delta = 0$ dále $a_{13} = 0$, neboť $a_{22} \neq 0$. Kuželosečka κ má potom rovnici

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

která vede opět na případ *dvou rovnoběžek* nebo *jedné dvojnásobné přímky* nebo na *množinu prázdnou*.

Příklad 1
Vyšetřete kuželosečku

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 6y - 4 = 0. \tag{18}$$

Řešení: Platí

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & -2 & 3 \\ 5/2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 48 - \frac{15}{4} - \frac{15}{4} + \frac{25}{2} - 54 + 1 = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 6 & -1/2 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} = -12 - \frac{1}{4} = -\frac{49}{4} < 0.$$

Jedná se tedy o singulární středovou kuželosečku hyperbolického typu, tj. kuželosečka se skládá ze dvou různoběžek, které se protínají v jediném singulárním bodě - ve středu kuželosečky. Pro střed $S=[m,n]$ platí soustava

$$6x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}=0,$$
$$-\frac{1}{2}x-2y+3=0,$$

která má řešení $m=-\frac{2}{7}$, $n=\frac{11}{7}$. Pro střed S tedy platí $S=\left[-\frac{2}{7},\frac{11}{7}\right]$.

Substituce

$$\begin{aligned} x &= x'-\frac{2}{7}, \\ y &= y'+\frac{11}{7} \end{aligned} \tag{19}$$

do rovnice (18) dává v souladu s (10)

$$6x'^2-x'y'-2y'^2=0. \tag{20}$$

Řešením kvadratické rovnice

$$6\left(\frac{x'}{y'}\right)^2-\frac{x'}{y'}-2=0,$$

jejíž kořeny jsou $\left(\frac{x'}{y'}\right)_1=\frac{2}{3}$ a $\left(\frac{x'}{y'}\right)_2=-\frac{1}{2}$, dostáváme rozklad rovnice (20) ve tvaru

$$(3x'-2y')(2x'+y')=0. \tag{21}$$

Zpětným dosazením za x' a y' do (21) dostaneme konečně rozklad původní rovnice (18)

$$(3x-2y+4)(2x+y-1)=0.$$

Kuželosečka je tedy složená ze dvou různoběžek p,q o rovnicích

$$p:\quad 3x-2y+4=0,$$
$$q:\quad 2x+y-1=0.$$

Ukažme ještě jiný způsob vyšetření kuželosečky (18), víme-li, že kuželosečka je singulární. Rozklad (18) na dva lineární faktory můžeme zjistit i následujícím postupem. Rovnici (18) budeme řešit jako kvadratickou rovnici např. s neznámou x:

$$6x^2 - x(y-5) - (2y^2 - 6y + 4) = 0.$$

Je

$$x_{1,2} = \frac{y-5 \pm \sqrt{(y-5)^2 + 4\cdot 6\cdot(2y^2 - 6y + 4)}}{2\cdot 6} = \frac{y-5 \pm \sqrt{(7y-11)^2}}{12} =$$

$$= \frac{y-5 \pm |7y-11|}{12}$$

a odtud

$$x_1 = \frac{8y-16}{12} = \frac{2y-4}{3},$$
$$x_2 = \frac{-6y+6}{12} = \frac{-y+1}{2}.$$

Hledaný rozklad je

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 6y - 4 = 6(x - x_1)(x - x_2) =$$
$$= 6\left(x - \frac{2y-4}{3}\right)\left(x - \frac{-y+1}{2}\right) = (3x - 2y + 4)(2x + y - 1).$$

Příklad 2
Vyšetřete kuželosečku

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4 = 0. \tag{22}$$

Řešení: Je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \\ 6 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{vmatrix} = 0.$$

Jedná se tedy o singulární nestředovou kuželosečku. Podle (17) dostáváme

$$(9x-15y+6)^2 = 81x^2 - 270xy + 225y^2 + 108x - 180y + 36 =$$
$$= 4(9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4) = 0.$$

Rovnici (22) lze tedy psát ve tvaru

$$(9x-15y+6)^2 = 0$$

a kuželosečka (22) je (dvojnásobná) přímka p o rovnici

$$p: \quad 3x - 5y + 2 = 0.$$

Poznamenejme, že každý bod přímky p je zároveň středem kuželosečky (22) - kuželosečka je tvořena přímkou středů.
Proveďme rozklad rovnice (22) obdobně jako v předchozím případě pomocí řešení kvadratické rovnice

$$9x^2 - 6x(5y-2) + 25y^2 - 20y + 4 = 0.$$

Je

$$x_{1,2} = \frac{6(5y-2) \pm \sqrt{36(5y-2)^2 - 36(25y^2 - 20y + 4)}}{18} = \frac{6(5y-2)}{18} = \frac{5y-2}{3}.$$

Hledaný rozklad má tvar

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4 = 9\left(x - \frac{5y-2}{3}\right)^2 = (3x-5y+2)^2.$$

Příklad 3
Vyšetřete kuželosečku

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3 = 0. \qquad (23)$$

Řešení: Je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

Kuželosečka je singulární, středová, eliptického typu. Podle předchozího se kuželosečka skládá z jediného bodu - svého středu S, pro jehož souřadnice x, y platí

$$3x - y - 2 = 0,$$
$$-x + 2y - 1 = 0.$$

Řešením této soustavy dostaneme $x = 1$, $y = 1$, tj. $S = [1, 1]$.
Budeme-li vyšetřovat singulární kuželosečku (23) pomocí kvadratické rovnice

$$3x^2 - 2x(y + 2) + 2y^2 - 2y + 3 = 0,$$

dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{2(y + 2) \pm \sqrt{4(y + 2)^2 - 12(2y^2 - 2y + 3)}}{6} =$$

$$= \frac{y + 2 \pm \sqrt{5(-y^2 + 2y - 1)}}{3}.$$

Výraz pod odmocninou již dále odmocnit nelze, neboť $-y^2 + 2y - 1 = -(y - 1)^2$ je kromě hodnoty $y = 1$ pro každé y záporný. Dosazením za $y = 1$ dostaneme $x = 1$. Opět jsme zjistili, že rovnici (23) vyhovuje jediný bod $S = [1, 1]$.
Skutečnost, že rovnici (23) vyhovuje jediný bod, můžeme rovněž nahlédnout pomocí této identity

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3 = (x - y)^2 + 2(x - 1)^2 + (y - 1)^2. \quad (24)$$

Cvičení

1. Určete singulární body kuželosečky $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$. Situaci nakreslete.

2. Určete f tak, aby kuželosečka $2x^2 + 2xy + y^2 + 4y + f = 0$ měla singulární bod.
3. Najděte všechny singulární body kuželosečky $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.
4. Napište rovnici kuželosečky, která má počátek za svůj singulární bod.
5. Je dána kuželosečka $p(x^2 + y^2) + (1 + p^2)xy + (1 + p)(x + y) + 1 = 0$. Ukažte, že pro každé p je kuželosečka singulární a určete, o jakou kuželosečku se pro jednotlivá p jedná.
6. Ukažte, že kuželosečka $-xy + y^2 - 5x + 7y + 10 = 0$ je singulární a určete o jakou kuželosečku se jedná.
7. Ze kterých přímek se skládá kuželosečka
   a) $21x^2 + xy - 10y^2 = 0$,
   b) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$?
8. Určete a tak, aby kuželosečka $x^2 + 2ay^2 - x + y = 0$ byla singulární. Jaká je to kuželosečka?
9. Určete p, q tak, aby kuželosečka $x^2 + 2pxy + y^2 + 2x + 2qy - 3 = 0$ byla dvojicí rovnoběžných přímek. Napište jejich rovnice.
10. Ukažte, že kuželosečka o rovnici $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ je singulární.
11. Vyšetřete kuželosečku
    a) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$,
    b) $-x^2 + 4xy - 4y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$,
    c) $2x^2 + 2xy - 3x - y + 1 = 0$,
    d) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$,
    e) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$,
    f) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$,
    g) $2x^2 - xy - 3y^2 - x + 4y - 1 = 0$,
    h) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

9 Tečna a polára kuželosečky

Tečna kuželosečky

V předchozí části jsme zkoumali singulární kuželosečky, které mají tu vlastnost, že jejich velký determinant Δ je roven nule. Viděli jsme, že mezi singulární kuželosečky patří dvě různoběžné přímky, dvě rovnoběžky (různé nebo splývající), jeden bod nebo množina prázdná. V dalších částech se budeme věnovat kuželosečkám, které nejsou singulární. Takové kuželosečky se na rozdíl od singulárních kuželoseček nazývají *regulární kuželosečky*.
Nechť je dána kuželosečka κ, jejíž rovnice je v některé lineární soustavě souřadnic

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

Nejprve zavedeme pojem regulární kuželosečky.

Definice
Kuželosečka se nazývá *regulární*, jestliže platí

$$\Delta \neq 0. \qquad (2)$$

Bod kuželosečky se nazývá *regulární*, jestliže není singulární.

Je třeba ověřit, zda je naše definice v pořádku, tj. zda velký determinant Δ je v různých lineárních soustavách souřadnic stále různý od nuly. V kapitole o singulárních kuželosečkách jsme zjistili, že v jiné (čárkované) lineární soustavě souřadnic platí

$$\Delta' = (\det \boldsymbol{C})^2 \Delta,$$

kde $\boldsymbol{C}$ je matice přechodu od jedné báze k druhé (čárkované) bázi, jejíž determinant je vždy různý od nuly. Proto odtud plyne korektnost definice regulární kuželosečky.
Vezměme libovolný bod M regulární kuželosečky (1) a jeho souřadnice označme $M = [m, n]$. Je zřejmé, že bod M nemůže být singulární, neboť jsme ukázali, že pokud kuželosečka obsahuje singulární bod, potom je kuželosečka singulární. Uvažujme dále svazek přímek se středem v bodě M. Pro každou přímku p svazku platí

$$p: \quad X = M + t\boldsymbol{u}, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je směrový vektor přímky p. Označíme ještě souřadnice směrového vektoru $\boldsymbol{u} = (u, v)$ a dostáváme parametrické rovnice přímky p ve tvaru

$$p: \quad x = m + tu,$$
$$y = n + tv.$$

Dosazením do rovnice kuželosečky (1) dostáváme nám již známou rovnici

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{4}$$

pro jejíž koeficienty A, B, C platí

$$\begin{aligned} A &= a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2, \\ B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}), \\ C &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33}. \end{aligned}$$

Protože bod M náleží kuželosečce, je $C = 0$. Uvažujme tu přímku svazku, která má s kuželosečkou dvojnásobný průsečík. Z rovnice (4) plyne, že pro takovou přímku je nutně $A \neq 0$, neboť v opačném případě je rovnice (4) lineární a ta nemůže mít dvojnásobný kořen. To znamená, že směrový vektor této přímky nenáleží asymptotickému směru. Rovnice (4) má tedy tvar

$$t(At + 2B) = 0,$$

odkud plyne, že nula je dvojnásobným kořenem právě když $B = 0$, tj.

$$B = u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) = 0. \tag{5}$$

Z (5) dostáváme pro směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$ dané přímky podmínku

$$\begin{aligned} u &= a_{21}m + a_{22}n + a_{23}, \\ v &= -(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}). \end{aligned} \tag{6}$$

Vektor $\boldsymbol{u}$ o souřadnicích (6) je zřejmě nenulový. Pokud by totiž platilo $a_{21}m + a_{22}n + a_{23} = 0$, $a_{11}m + a_{12}n + a_{13} = 0$, potom z rovnosti $C = 0$ plyne $a_{31}m + a_{32}n + a_{33} = 0$ a bod M je singulární, což není možné.

Parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem M a má směrový vektor $\boldsymbol{u}$ o souřadnicích (6) jsou

$$p: \quad x = m + t(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}),$$
$$y = n - t(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}).$$

Vyloučením parametru t, s využitím vztahu $C = 0$, dostáváme obecnou rovnici přímky p ve tvaru

$$p:(a_{11}m + a_{12}n + a_{13})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23})y + a_{31}m + a_{32}n + a_{33} = 0. \quad (7)$$

Definice
Přímka p procházející bodem $M = [m, n]$ kuželosečky o rovnici (7) se nazývá *tečna kuželosečky*. Bod M je *bod dotyku*.

Napišme rovnici tečny p kuželosečky v maticovém tvaru. Označme přitom $(m \quad n \quad 1)$ matici typu $(1,3)$. Potom rovnice (7) je ekvivalentní s rovnicí

$$(m \quad n \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Za povšimnutí stojí vzájemná podoba rovnice (8) tečny kuželosečky κ s dotykovým bodem v bodě $M = [m, n]$ a rovnice kuželosečky κ.

Příklad
Napište rovnici tečny kuželosečky

$$3x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 2y - 1 = 0 \quad (9)$$

s dotykovým bodem $T = [0,1]$.

Řešení: Nejprve ověříme, zda je bod $T = [0,1]$ skutečně bodem kuželosečky. Poté stačí dosadit do vzorce (8). Platí

$$p: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

nebo též

$$p: \quad \frac{5}{2} x = 0,$$

což lze po vydělení psát ve tvaru $x = 0$ (osa y).

Úlohu lze vyřešit i jiným způsobem:

Uvažujme svazek přímek se středem v bodě T. Každá přímka jdoucí bodem T má parametrickou rovnici

$$\begin{aligned} x &= tu, \\ y &= 1 + tv. \end{aligned} \tag{10}$$

Z těchto nekonečně mnoha přímek vybereme tu, která má s kuželosečkou (9) dvojnásobný průsečík. Dosazením za x a y z (10) do rovnice (9) dostaneme kvadratickou rovnici

$$(3u^2 + 2uv - v^2)t^2 - ut = 0,$$

která má dvojnásobný kořen právě když je diskriminant roven nule, tj. právě když

$$u = 0.$$

Dosazení do (10) dává rovnici tečny ve tvaru

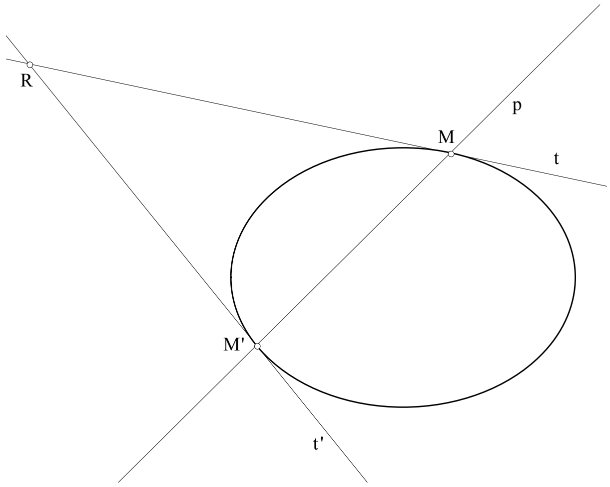
$$p: \quad x = 0.$$

Polára a pól kuželosečky

Je dána kuželosečka κ rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

a dále nechť $R = [r, s]$ je libovolný bod roviny kuželosečky κ. Bodem R veďme tečny ke kuželosečce κ.



Označme t tečnu kuželosečky, která prochází bodem R a nechť $M = [m, n]$ je bod dotyku. Pro tečnu t platí rovnice

t: $(a_{11}m + a_{12}n + a_{13})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23})y + a_{31}m + a_{32}n + a_{33} = 0$. (2)

Protože bod R náleží tečně t, vyhovují jeho souřadnice rovnici (2) a platí

$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13})r + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23})s + a_{31}m + a_{32}n + a_{33} = 0,$$

nebo

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13})m + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23})n + a_{31}r + a_{32}s + a_{33} = 0.$$

Pro případnou druhou tečnu t' s bodem dotyku $M' = [m', n']$ platí obdobně

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13})m' + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23})n' + a_{31}r + a_{32}s + a_{33} = 0.$$

Oba body dotyku M a M' tečen t a t' leží na přímce p o rovnici

p: $(a_{11}r + a_{12}s + a_{13})x + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23})y + a_{31}r + a_{32}s + a_{33} = 0$. (3)

Definice
Přímka p, o rovnici (3), se nazývá *polára bodu* $R=[r,s]$ *vzhledem ke kuželosečce* (1). Bod R se nazývá *pól přímky* p *vzhledem ke kuželosečce* (1).

Rovnici poláry bodu R vzhledem ke kuželosečce (1) můžeme napsat v následujícím maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} r & s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

který velmi připomíná rovnici tečny. Bude-li bod $R=[r,s]$ bodem kuželosečky, je rovnice (4) rovnicí tečny s bodem dotyku R. Polára je tedy zobecněním tečny kuželosečky, jejíž pólem je bod dotyku.
Polárních vlastností kuželosečky je celá řada, my uvedeme pouze následující. Platí věta:

Věta
Leží-li bod P na poláře bodu R, leží bod R na poláře bodu P.

Důkaz: Označme $P=[p,q]$, $R=[r,s]$. Leží-li bod P na poláře bodu R, platí

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13})p + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23})q + a_{31}r + a_{32}s + a_{33} = 0. \tag{5}$$

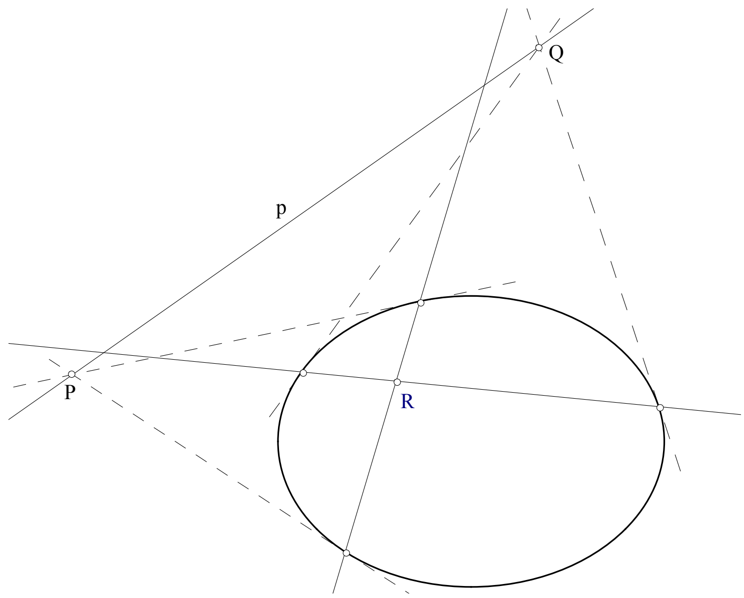
Rovnice (5) je však ekvivalentní vztahu

$$(a_{11}p + a_{12}q + a_{13})r + (a_{21}p + a_{22}q + a_{23})s + a_{31}p + a_{32}q + a_{33} = 0, \tag{6}$$

který znamená, že bod R leží na poláře bodu P. □

Právě uvedenou větu lze využít ke konstrukci poláry bodu R, leží-li tento bod uvnitř kuželosečky a nelze-li tudíž z tohoto bodu sestrojit tečny ke kuželosečce.

Postup je následující: Bodem R vedeme dvě libovolné přímky, které protnou kuželosečku vždy ve dvojici bodů. Průniky P,Q příslušných tečen, sestrojených v průsečících těchto dvou přímek s kuželosečkou leží na hledané poláře.



Poláry se často využívá ke konstrukci tečen kuželosečky z daného bodu R .

Příklad

Počátkem veďte tečny ke kuželosečce

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0. \tag{7}$$

Řešení:

1. způsob: Pro poláru p bodu $[0,0]$ platí

$$p:\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7/2 & 2 \\ 7/2 & 5 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

tj.

$$p:\quad 4x + 5y + 2 = 0.$$

Vyjádříme-li přímku p v parametrickém tvaru

$$p: \quad x = -3 + 5t, \quad y = 2 - 4t \tag{8}$$

a dosazením vztahů (8) do (7) dostáváme kvadratickou rovnici

$$15t^2 - 16t + 4 = 0,$$

jejíž řešení $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{2}{5}$ dává hledané průsečíky $M_1 = \left[-1, \frac{2}{5}\right]$, $M_2 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ poláry p a kuželosečky.

Tečny t_1 a t_2 kuželosečky, procházející počátkem, jsou určené dvojicí bodů OM_1 a OM_2. Vychází:

$$t_1: \quad 2x + 5y = 0,$$
$$t_2: \quad 2x + y = 0.$$

2. způsob: Uvažujme svazek přímek se středem v počátku. Libovolná přímka p z tohoto svazku má parametrické vyjádření

$$p: \quad x = ut, \quad y = vt,$$

kde $\boldsymbol{u} = (u, v)$ je libovolný nenulový vektor. Pro průnik přímky p a kuželosečky (7) dostáváme rovnici

$$(3u^2 + 7uv + 5v^2)t^2 + (4u + 5v)t + 1 = 0. \tag{9}$$

Předpokládejme, že $\boldsymbol{u}$ nenáleží asymptotickému směru. Potom je rovnice (9) kvadratická (protože $3u^2 + 7uv + 5v^2 \neq 0$). Rovnice (9) má dvojnásobný kořen právě když je její diskriminant roven nule, tj.

$$4u^2 + 12uv + 5v^2 = 0. \tag{10}$$

Řešení (10) dává směrové vektory $\boldsymbol{u}_1 = (1, -2)$ a $\boldsymbol{u}_2 = (5, -2)$ hledaných tečen t_1 a t_2.

Cvičení

1. Určete tečnu kuželosečky $x^2 - y^2 = 25$ v jejím bodě $[13, 12]$.

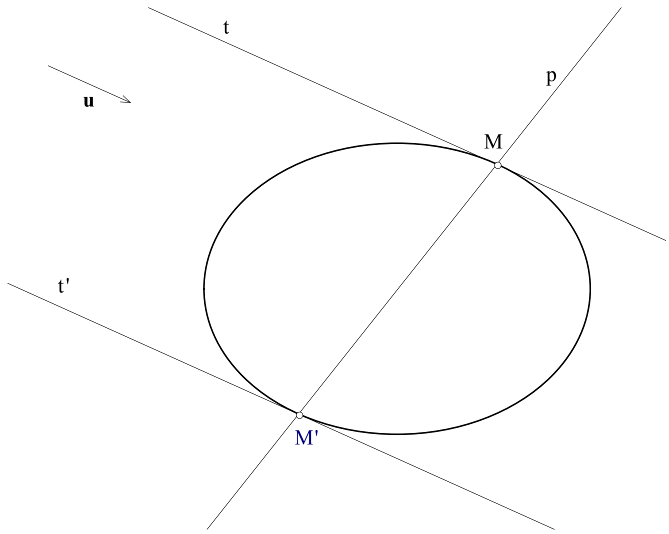
2. Určete tečnu kuželosečky $y = x^2$ v jejím bodě $[1, 1]$.
3. Které přímky, procházející počátkem, mají s kuželosečkou $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0$ právě jeden společný bod? Určete střed této kuželosečky.
4. Napište rovnici tečny kuželosečky $5x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0$, procházející bodem $R = [1,0]$.
5. Napište rovnici tečny kuželosečky $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$, vedené jejím bodem $T = [?,1]$.
6. Určete tečny kuželosečky $x^2 + 2xy - y^2 + 6x = 0$ v jejích průsečících s osou x.
7. Napište rovnici regulární kuželosečky, která se dotýká osy x v počátku soustavy souřadnic.
8. Bodem $R = [3,4]$ veďte tečny ke kuželosečce $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.
9. Napište rovnice tečen, příp. asymptot, vedených bodem $R = [2,4]$ ke kuželosečce $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$.
10. Určete tečny, příp. asymptoty vedené bodem $R = [0,1]$ ke kuželosečce $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$.
11. Počátkem veďte tečny a asymptoty ke kuželosečce $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$. U tečen stanovte bod dotyku.
12. Bodem $R = [0,2]$ veďte tečny a asymptoty ke kuželosečce $xy - x^2 - 1 = 0$.

10 Sdružené průměry kuželosečky

Ke kuželosečce

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

veďme daným neasymptotickým směrem určeným vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v)$ tečny.



Bod dotyku takové tečny t kuželosečky označme $M = [m, n]$. Pro průsečíky tečny *t*: $X = M + t\boldsymbol{u}$ a kuželosečky (1) platí rovnice

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

v níž je $B = 0,$ tj.

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) = 0.$$

Tuto rovnici přepišme na tvar

$$(a_{11}u + a_{12}v)m + (a_{12}u + a_{22}v)n + a_{13}u + a_{23}v = 0. \qquad (2)$$

Pro druhou tečnu t' ve směru $\boldsymbol{u}$ s dotykovým bodem $M' = [m', n']$ platí obdobně

$$(a_{11}u + a_{12}v)m' + (a_{12}u + a_{22}v)n' + a_{13}u + a_{23}v = 0. \qquad (3)$$

Z rovnic (2), (3) dostáváme pro spojnici p dotykových bodů M, M' tečen t, t' kuželosečky (1) ve směru $\boldsymbol{u} = (u, v)$ rovnici

$$p: \quad (a_{11}u + a_{12}v)x + (a_{12}u + a_{22}v)y + a_{13}u + a_{23}v = 0. \tag{4}$$

Definice
Přímka p o rovnici (4) se nazývá *průměr kuželosečky* (1), *sdružený se směrem, určeným vektorem* $\boldsymbol{u} = (u, v)$.

Rovnice (4) vyjádřená v maticovém tvaru je

$$\begin{pmatrix} u & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Poznámka
1) Alespoň jeden z koeficientů $a_{11}u + a_{12}v$, $a_{12}u + a_{22}v$ u proměnných x, y v rovnici (4) je různý od nuly. V opačném případě by vektor $\boldsymbol{u}$ náležel asymptotickému směru, neboť z rovnice pro výpočet asymptotických směrů plyne

$$0 = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = u(a_{11}u + a_{12}v) + v(a_{12}u + a_{22}v).$$

2) Maticové vyjádření (5) rovnice průměru kuželosečky se velmi podobá maticovému vyjádření rovnice poláry. Jediný rozdíl je v záměně matice $\begin{pmatrix} r & s & 1 \end{pmatrix}$, v níž se vyskytují souřadnice pólu $R = [r, s]$, z něhož jsou vedeny tečny ke kuželosečce, maticí $\begin{pmatrix} u & v & 0 \end{pmatrix}$, v níž se vyskytují souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} = (u, v)$, kterým je určen směr, ve kterém jsou k dané kuželosečce vedeny tečny. U bodu je na třetím místě v uvedené trojici jednička, zatímco u vektoru nula. Čtenář, znalý projektivního prostoru, jistě poznává v těchto trojicích homogenní souřadnice vlastního a nevlastního bodu.

Směrový vektor průměru sdruženého se směrem, určeným vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v)$, označme $\boldsymbol{u}' = (u', v')$, kde

$$u' = -(a_{12}u + a_{22}v), \quad v' = a_{11}u + a_{12}v.$$

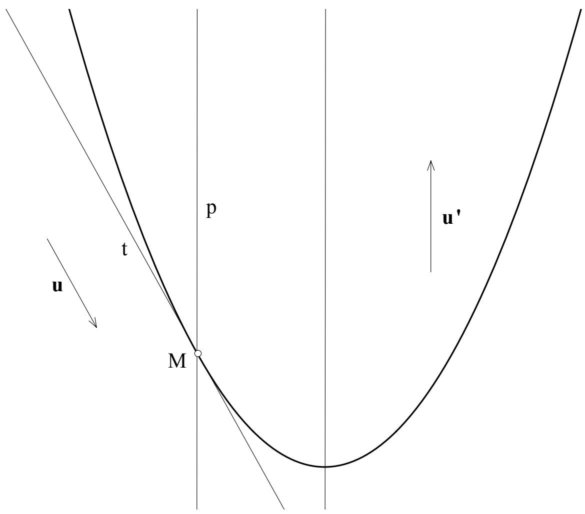
Zkoumejme nejprve, kdy je směr určený vektorem $\boldsymbol{u}'$ asymptotický. Z rovnice pro výpočet asymptotických směrů dostaneme

$$a_{11}u'^2 + 2a_{12}u'v' + a_{22}v'^2 =$$
$$= a_{11}(a_{12}u + a_{22}v)^2 - 2a_{12}(a_{12}u + a_{22}v)(a_{11}u + a_{12}v) + a_{22}(a_{11}u + a_{12}v)^2 =$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2) = \delta(a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2).$$

Máme tedy dva případy (předpokládejme, že $\boldsymbol{u}$ nenáleží asymptotickému směru):

1) je-li $\delta = 0$, potom $\boldsymbol{u}'$ náleží asymptotickému směru,
2) je-li $\delta \neq 0$, potom je směr určený vektorem $\boldsymbol{u}'$ neasymptotický.

V případě 1) se jedná o parabolu, pro niž platí, že směrový vektor $\boldsymbol{u}'$ průměru sdruženého s daným (neasymptotickým) směrem určeným vektorem $\boldsymbol{u}$ *vždy náleží* asymptotickému směru. To znamená, že každý průměr paraboly je rovnoběžný s její osou.



U elipsy $(\delta > 0)$ a hyperboly $(\delta < 0)$ směrový vektor $\boldsymbol{u}'$ průměru sdruženého s vektorem $\boldsymbol{u}$ *nikdy nenáleží* asymptotickému směru a má tedy smysl otázka, jak vypadá průměr p' sdružený se směrem $\boldsymbol{u}'$.

Pro směrový vektor $\boldsymbol{u}''$ průměru sdruženého se směrem $\boldsymbol{u}'$ po krátkém výpočtu vychází

$$\boldsymbol{u}'' = (-a_{12}u' - a_{22}v', a_{11}u' + a_{12}v') = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(u, v) = -\delta\, \boldsymbol{u}.$$

Směr určený vektorem $\boldsymbol{u}$ tedy splývá se směrem $\boldsymbol{u}''$.

Tato skutečnost nás opravňuje k definici:

Definice
Směry určené vektory

$$\boldsymbol{u} = (u, v) \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{u}' = (-a_{12}u - a_{22}v, a_{11}u + a_{12}v)$$

nazýváme *sdružené směry vzhledem ke kuželosečce* (1). Příslušné průměry nazýváme *sdružené průměry vzhledem ke kuželosečce* (1).

Platí věta:

Věta
Směry určené vektory $\boldsymbol{u} = (u, v)$, $\boldsymbol{u}' = (u', v')$ jsou vzájemně sdružené vzhledem ke kuželosečce (1) právě když platí vztah

$$a_{11}uu' + a_{12}(uv' + u'v) + a_{22}vv' = 0. \tag{6}$$

Důkaz: Důkaz plyne ihned z rovnosti

$$a_{11}uu' + a_{12}(uv' + u'v) + a_{22}vv' = u'(a_{11}u + a_{12}v) + v'(a_{12}u + a_{22}v). \quad \square$$

Na závěr uveďme jednu zajímavou vlastnost sdružených průměrů kuželosečky. Platí

Věta
Středy všech tětiv kuželosečky, které náleží danému neasymptotickému směru $\boldsymbol{u}$, leží na průměru sdruženém se směrem $\boldsymbol{u}$.

Řešení: Nechť $\boldsymbol{u} = (u, v)$ je pevně daný neasymptotický směr a nechť

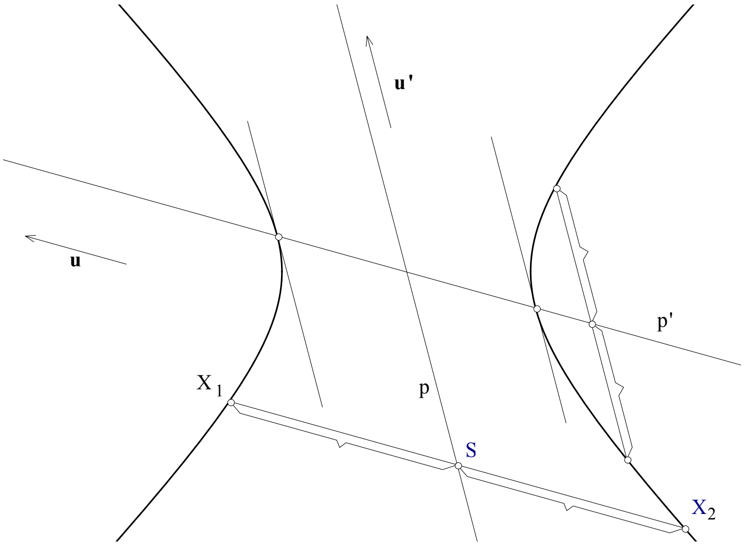
$$q: \quad X = S + t\boldsymbol{u}$$

je nějaká tětiva kuželosečky (1), kde $S = [m, n]$ je střed tětivy q. Pro průsečíky X_1, X_2 tětivy q s kuželosečkou platí rovnice

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

jejíž kořeny jsou navzájem opačná čísla t_0 a $-t_0$, neboť $X_1 = S + t_0\boldsymbol{u}$ a $X_2 = S - t_0\boldsymbol{u}$. Proto $B = 0$, tj.

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{12}m + a_{22}n + a_{23}) = 0. \qquad (7)$$



Vztah (7) přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$m(a_{11}u + a_{12}v) + n(a_{12}u + a_{22}v) + (a_{13}u + a_{23}v) = 0. \qquad (8)$$

Ze vztahu (8) již plyne tvrzení věty, neboť rovnice průměru sdruženého se směrem $\boldsymbol{u} = (u, v)$ zní

$$x(a_{11}u + a_{12}v) + y(a_{12}u + a_{22}v) + (a_{13}u + a_{23}v) = 0. \qquad \square$$

Příklad
Určete průměry kuželosečky

$$x^2 - y = 0,$$

které jsou sdružené s daným neasymptotickým směrem $\boldsymbol{u} = (u, v)$.

Řešení: Z matice kuželosečky

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{plyne} \quad \Delta = -\frac{1}{4}, \qquad \delta = 0.$$

Jedná se tedy o regulární kuželosečku, která je parabolou. Pro asymptotické směry dostáváme rovnici

$$u^2 = 0\,,$$

jejíž řešením je jediný asymptotický směr daný vektorem $\boldsymbol{u}_1 = (0,1)$. Ke každému neasymptotickému směru, který můžeme reprezentovat vektorem tvaru $\boldsymbol{u} = (1,v)$, kde v je libovolné reálné číslo, najdeme průměr p sdružený s tímto směrem

$$p: \quad \begin{pmatrix} 1 & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2}v = 0.$$

Cvičení

1. Určete průměr sdružený se směrem osy y vzhledem ke kuželosečce $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.
2. Určete tečny kuželosečky $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$, rovnoběžné s přímkou $3x + 3y - 7 = 0$ a jejich body dotyku.
3. Pro který nenulový vektor $\boldsymbol{u} = (u,v)$ je průměr sdružený se směrem vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem ke kuželosečce $x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ rovnoběžný s vektorem $(1,1)$?
4. Ukažte, že osa y je průměrem kuželosečky $2x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y = 0$. Jaká je rovnice průměru k němu sdruženého?
5. Stanovte takovou dvojici sdružených průměrů kuželosečky $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16 = 0$, z nichž je jeden rovnoběžný se směrem osy x.
6. Určete v předcházejícím příkladě tečny dané kuželosečky rovnoběžné s osou x.

7. Ukažte, že kuželosečka $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$ je regulární a napište rovnici průměru sdruženého se směrem přímky $x - 2y = 0$. Veďte ke kuželosečce tečny rovnoběžné s touto přímkou.
8. Napište rovnice tečen kuželosečky $y^2 - 10x - 2y = 0$, rovnoběžných s přímkou $y = x$.
9. Určete průměr sdružený se směrem osy x (není-li ovšem tento směr směrem asymptotickým) u těchto kuželoseček:
   a) $y^2 - 10x - 2y = 0$,
   b) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$,
   c) $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$,
   d) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$,
   e) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.
10. Napište rovnici regulární kuželosečky, která prochází počátkem a směry os x a y jsou jejími sdruženými směry.
11. Napište rovnice těch kuželoseček z předchozího příkladu, které zároveň procházejí body [1,0], [0,1]. Kdy je kuželosečka elipsou, kdy hyperbolou, kdy parabolou?

11 Hlavní směry kuželosečky

Nejprve připomeňme pojem sdružených směrů kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Směry, určené nenulovými vektory $\boldsymbol{u} = (u, v)$, $\boldsymbol{u}' = (u', v')$ nazýváme sdruženými směry vzhledem ke kuželosečce (1), jestliže platí vztah

$$a_{11}uu' + a_{12}(uv' + u'v) + a_{22}vv' = 0. \tag{2}$$

Definice
Hlavním směrem kuželosečky nazveme takový směr, který je sdružený se směrem k němu kolmým.

Poznámka
Ze vztahu (2) a z předchozí definice plyne, že směr kolmý na směr hlavní je rovněž hlavní směr.

Nyní se soustředíme na nalezení hlavních směrů kuželosečky. Mějme dány dva libovolné sdružené směry, které jsou určené vektory $\boldsymbol{u} = (u, v)$ a $\boldsymbol{u}' = (u', v')$, kde $u' = -a_{12}u - a_{22}v,\quad v' = a_{11}u + a_{12}v.$ Směry určené vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ jsou na sebe kolmé, právě když jsou vektory $(-v, u)$, $(-a_{21}u - a_{22}v, a_{11}u + a_{12}v)$ lineárně závislé. Tedy existuje reálné číslo λ takové, že platí

$$\begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v &= \lambda u, \\ a_{21}u + a_{22}v &= \lambda v. \end{aligned} \tag{3}$$

Soustavu (3) upravíme na tvar

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u + a_{12}v &= 0, \\ a_{21}u + (a_{22} - \lambda)v &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Homogenní soustava (4) má vzhledem k neznámým u, v nenulové řešení, právě když je determinant soustavy roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Rovnice (5) s neznámou λ je kvadratická a nazývá se *charakteristická rovnice matice* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Rozepsáním (13.5) můžeme psát charakteristickou rovnici ve tvaru

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (6)$$

Definice
Řešení charakteristické rovnice se nazývá *vlastní číslo matice* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$, který je řešením soustavy (3) pro dané číslo λ, se nazývá *vlastní vektor matice*.

Věta
Charakteristická rovnice (5) a soustava rovnic (3) mají tyto vlastnosti:

1) Vlastní čísla rovnice (6) jsou vždy reálná.
2) Alespoň jedno vlastní číslo je nenulové.
3) Nulovému vlastnímu číslu odpovídá vlastní vektor, který náleží asymptotickému směru.
4) Dvojnásobnému kořenu (6) odpovídá libovolný nenulový vektor.
5) Dvěma různým kořenům charakteristické rovnice odpovídají dva vzájemně kolmé vlastní vektory.

Důkaz:
ad 1) Pro diskriminant D rovnice (6) platí

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0. \qquad (7)$$

ad 2) Pro kořeny rovnice λ_1, λ_2 rovnice (13.6), jak známo, platí

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22},$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Kdyby bylo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, potom $a_{11} = -a_{22}$ a $0 = -a_{11}^2 - a_{12}^2$. Odtud $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ a to je spor.

ad 3) Je-li $\lambda = 0,$ potom rovnice (3) mají tvar

$$a_{11}u + a_{12}v = 0,$$
$$a_{21}u + a_{22}v = 0,$$

a vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$, který je řešením této soustavy vyhovuje rovnici pro výpočet asymptotických směrů.

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0,$$

neboť $a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = u(a_{11}u + a_{12}v) + v(a_{21}u + a_{22}v)$.

ad 4) Platí $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ právě když $D = 0.$ Ze vztahu (7) potom plyne $a_{11} = a_{22}$ a $a_{12} = 0,$ a pro kořeny rovnice (6) máme $\lambda = a_{11}$. Dosazení do soustavy (3) dává tvrzení věty.

ad 5) Dvěma různým řešením charakteristické rovnice (6) odpovídají dva hlavní směry, které musí být, podle poznámky za definicí hlavních směrů, k sobě navzájem kolmé.

□

Příklad 1
Určete hlavní směry kuželosečky

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 2x + 3y - 1 = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 - \lambda - \frac{49}{4} = 0. \tag{8}$$

Její kořeny jsou čísla $\lambda_1 = \dfrac{1+5\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1-5\sqrt{2}}{2}$.

Pro kořen λ_1 dostáváme soustavu

$$\left(3 - \frac{1+5\sqrt{2}}{2}\right)u + \frac{5}{2}v = 0,$$

$$\frac{5}{2}u - \left(2 - \frac{1+5\sqrt{2}}{2}\right)v = 0.$$

Protože jsou řádky této soustavy, díky podmínce (8), lineárně závislé, stačí najít libovolné netriviální řešení např. prvé rovnice. Dostáváme tak řešení $\boldsymbol{u} = (1, \sqrt{2} - 1)$. Analogicky dostaneme pro λ_2 řešení $\boldsymbol{u}' = (1 - \sqrt{2}, 1)$.

Kuželosečka má dva hlavní směry, určené vektory $\boldsymbol{u} = (1, \sqrt{2} - 1)$ a $\boldsymbol{u}' = (1 - \sqrt{2}, 1)$.

Na základě předchozí věty můžeme říci, že platí:

Věta

Každá kuželosečka má alespoň dva k sobě kolmé hlavní směry. U paraboly je jedním z těchto hlavních směrů směr asymptotický, druhý hlavní směr je k němu kolmý. Elipsa, která není kružnicí, a hyperbola mají právě dva hlavní směry, které jsou na sebe kolmé. Kružnice má nekonečně mnoho hlavních směrů, každý směr je jejím hlavním směrem.

Definice

Průměr kuželosečky, který je kolmý na směr s ním sdružený, se nazývá *osa kuželosečky*. Průsečík osy s kuželosečkou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Je zřejmé, že středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) mají (kromě kružnice) dvě osy k sobě kolmé. Jejich směry jsou jejich hlavními směry. Kružnice má nekonečně mnoho os. Parabola má jednu osu.

Příklad 2

Určete osy a vrcholy kuželosečky

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0. \tag{9}$$

Řešení: Charakteristická rovnice kuželosečky má tvar

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{nebo} \quad \lambda^2 + 5\lambda - 50 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -10$.
Pro λ_1 řešíme soustavu

$$-3u - 6v = 0,$$

odkud $\boldsymbol{u} = (2,-1)$.

Pro λ_2 řešíme soustavu

$$12u - 6v = 0,$$

odkud $\boldsymbol{u}' = (1,2)$.
Osa o_1 je průměrem sdruženým se směrem, který je určený vektorem $\boldsymbol{u}$, a proto pro ni platí

$$o_1: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

nebo

$$o_1: \quad 2x - y + 1 = 0. \tag{10}$$

Analogicky pro druhou osu dostaneme

$$o_2: \quad x + 2y - 1 = 0.$$

Vrcholy dostaneme jako průnik os s kuželosečkou. Pro průnik osy o_1 s kuželosečkou dostaneme dosazením za y z rovnice (10) do rovnice (9) rovnici

$$50x^2 + 20x + 1 = 0,$$

jejíž řešení $x_{1,2} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{2}}{10}$ dává vrcholy

$$A = \left[-\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5} \right],$$

$$B = \left[-\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5} \right].$$

Průnik druhé osy o_2 s kuželosečkou je množina prázdná.

Cvičení

1. Určete osy, vrcholy a tečny ve vrcholech kuželosečky $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$.
2. Určete osy kuželosečky $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.
3. Je dána kuželosečka $x^2 + y^2 + 2bxy + 2x + 2y + 2 = 0$. Jaká je to kuželosečka? Proveďte diskusi vzhledem k parametru b. V případě regulární kuželosečky určete její osy.
4. Určete rovnici kuželosečky, jestliže je osa x její osou a počátek jejím vrcholem.
5. Napište rovnici kuželosečky, která má přímky $x + y = 0$ a $x - y = 0$ za své osy.
6. Napište rovnici paraboly, která má přímku $x - y = 0$ za svou osu.
7. Určete osy a vrcholy kuželosečky
   a) $3y^2 + 4xy + 4x - 4y - 8 = 0$,
   b) $4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 4y + 44 = 0$,
   c) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$,
   d) $2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$,
   e) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 5 = 0$.

12 Uvedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar užitím hlavních směrů

Je dána kuželosečka κ, která má v nějaké kartézské soustavě souřadnic rovnici

$$f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kterou je možno zapsat též maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

nebo také

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}^T = 0, \tag{1}$$

přičemž $\boldsymbol{K} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,2,3$, tj. matice $\boldsymbol{K}$ je symetrická a platí $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$.

Proveďme transformaci kartézské soustavy souřadnic, jejíž maticové vyjádření má tvar

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A},$$

a dosaďme ji do (1). Rovnice kuželosečky κ bude mít nyní tvar

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{X}'^T = 0.$$

Matice kuželosečky κ má v transformované soustavě souřadnic tvar

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}^T\ . \tag{2}$$

Položme nyní otázku, jakým způsobem zvolit matici $\boldsymbol{A}$ tak, aby matice (2) kuželosečky v transformované „čárkované“ soustavě souřadnic byla co nejjednodušší.
Položme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} u & v & 0 \\ u' & v' & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{u} = (u, v)$, $\boldsymbol{u}' = (u', v')$ jsou jednotkové, k sobě kolmé vektory, určující hlavní směry kuželosečky a $P = [m, n]$ je zatím neznámý bod. Potom pro matici (2) dostaneme

$$\boldsymbol{AKA^T} = \begin{pmatrix} u & v & 0 \\ u' & v' & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u' & m \\ v & v' & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}u + a_{21}v & a_{12}u + a_{22}v & a_{13}u + a_{23}v \\ a_{11}u' + a_{21}v' & a_{12}u' + a_{22}v' & a_{13}u' + a_{23}v' \\ a_{11}m + a_{21}n + a_{31} & a_{12}m + a_{22}n + a_{32} & a_{13}m + a_{23}n + a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u' & m \\ v & v' & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 u & \lambda_1 v & a_{13}u + a_{23}v \\ \lambda_2 u' & \lambda_2 v' & a_{13}u' + a_{23}v' \\ a_{11}m + a_{21}n + a_{31} & a_{12}m + a_{22}n + a_{32} & a_{13}m + a_{23}n + a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u' & m \\ v & v' & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozlišme nyní dva případy:

a) středový (eliptický nebo hyperbolický případ) - $\delta \neq 0$,

b) nestředový (parabolický případ) - $\delta = 0$.

a) středový případ

Nechť $S = [m, n]$ je střed kuželosečky. Potom ze vztahu (3) dostaneme

$$AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 u & \lambda_1 v & a_{13}u + a_{23}v \\ \lambda_2 u' & \lambda_2 v' & a_{13}u' + a_{23}v' \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u' & m \\ v & v' & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

neboť

$$a_{13}m + a_{23}n + a_{33} = a_{31}\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\delta} - a_{32}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\delta} + a_{33}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Ze vztahu (4) dále plyne

$$AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^2+v^2) & \lambda_1(uu'+vv') & 0 \\ \lambda_2(uu'+vv') & \lambda_2(u'^2+v'^2) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Vyjádříme-li nyní rovnici kuželosečky κ v čárkované kartézské soustavě souřadnic, máme konečně

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{6}$$

b) nestředový případ

V tomto případě je jeden z hlavních směrů asymptotický. Předpokládejme, že vektor $\boldsymbol{u} = (u, v)$ náleží neasymptotickému směru a nechť vektor $\boldsymbol{u}' = (u', v')$ určuje asymptotický směr. Potom $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Ze vztahu (3) dostáváme

$$AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^2+v^2) & \lambda_1(uu'+vv') & L \\ 0 & 0 & du'+ev' \\ L & du'+ev' & f(m,n) \end{pmatrix},$$

kde $L = u(a_{11}m + a_{21}n + a_{31}) + v(a_{12}m + a_{22}n + a_{32})$.
Zvolme bod $P = [m, n]$ na průměru sdruženém se směrem $\boldsymbol{u} = (u, v)$ tj. na ose, jejíž rovnice zní

$$(a_{11}u + a_{12}v)x + (a_{12}u + a_{22}v)y + a_{13}u + a_{23}v = 0.$$

Pro bod P potom platí

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{12}m + a_{22}n + a_{23}) = 0,$$

tj. $L = 0$.
Zároveň zvolme bod $P = [m, n]$ v průsečíku osy s kuželosečkou κ. Odtud plyne $f(m, n) = 0$. Potom dostaneme konečný tvar

$$AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12}u' + a_{23}v' \\ 0 & a_{13}u' + a_{23}v' & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Označíme-li $E = a_{13}u' + a_{23}v'$, potom rovnice kuželosečky κ v čárkované soustavě souřadnic zní

$$\lambda_1 x'^2 + 2Ey' = 0. \tag{8}$$

Příklad 1

Vyšetřete kuželosečku

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0. \tag{9}$$

Řešení: Pro velký a malý determinant kuželosečky (14.9) dostaneme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81, \quad \delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9$$

a $\dfrac{\Delta}{\delta} = -9$. Jedná se tedy o regulární kuželosečku, z malého determinantu pak plyne, že kuželosečka je hyperbola.

Rovnice pro výpočet středu zní

$$\begin{aligned} 3y - 6 &= 0, \\ 3x + 8y - 13 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ze soustavy (10) dostaneme souřadnice středu $S = [-1, 2]$.

Hlavní směry vypočteme z charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -1.$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 9$ odpovídá rovnice $-9u + 3v = 0,$ jejíž řešením je vlastní vektor $\boldsymbol{u} = (1,3)$, vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ odpovídá rovnice $1u + 3v = 0,$ kterou řeší např. vektor $\boldsymbol{u}' = (-3,1)$. Všimněme si, že hlavní směry, určené vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$, jsou na sebe kolmé.

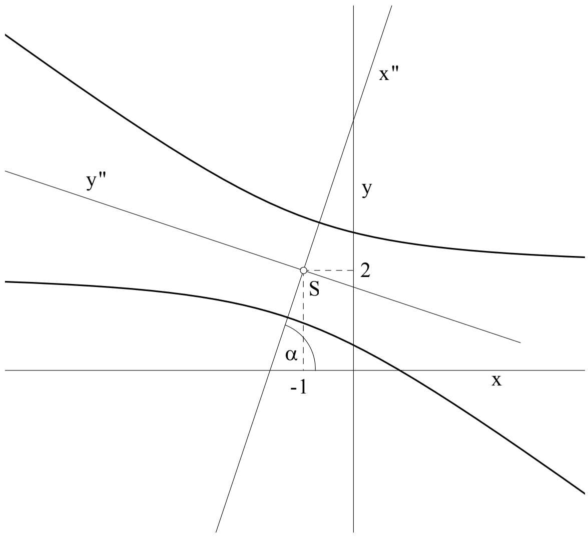
Osy kuželosečky (9) jsou určeny středem S a jedním z vektorů, které udávají hlavní směr. Rovnice os jsou následující

$$o_1: \quad -3x + y - 5 = 0,$$
$$o_2: \quad x + 3y - 5 = 0.$$

Pro kanonický tvar kuželosečky (9) dostáváme

$$9x'^2 - y'^2 - 9 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1$$

a odtud $a = 1,\ b = 3$.



Příklad 2
Vyšetřete kuželosečku

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0. \tag{11}$$

Řešení: Pro velký a malý determinant kuželosečky (11) dostáváme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & -105 \\ 15 & -105 & 975 \end{vmatrix} = -3^2 5^6, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Jedná se tedy o regulární kuželosečku, která je parabolou.

Charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 25\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda - 25) = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0.$

Kořen $\lambda_1 = 25$ vede na rovnici $-16u + 12v = 0,$ které vyhovuje vlastní vektor $\boldsymbol{u} = (3,4)$. Druhý kořen $\lambda_2 = 0$ vede na rovnici $9u + 12v = 0,$ jejíž řešením je vektor $\boldsymbol{u}' = (-4,3)$, který náleží asymptotickému směru.

Matice kuželosečky v čárkované soustavě souřadné má tvar

$$AKA^T = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}u' + a_{23}v' \\ 0 & a_{13}u' + a_{23}v' & 0 \end{pmatrix},$$

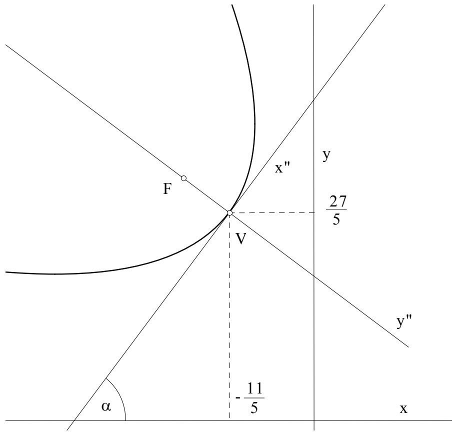
kde u', v' jsou souřadnice jednotkového vektoru $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, který vznikne z vektoru $\boldsymbol{u}'$ znormováním. Krátký výpočet dává $a_{13}u' + a_{23}v' = -75.$ Matice kuželosečky má tvar

$$\boldsymbol{AKA}^T = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75 \\ 0 & -75 & 0 \end{pmatrix},$$

z něhož dostaneme kanonickou rovnici kuželosečky (11) ve tvaru

$$x'^2 - 6y' = 0.$$

Kuželosečka je parabola s parametrem $p = 3$, obr.



Cvičení

1. Pomocí vlastních čísel vyšetřete kuželosečky
   a) $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$,
   b) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$,
   c) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,
   d) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 6y + 1 = 0$,
   e) $x^2 - xy + 1 = 0$.

13 Výsledky cvičení

Kapitola 1.

6. $x^2 + y^2 + 26x - 26y + 169 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$.
7. $2x^2 + 2y^2 - 6x - y - 11 = 0$.
8. $S = [2, -1/2]$, $\rho = 2$, $4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y + 1 = 0$.

Kapitola 2.

5. $(x-2)^2 - (y-3)^2 = 1$, $a = b = 1$, střed $S = [2,3]$.
6. $y - 2 = 1/(x-4)$, $a = b = \sqrt{2}$, střed $S = [4,2]$, asymptoty $m: x - 4 = 0$, $n: y - 2 = 0$.

Kapitola 3.

5. $(y-1)^2 = -(x-1/2)$, $p = 1/2$, vrchol $V = [1/2, 1]$.
6. Oblouky dvou parabol, jejichž společná osa prochází bodem M a je kolmá na q, které mají společné ohnisko M a jejichž parametr je roven $a + p$ a $a - p$, kde $p = |Mq|$ a a je daný konstantní součet vzdáleností.
7. $(y-1)^2 = 10(x + 1/10)$, $p = 5$, vrchol $V = [-1/10, 1]$.

Kapitola 5.

1. $x'^2 - y'^2 = 2$ nebo $x'^2 - y'^2 = -2$.
2. $2x = x'\sqrt{3} - y'$, $2y = x' + y'\sqrt{3}$ nebo $2x = x'\sqrt{3} + y'$, $2y = -x' + y'\sqrt{3}$.
3. a) Otočení a posunutí, $\tan\varphi = 4/3$, b) $3x + 4y - 15 = 0$,
   c) $x'^2 - 6y' = 0$.
4. a) Otočení a posunutí, $\tan\varphi = 3$, b) $9x'^2 - y'^2 - 9 = 0$,
   c) $3x - y + 5 = 0$.

Kapitola 6.

1. a) Elipsa $(x-3)^2/16 + (y+2)^2/8 = 1$,
   b) hyperbola $(x - 1/3)^2/(5/72) - (y + 5/4)^2/(5/48) = 1$,
   c) parabola $(x - 1/3)^2 = -5/3(y - 57/45)$, parametr $p = 5/6$.
2. a) Parabola, parametr $p = 3\sqrt{5}/5$, osa $2x - y + 1 = 0$,

vrchol $[-1/5, 3/5]$, rovnice otočení $x = 1/\sqrt{5}\, x' - 2/\sqrt{5}\, y'$,
$y = 2/\sqrt{5}\, x' + 1/\sqrt{5}\, y'$,

b) hyperbola , délky poloos $a = 11/\sqrt{5}$, $b = 11/(2\sqrt{2})$,
střed $S = [-3/20, 39/40]$, osy $o_1 : 15x - 10y + 12 = 0$,
$o_2 : 16x + 24y + 21 = 0$, rovnice otočení $x = 2/\sqrt{13}\, x' - 3/\sqrt{13}\, y'$,
$y = 3/\sqrt{13}\, x' + 2/\sqrt{13}\, y'$,

c) rovnoosá hyperbola, délky poloos $a = b = 5$, střed $S = [1, 4]$, osy
$o_1 : 3x + y - 7 = 0$, $o_2 : x - 3y + 11 = 0$, rovnice otočení
$x = 3/\sqrt{10}\, x' - 1/\sqrt{10}\, y'$, $y = 1/\sqrt{10}\, x' + 3/\sqrt{10}\, y'$,

d) elipsa, délky poloos $a = 1$, $b = \sqrt{6}$, střed $S = [1, 2]$,
osy $o_1 : 2x + y - 4 = 0$, $o_2 : x - 2y + 3 = 0$,
rovnice otočení $x = 2/\sqrt{5}\, x' - 1/\sqrt{5}\, y'$, $y = 1/\sqrt{5}\, x' + 2/\sqrt{5}\, y'$,

e) hyperbola, $a = \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$, $b = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$, střed $S = [0, 0]$, osy $o_1 : (1 + \sqrt{2})\, x - y = 0$, $o_2 : (1 - \sqrt{2})\, x - y = 0$, asymptoty $m : x = 0$, $n : x = 0$, rovnice otočení $x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2\, x' - \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2\, y'$,
$y = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2\, x' + \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2\, y'$.

Kapitola 7.

1. a) $[1, 0]$, $[1/2, -5/2]$, b) žádné c) $[1, 0]$, d) $[1/2, 1/6]$.
2. Přímka $y = kx$ protíná kuželosečku pro $0 < k \le 4$ v bodech $[t, kt]$, kde $t^2(1 - 2k - 2k^2) + 2(1 + k)t + 1 = 0$, pro ostatní k přímka kuželosečku neprotíná.
3. Pro $2p \ne 3$ vychází $[p, (p^2 + 2p - 5)/(2p - 3)]$, pro $p = 3/2$ přímka kuželosečku neprotíná.
4. Přímka je částí kuželosečky.
5. a) $\boldsymbol{u}_1 = (2 + \sqrt{3}, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2 - \sqrt{3}, 1)$ b) $\boldsymbol{v}_1 = (3, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1)$.
6. Pro $p = 1$ směr $(1, -1)$, pro $p = -1$ směr $(1, 1)$.
7. $2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$.
8. $x - 2 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$.
9. $2bxy + f = 0$, $bf \ne 0$.
10. $\boldsymbol{u}_1 = (-b_1, a_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-b_2, a_2)$.

11. a) Neexistuje, b) $[2,3]$, c) $[-2/5, 4/5]$, d) $[-3,2]$, e) $[-1,-1]$,
   f) přímka $2x - y + 1 = 0$.

Kapitola 8.

1. $[-3/2, 1/2]$.
2. $f = 8$.
3. Všechny body přímky $x + y + 1 = 0$.
4. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.
5. Velký determinant $\Delta = 0$ pro všechna $p \in R$, pro $p \neq 1, -1$ se kuželosečka skládá ze dvou různoběžek $x + py + 1 = 0$, $px + y + 1 = 0$, pro $p = -1$ se jedná o dvě rovnoběžky $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, pro $p = 1$ dostaneme jednu dvojnásobnou přímku o rovnici $x + y + 1 = 0$.
6. Různoběžky $y + 5 = 0$, $x - y - 2 = 0$.
7. a) Různoběžky $3x - 2y = 0$, $7x + 5y = 0$,
   b) rovnoběžky $x + y + 1 + \sqrt{5} = 0$, $x + y + 1 - \sqrt{5} = 0$.
8. $a = -1/2$, kuželosečka se skládá z různoběžek $x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$.
9. Pro $p = q = 1$ rovnoběžky $x + y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$, pro $p = q = -1$ rovnoběžky $x - y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$.
10. Návod: Rovnici roznásobte a ukažte, že $\Delta = 0$.
11. a) Jediný bod $[2,1]$, kuželosečka má tvar $(2x - 3y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$,
    b) dvojnásobná přímka $(x - 2y + 1)^2 = 0$,
    c) dvě různoběžky $(2x - 1)(x + y - 1) = 0$,
    d) dvě rovnoběžky $(x - y + 3)(x - y - 1) = 0$,
    e) množina prázdná,
    f) dvojnásobná přímka $(x - y + 1)^2 = 0$,
    g) dvě různoběžky $(2x - 3y + 1)(x + y - 1) = 0$,
    h) dvě rovnoběžky $(2x - y + 3)(2x - y - 1) = 0$.

Kapitola 9.

1. $13x - 12y - 25 = 0$.
2. $2x - y - 1 = 0$.
3. $y = 0$, $x + 2y = 0$, kuželosečka nemá střed.

4. $5x + y - 5 = 0$.
5. Pro $T_1 = [-1,1]$ tečna $t_1 : 9x + 2y + 7 = 0$, pro $T_2 = [2,1]$ tečna
   $t_2 : 9x + 10y - 28 = 0$.

6. $x = 0$, $x + 2y + 6 = 0$.
7. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$, $ae \neq 0$.
8. $7x - 2y - 13 = 0$, $x - 3 = 0$.
9. Tečna $x - 3y + 10 = 0$, asymptota $x - 2 = 0$.
10. Neexistují.
11. Tečny $t_1 : x + y = 0$, $t_2 : 3x + y = 0$, body dotyku $T_1 = [-1/2, 1/2]$,
    $T_2 = [-1/2, 3/2]$.
12. Tečna $t : y = 2$ s bodem dotyku $T = [1,2]$, asymptota $x = 0$.

Kapitola 10.
1. $x + 2y + 1 = 0$.
2. Tečny $t_1 : x + y - 1 = 0$, $t_2 : 3x + 3y + 13 = 0$ s body dotyku $T_1 = [1,0]$,
   $T_2 = [-5/3, -8/3]$.
3. Např. $\boldsymbol{u} = (1,0)$.
4. $x - y - 1 = 0$.
5. $4x + 5y + 3 = 0$, $y = 1$.
6. $y = 1 + 2/7\sqrt{10}$, $y = 1 - 2/7\sqrt{10}$.
7. $5y - 4 = 0$, tečny neexistují.
8. $5x - 5y + 18 = 0$.
9. a) Směr osy x je asymptotický, b) $x - 2 = 0$, c) $x - 2y + 2 = 0$, e)
   $3x - y + 2 = 0$.
10. $ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$, $cd^2 + ae^2 \neq 0$.
11. a) $dx(x-1) + ey(y-1) = 0$, $ed(e+d) \neq 0$, b) $ed > 0$ elipsa,
    $ed < 0$ hyperbola, parabolou být nemůže.

Kapitola 11.
1. Parabola, osa $x - y + 2 = 0$, vrchol $V = [-2, 0]$, vrcholová tečna
   $x + y + 2 = 0$.
2. Kružnice, osou je každá přímka procházející středem $S = [-3, -4]$.

3. Je-li $b = 0$ bod, $b = -1$ parabola s osou $x - y = 0$, $b = 1$ množina prázdná (imaginární rovnoběžky), $0 < b < 1$ množina prázdná (imaginární elipsa), $-1 < b < 0$ elipsa, $b^2 > 1$ hyperbola, osy $(b+1)(x+y) + 2 = 0$, $x - y = 0$.
4. $y^2 = 2px + qx^2$, $p \neq 0$.
5. $a(x^2 + y^2) + 2bxy + f = 0$, $f(a^2 - b^2) \neq 0$.
6. $a(x - y)^2 + 2d(x + y) + f = 0$, $ad \neq 0$.
7. a) Hyperbola, osy $2x - y - 6 = 0$, $2x + 4y - 1 = 0$,
   vrcholy $[(5\sqrt{5} \pm 1)/2\sqrt{5}, (-\sqrt{5} \pm 1)/\sqrt{5}]$,
   b) parabola, osa $2x - y - 6 = 0$, vrchol $[14/5, -2/5]$,
   c) elipsa, osy $2x + 4y - 1 = 0$, $2x - y - 6 = 0$,
   vrcholy $[2,-2]$, $[3,0]$, $[(5 \pm 2\sqrt{6})/2, -(2 \pm \sqrt{6})/2]$,
   d) parabola, osa $y = 1$, vrchol $[1/2, 1]$,
   e) hyperbola, osy $2x + 3y = 0$, $-3x + 2y = 0$,
   vrcholy $[\pm\sqrt{5/26}, \pm(3/2)\sqrt{5/26}]$.

Kapitola 12.

1. a) Hyperbola, $a = b = \sqrt{3\sqrt{5}}/5$, střed $S = [-2/5, 4/5]$, osy $o_1 : 2x + (1 - \sqrt{5})y + 4/\sqrt{5} = 0$, $o_2 : 2x + (1 + \sqrt{5})y - 4/\sqrt{5} = 0$,
   b) množina prázdná (imaginární elipsa),
   c) elipsa, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, střed $S = [-1,-1]$, osy $o_1 : x + y + 2 = 0$, $o_2 : x - y = 0$,
   d) hyperbola, $a = 11/\sqrt{5}$, $b = 11/(2\sqrt{2})$, střed $S = [-3/20, 39/40]$, osy $o_1 : 15x - 10y + 12 = 0$, $o_2 : 16x + 24y + 21 = 0$,
   e) hyperbola, $a = \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$, $b = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$, střed $S = [0, 0]$, osy $o_1 : (1 + \sqrt{2})x - y = 0$, $o_2 : (1 - \sqrt{2})x - y = 0$, asymptoty $m : x = 0$, $n : x = 0$.

Seznam použité literatury

1. Alexandrov, P.S.: *Kurs analytičeskoj geometrii i linejnoj algebry*. Nauka, Moskva 1979.
2. Berger, M.: *Geometr*y I, II. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1987.
3. Bydžovský, B.: *Úvod do analytické geometrie.* ČAV, Praha 1956.
4. Coxeter, H.S.M.: *Introduction to geometry.* Wiley & Sons, N. York - London 1961.
5. Čech, E.: *Základy analytické geometrie I.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1956.
6. Gantmacher, F.R.: *Teorija matric.* Nauka, Moskva 1988.
7. Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. SNTL, Praha 1956.
8. Kuroš, A.G.: *Kurs vyssej algebry*. Nauka, Moskva 1975.
9. Kuřina, F.: *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha 2002.
10. Menšík, M., Setzer, O., Špaček, K.: *Deskriptivní geometrie.* SNTL, Praha 1966.
11. Pedoe, D.: *Geometry*. Dover Publ., N. York 1988.
12. Pech, P.: *Analytická geometrie lineárních útvarů.* Jihočeská univerzita, České Budějovice 1994.
13. Peschl, E.: *Analytická geometrie a lineární algebra*. SNTL, Praha 1971.
14. Pogorelov, A.V.: *Analitičeskaja geometrija*. Nauka, Moskva 1978.
15. Rozenfeld, B.A.: *Mnogomernaja geometrija*. Nauka, Moskva 1966.
16. Sekanina, M. a kol.: *Geometrie I,II.* SPN, Praha 1986.
17. Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I, II.* SNTL, Praha 1965.

doc. RNDr. Pavel Pech, CSc.

KUŽELOSEČKY

Roku 2004 vydala Jihočeská univerzita
Vlastimil Johanus TISKÁRNA
1. vydání

ISBN 80-7040-755-7