

## Obsah

<b>Úvod .....</b>	5
<b>1. Transfigurace trojúhelník -&gt; hvězda .....</b>	7
Příklad 1.1 až 1.10 .....	9
<b>2. Theveninova a Nortonova věta .....</b>	24
Příklad 2.1 až 2.11 .....	27
<b>3. Metoda smyčkových proudů a uzlových napětí ...</b>	45
Příklad 3.1 až 3.8 .....	48
<b>4. Věta o superpozici .....</b>	64
Příklad 4.1 až 4.10 .....	65
<b>5. Obvody se střídavými průběhy U a I .....</b>	88
Příklad 5.1 až 5.21 .....	93
<b>6. Fourierova harmonická analýza periodických signálů .....</b>	128
Příklad 6.1 až 6.4 .....	131
<b>7. Základní elektronické polovodičové prvky .....</b>	140
Příklad 7.1 až 7.19 .....	146
<b>8. Operační zesilovače .....</b>	172
Příklad 8.1 až 8.9 .....	177
<b>9. Logické obvody .....</b>	192
Příklad 9.1 až 9.13 .....	197
<b>Seznam použité literatury .....</b>	212

č 3113

JIHOČESKÁ UNIVERZITA  
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH  
PEDAGOGICKÁ FAKULTA  
ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA -8-  
Husova 458, 370 05 České Budějovice

## Úvod

Předkládaná sbírka řešených úloh představuje skriptum k předmětu Elektronika, určené především posluchačům třetího ročníku studia učitelství fyziky na pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Sbírka je rozčleněna do devíti kapitol, které na sebe z hlediska výkladu problematiky bezprostředně navazují. Jednotlivé kapitoly korespondují, co do pořadí i co do rozsahu, se současným pojetím předmětu Elektronika na této fakultě. Na počátku každé kapitoly je uveden stručný souhrn teorie, kterou je třeba znát pro řešení příkladů z daného tématu. Po teorii již následují řešené příklady, v nichž je důsledně oddělena část zadání od vlastního řešení.

V prvních čtyřech kapitolách jsou uvedeny některé speciální metody, sloužící ke zjednodušení řešení elektronických obvodů, resp. jejich částí. Pátá kapitola se týká elektronických obvodů připojených na střídavé napětí. Zvláštní místo zde má řešení různých kombinací RLC obvodů, jejich fázorových diagramů. Čtenář se zde seznámí i s komplexní symbolickou metodou, které se při řešení těchto elektronických obvodů často využívá. Místo je zde vyhrazeno i napěťovému přenosu a frekvenčním charakteristikám obvodů. Jde o nejobsáhlejší kapitolu, jak co do rozsahu, tak i co do počtu příkladů. Na pátou kapitolu volně navazuje kapitola šestá, zabývající se průběhy periodických signálů v obvodech a jejich harmonickou (Fourierovou) analýzou. V sedmé kapitole jsou řešeny obvody se základními polovodičovými prvky - diodou a tranzistorem. Osmá kapitola pojednává o problematice operačních zesilovačů a devátá, závěrečná kapitola, se zabývá tématikou číslicových obvodů.

Závěrem děkujeme recenzentům za pečlivé prostudování textu a cenné připomínky. Jsme si vědomi, že i tak se přes všechnu snahu mohou v textu objevit věcné i formální nedostatky. Děkujeme proto předem čtenářům za případné připomínky nebo dotazy k obsahové náplni či celkové koncepci skripta.

V Chrášťanech, dne 9. 3. 2002

autoři

## 1. Transfigurace trojúhelník → hvězda

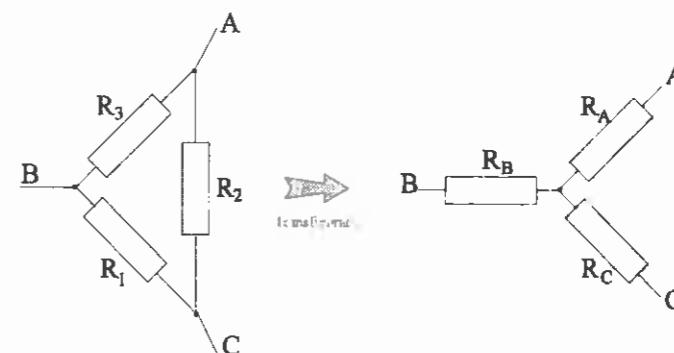
Při zjišťování celkového odporu jednoduchých elektronických obvodů využíváme často sériového nebo paralelního zapojení jednotlivých dílčích odporů a vzorců s tímto spojených.

Připomeňme, že výsledný odpor  $R$  dvou sériově spojených rezistorů  $R_1$  a  $R_2$  je vyjádřen vztahem  $R = R_1 + R_2$ . (1)

Pro celkový odpor  $R$  dvou paralelně spojených rezistorů  $R_1$  a  $R_2$

$$\text{platí vztah následující: } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (2)$$

U složitějších obvodů však již s těmito dvěma vzoremi nevystačíme a jsme nuceni napřed tyto obvody vhodně transfigurovat. Výpočty se tak velmi usnadní. Jednou z možných a nejčastějších transfigurací je transfigurace z trojúhelníku na hvězdu. Zapojení rezistorů ve tvaru „trojúhelníku“ převedeme na zapojení rezistorů ve tvaru „hvězdy“ (viz obr. č. 1.1)



obr. č. 1.1

Svorky A, B, C

zůstávají totožné, změní se pouze způsob zapojení jednotlivých rezistorů a velikost jejich odporů. Velikosti odporů rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  po transfiguraci vypočítáme následujícím způsobem. Označíme  $R_{AB}$  odpor mezi svorkami A a B v zapojení do trojúhelníku. Obdobně označíme  $R_{AC}$  a  $R_{BC}$ . Ze zapojení je zřejmé, že

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A + R_B} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{(R_1 + R_2)}. \quad (3)$$

Obdobně

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_B + R_C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{(R_2 + R_3)} . \quad (4)$$

Stejným způsobem i

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_A + R_C} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(R_1 + R_3)} . \quad (5)$$

Vyjádřením  $R_{AB}$  z (3) dostáváme  $R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$ . (6)

Podobně obdržíme vztahy pro  $R_{BC}$  a  $R_{AC}$  z (4) a (5).

Zároveň (v zapojení do hvězdy) platí též, že

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B , \\ R_{AC} &= R_A + R_C , \\ R_{BC} &= R_B + R_C . \end{aligned} \quad (7)$$

Porovnáním rovností (6) a (7) pro  $R_{AB}$  získáme jednu rovnici. Další dvě rovnice obdržíme opět porovnáním rovností (7) pro  $R_{AC}$  a  $R_{BC}$  s jejich vyjádřením z (4) a (5).

Dostali jsme soustavu 3 rovnic pro  $R_{AB}$ ,  $R_{AC}$  a  $R_{BC}$ . Tyto rovnice sečteme a po krátké úpravě získáme

$$R_A + R_B + R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} . \quad (8)$$

Od (8) postupně odečteme vždy jednu z původních třech rovnic soustavy. Dostaneme tak výsledné vztahy pro jednotlivé odpory  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  [12].

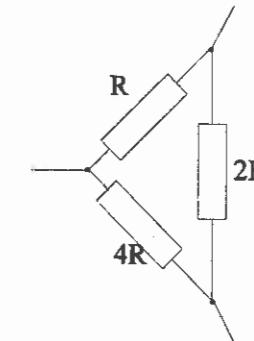
$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_C &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} . \end{aligned} \quad (9)$$

Tímto je transfigurace hotova. Známe nové uspořádání rezistorů i velikosti jejich odporů „ve hvězdě“ vzhledem k původním rezistorům  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ .

Uvedená metoda je často použitelná, není však univerzální. Pro složitější obvody je nutno použít Kirchhoffových zákonů nebo některou z dalších metod uvedených v textu.

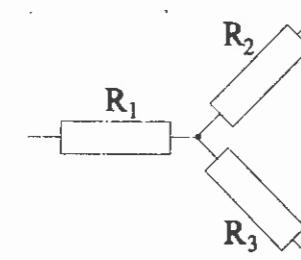
### PŘÍKLAD 1.1:

Transfigurujte na hvězdu zapojení z obr. č. 1.2.



Obr. č. 1.2

**Řešení:** Dané zapojení transfigurujeme do hvězdy (obr. č. 1.3):



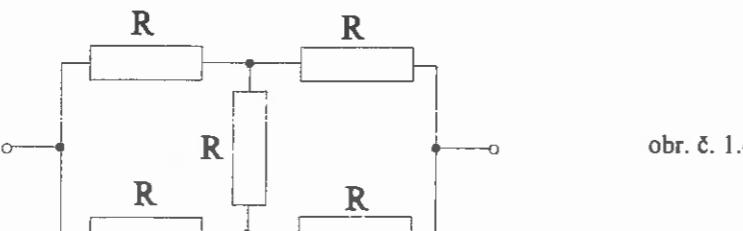
obr. č. 1.3

Velikosti jednotlivých odporů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  vypočítáme dle (9):

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R \cdot 4R}{R + 2R + 4R} = \frac{4R^2}{7R} = \frac{4}{7}R \\ R_2 &= \frac{R \cdot 2R}{R + 2R + 4R} = \frac{2R^2}{7R} = \frac{2}{7}R \\ R_3 &= \frac{2R \cdot 4R}{R + 2R + 4R} = \frac{8R^2}{7R} = \frac{8}{7}R \end{aligned}$$

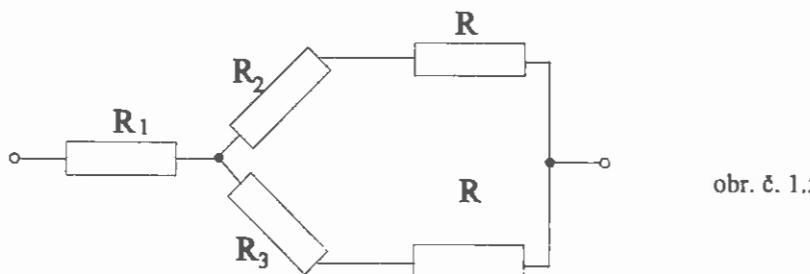
### PŘÍKLAD 1.2:

Vypočítejte celkový odpor obvodu, jehož zapojení je na obr. č. 1.4:



obr. č. 1.4

**Řešení:** Obvod můžeme velmi zjednodušit částečnou transfigurací na hvězdu (obr. č. 1.5):



obr. č. 1.5

Velikosti odporů vypočítáme dle (9):

$$R_1 = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

Obdobně dostaneme pro  $R_2 = \frac{R}{3}$ ,  $R_3 = \frac{R}{3}$ .

Obrázek č.1.5 již představuje klasickou sérioparalelní kombinaci odporů, u níž umíme výsledný odpor již bez problémů určit.

$$R_{výsl} = R_1 + R_X,$$

kde  $R_X$  je odpor paralelní části obvodu:

$$\frac{1}{R_X} = \frac{1}{(R_2 + R)} + \frac{1}{(R_3 + R)}. \quad (10)$$

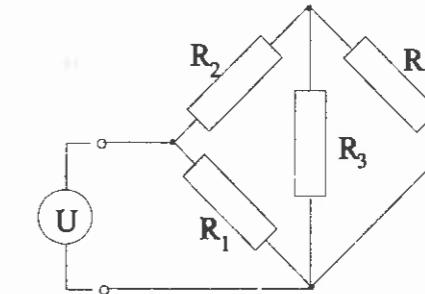
Po dosazení za  $R_2$  a  $R_3$  do (10) obdržíme hodnotu  $R_X = \frac{2}{3}R$ .

Výsledný odpor celého obvodu je tudíž:

$$R_{výsl} = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R = R.$$

### PŘÍKLAD 1.3:

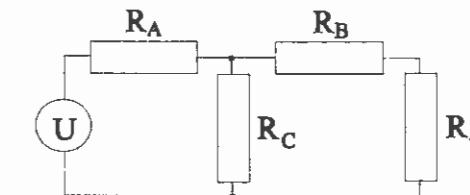
Určete, jakým odporem je zatížen zdroj napětí, je-li obvod zapojen dle obr. č. 1.6. Odpor v obvodu mají hodnoty  $R_1 = 300,0 \Omega$ ;  $R_2 = 100,0 \Omega$ ;  $R_3 = 200,0 \Omega$ ;  $R_4 = 66,7 \Omega$ .



obr. č. 1.6

**Řešení:** Vypočítáme celkový odpor daného obvodu. Použijeme částečnou transfiguraci obvodu. Trojúhelník tvořený odporů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  transfigurujeme na hvězdu odporů  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ .

Upravený obvod po transfiguraci bude mít tvar nakreslený v obr. č. 1.7:



obr. č. 1.7

Hodnoty odporů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  vypočítáme podle vztahů (9):

$$\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 = (300 + 100 + 200) \Omega = 600 \Omega.$$

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{\sum R} = \left( \frac{300 \cdot 100}{600} \right) \Omega = 50 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{\sum R} = \left( \frac{100 \cdot 200}{600} \right) \Omega = 33,3 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_1 R_3}{\sum R} = \left( \frac{300 \cdot 200}{600} \right) \Omega = 100 \Omega$$

Sečteme  $R_B$  a  $R_4$  a získáme:  $R_{4B} = R_4 + R_B = (66,7 + 33,3) \Omega = 100,0 \Omega$ .

Dále vypočteme odpor  $R_{4CB}$  paralelní kombinace odporů  $R_C$  a  $R_{4B}$ :

$$R_{4CB} = 50 \Omega.$$

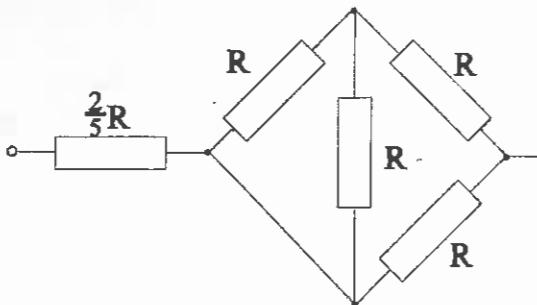
Výsledný odpor celého obvodu je roven součtu odporů  $R_A$  a  $R_{4CB}$ :

$$R_{výsl} = R_A + R_{4CB} = (50 + 50) \Omega = 100 \Omega.$$

Zdroj napětí je tudíž zatížen odparem 100  $\Omega$ .

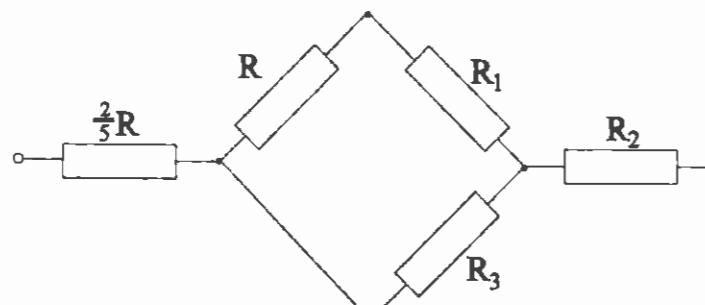
### PŘÍKLAD 1.4:

Pomocí transfigurace trojúhelník - hvězda vypočítejte celkový odpor obvodu z obr. č. 1.8:



obr. č. 1.8

**Řešení:** Trojúhelník tří stejných rezistorů  $R$  v pravé části obvodu transfigurujeme na hvězdu. Vznikne tak obvod na obr. č. 1.9:



obr. č. 1.9

Velikosti odporů spočítáme opět dle (9). Protože všechny odpory v trojúhelníku měly stejnou hodnotu ( $R$ ), budou mít všechny odpory ve hvězdě též stejně velikosti (viz příklad 2). Vyplývá to ze vztahů (9).

$$\text{Tudíž: } R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}.$$

Při bližším pohledu na schéma obr. č. 9 vidíme, že jde pouze o klasickou sérioparalelní kombinaci odporů nyní již známé hodnoty. Její výsledný odpor umíme jednoduše vypočítat:

$$\frac{1}{R_X} = \frac{1}{(R+R_1)} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{4R} + \frac{3}{R} = \frac{15}{4R} \Rightarrow R_X = \frac{4}{15}R.$$

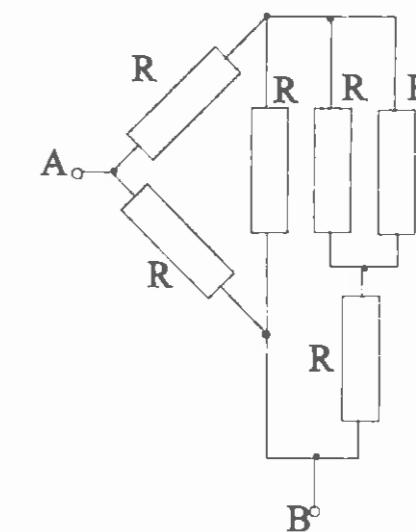
Výsledný odpor je pak dán sériovým spojením odporů  $R_X$ ,  $R_2$  a  $\frac{2}{5}R$ :

$$R_{\text{výsl}} = R_X + R_2 + \frac{2}{5}R = \frac{4}{15}R + \frac{1}{3}R + \frac{2}{5}R = \frac{15}{15}R = R.$$

Celkový odpor obvodu z obr. č. 1.8 je roven  $R$ .

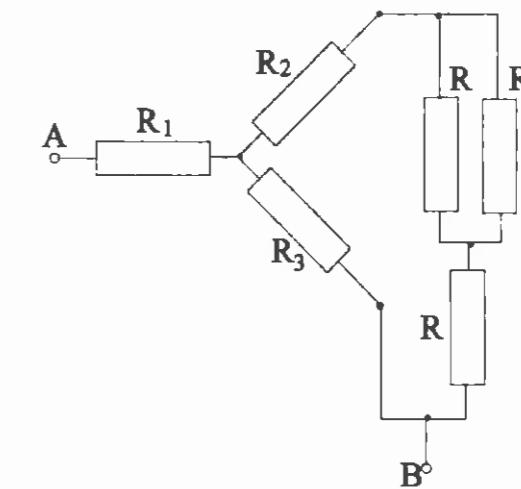
### PŘÍKLAD 1.5:

Vypočítejte celkový odpor mezi svorkami A a B obvodu z obr. č. 1.10 s využitím transfigurace trojúhelník - hvězda :



obr. č. 1.10

**Řešení:** Trojúhelník rezistorů  $R$  z levé části obvodu nahradíme hvězdou. Výsledný obvod bude mít tvar uvedený v obr. č. 1.11:



obr. č. 1.11

Velikost odporů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  spočteme dle (9). Protože všechny rezistory v trojúhelníku měly stejnou hodnotu ( $R$ ), budou mít všechny rezistory ve hvězdě též stejně velikosti (viz příklad 2). Vyplývá to také i z (9).

$$\text{Tudíž: } R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}.$$

Výsledný odpor obvodu na obr. č. 1.11 lze již jednoduše spočítat:

$$R_X = R_2 + \frac{R}{2} + R = \frac{R}{3} + \frac{R}{2} + R = \frac{11}{6}R,$$

$$\frac{1}{R_Y} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_X} = \frac{3}{R} + \frac{6}{11R} = \frac{39}{11R} \Rightarrow R_Y = \frac{11}{39}R.$$

Celkový výsledný odpor obvodu je dán sériovým spojením  $R_1$  a  $R_Y$ :

$$R_{\text{výsl}} = R_1 + R_Y = \frac{1}{3}R + \frac{11}{39}R = \frac{24}{39}R = \frac{8}{13}R.$$

Odpor mezi svorkami A a B obvodu z obr. č. 1.10 je  $\frac{8}{13}R$ .

### PŘÍKLAD 1.6:

Vypočítejte celkový odpor mezi svorkami A a B obvodu z obr. č. 1.10, aniž byste využili transfigurace trojúhelník - hvězda.

**Řešení:** Uvedený obvod lze řešit přímo bez použití transfigurace trojúhelník - hvězda pouze jako sérioparalelní spojení rezistorů. Obvod pro názornost lze překreslit jako (obr. č. 1.12):

$$\frac{1}{R_X} = \frac{1}{\left(\frac{R}{2} + R\right)} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_X = \frac{3}{5}R$$

$R_Y = R +$

$$R_X = R + \frac{3}{5}R = \frac{8}{5}R.$$

obr. č. 1.12

Pro výsledný odpor  $R_{\text{výsl}}$  můžeme psát:

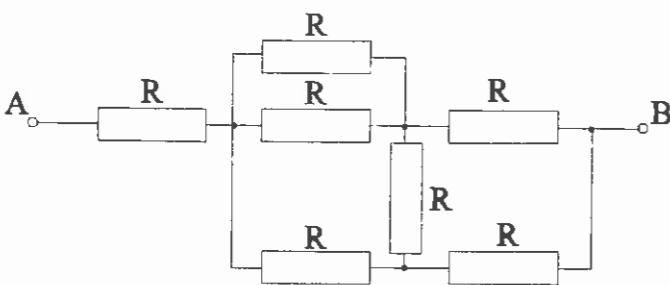
$$\frac{1}{R_{\text{výsl}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_Y} = \frac{1}{R} + \frac{5}{8R} = \frac{13}{8R} \Rightarrow R_{\text{výsl}} = \frac{8}{13}R.$$

Odpor obvodu mezi svorkami A a B je  $\frac{8}{13}R$ .

Vyšlo nám totéž jako při použití transfigurace trojúhelník - hvězda. Přestože jde o poměrně kratší metodu, nelze ji vždy použít.

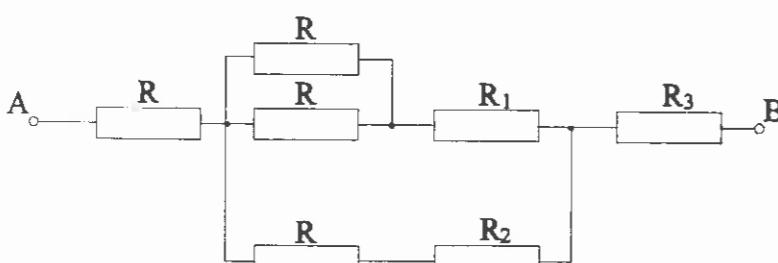
### PŘÍKLAD 1.7:

Vypočítejte odpor mezi svorkami A a B obvodu z obrázku č. 1.13:



obr. č. 1.13

**Řešení:** Při pozorném pohledu na schéma obvodu vidíme, že tři rezistory R v pravé části obvodu tvoří trojúhelník. Tento transfigurujeme na hvězdu. Získáme tak obvod dle obr. č. 1.14:



obr. č. 1.14

Odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  ve hvězdě vypočítáme dle (9).

Protože všechny odpory v trojúhelníku měly stejnou hodnotu (R), budou mít i všechny odpory ve hvězdě totožné hodnoty.

$$\text{Vychází: } R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}.$$

Celkový odpor upraveného obvodu z obr. č. 1.14 lze již jednoduše vypočítat. Opět jde pouze o klasické sérioparalelní spojení rezistorů:

$$R_X = \frac{R}{2} + R_1 = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R,$$

$$R_Y = R + R_2 = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3}R,$$

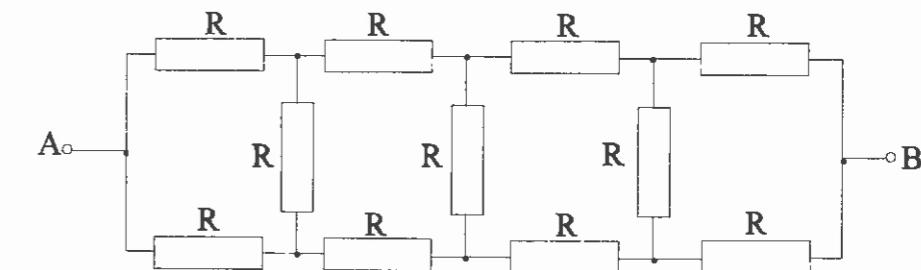
$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_Y} = \frac{6}{5R} + \frac{3}{4R} = \frac{39}{20R} \Rightarrow R_Z = \frac{20}{39}R,$$

$$R_{\text{výsl}} = R + R_Z + R_3 = R + \frac{20}{39}R + \frac{R}{3} = \frac{72}{39}R = \frac{24}{13}R.$$

Celkový výsledný odpor obvodu mezi svorkami A a B je  $R_{\text{výsl}} = \frac{24}{13}R$ .

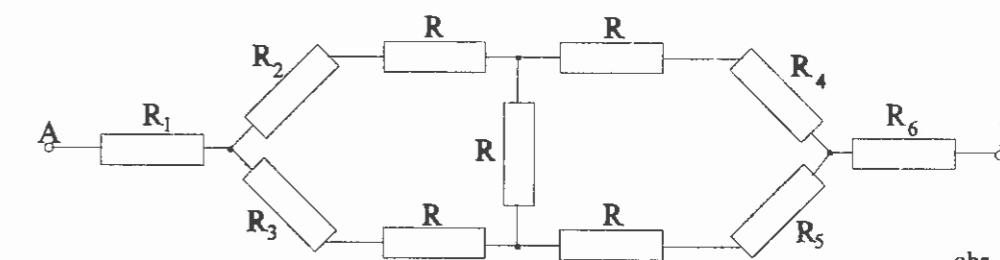
### PŘÍKLAD 1.8:

Zjistěte celkový odpor obvodu z obr. č. 1.15:



obr. č. 1.15

**Řešení:** Tento obvod budeme řešit pomocí trojnásobné transfigurace trojúhelník - hvězda. Nejprve převedeme na hvězdy dva trojúhelníky po obou stranách obvodu. Získáme následující obvod (obr. č. 1.16)



obr. č. 1.16

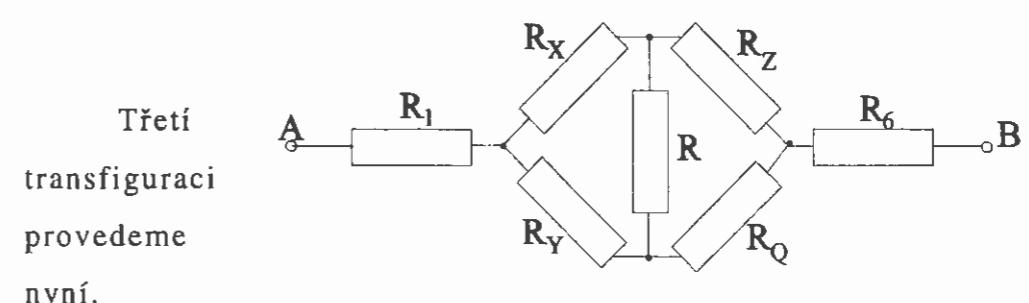
Velikosti odporů ve hvězdách vypočteme podle (9).

$$\text{Vychází: } R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = \frac{R}{3}.$$

$$\text{Označíme: } R_X = R_2 + R, R_Y = R_3 + R, R_Z = R_4 + R, R_Q = R_5 + R.$$

$$\text{Po dosazení je } R_X = R_Y = R_Z = R_Q = \frac{4}{3}R.$$

Obvod lze pak překreslit jako (obr. č. 1.17):

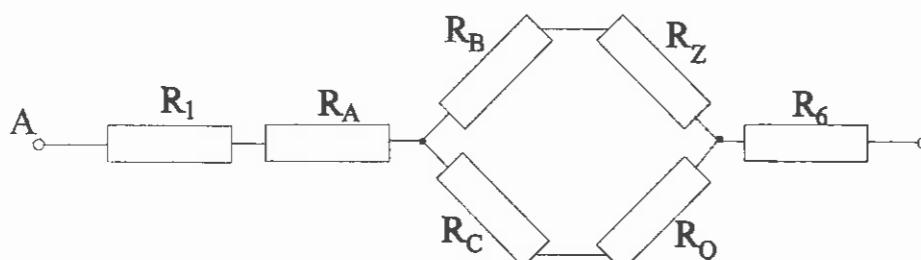


Třetí  
transfiguraci  
provedeme  
nyní.

obr. č. 1.17

Trojúhelník tvořený rezistory  $R_X$ ,  $R_Y$  a  $R$  převedeme na hvězdu rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ .

Získáme tak odvod z obr. č. 1.18.



obr. č. 1.18

Velikosti odporů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  vypočítáme dle (9):

$$R_A = \frac{R_X \cdot R_Y}{R_X + R_Y + R} = \frac{16}{33} R$$

$$R_B = \frac{R_X \cdot R}{R_X + R_Y + R} = \frac{4}{11} R$$

$$R_C = \frac{R \cdot R_Y}{R_X + R_Y + R} = \frac{4}{11} R$$

Výsledný odpor celého odporu je pak již dán pouze sérioparalelním zapojením (viz obr. č. 1.18).

$$R_{výsl} = R_1 + R_A + R_6 + R_M, \quad (*)$$

kde  $R_M$  je odpor paralelní části obvodu, složeného z odporů  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_Z$  a  $R_Q$ .

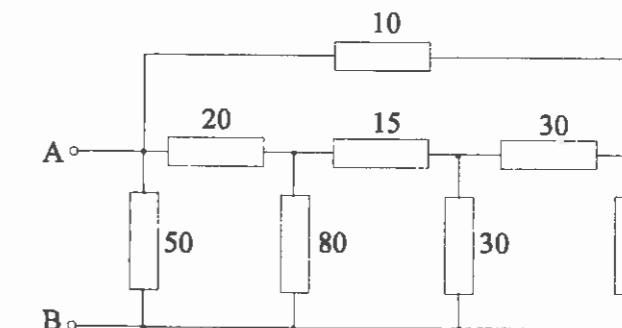
Jmenovitě po dosazení nám vyjde  $R_M = \frac{28}{33} R$ .

Po dosazení již známých hodnot odporů do (\*) vyjde celkový výsledný odpor obvodu:

$$R_{výsl} = \frac{R}{3} + \frac{16}{33} R + \frac{28}{33} R + \frac{R}{3} = 2R.$$

### PŘÍKLAD 1.9:

Vypočtěte výsledný odpor pasivního dvojpólu podle obr. č. 1.19. Hodnoty odporů rezistorů jsou v  $\Omega$ .

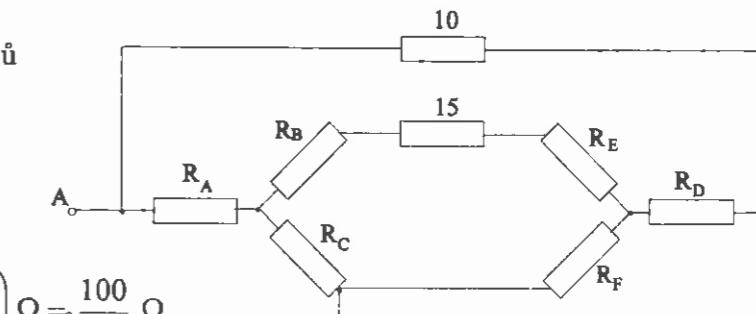


obr. č. 1.19

**Řešení:** Obvod nejprve upravíme provedením dvojitě transfigurace trojúhelníku na hvězdu. Jeden trojúhelník tvoří rezistory 50, 20 a 80  $\Omega$  a druhý trojúhelník je tvořen rezistory 30, 30 a 30  $\Omega$ . Schéma lze poté překreslit následovně (obr. č. 1.20):

Hodnoty odporů  
 $R_A$  až  $R_F$   
spočítáme dle  
(9).

$$R_A = \left( \frac{20 \cdot 50}{20+50+80} \right) \Omega = \frac{100}{15} \Omega$$



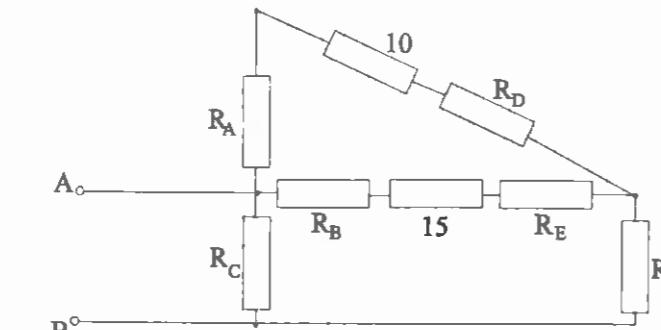
obr. č. 1.20

podobně

$$R_B = \left( \frac{160}{15} \right) \Omega \quad a \quad R_C = \left( \frac{400}{15} \right) \Omega$$

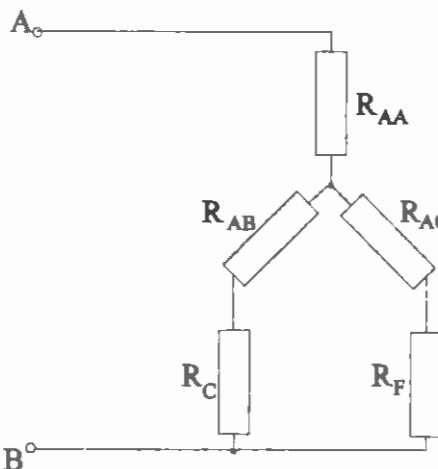
$$R_D = R_E = R_F = \left( \frac{30 \cdot 30}{30+30+30} \right) \Omega = \left( \frac{900}{90} \right) \Omega = 10 \Omega$$

Obr. č. 1.20 lze překreslit pro větší názornost následovně (obr. č. 1.21).



obr. č. 1.21

Odpory  $R_A$ ,  $(R_B + 15 \Omega + R_F)$  a  $(10 \Omega + R_D)$  tvoří v obr. č. 1.21 opět trojúhelník. provedeme tudíž opět ještě jednu transfiguraci trojúhelníku na hvězdu. Získáme obvod na obr. č. 1.22:



obr. č. 1.22

Odpory  $R_{AA}$ ,  $R_{AB}$  a  $R_{AC}$  vypočteme na základě transfiguračních vztahů (9).

$$R_{AA} = \frac{(10\Omega + R_D)R_A}{10\Omega + 15\Omega + R_A + R_B + R_E + R_D} = \frac{400}{187} \Omega$$

$$R_{AB} = \frac{(15\Omega + R_B + R_E)R_A}{10\Omega + 15\Omega + R_A + R_B + R_E + R_D} = \frac{2140}{561} \Omega$$

$$R_{AC} = \frac{(10\Omega + R_D)(R_B + R_E + 15\Omega)}{10\Omega + 15\Omega + R_A + R_B + R_E + R_D} = \frac{2140}{187} \Omega$$

Obrázek č. 1.22 vystihuje již klasické sérioparalelní spojení rezistorů. Výsledný odpor této kombinace umíme již spočítat:

$$R_1 = R_{AB} + R_C = \frac{5700}{187} \Omega,$$

$$R_2 = R_{AC} + R_F = \frac{4010}{187} \Omega.$$

Pro odpor  $R_3$  paralelní části obvodu platí:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Po dosazení za  $R_1$  a  $R_2$  vychází pro  $R_3 = \frac{2285700}{181577} \Omega$ .

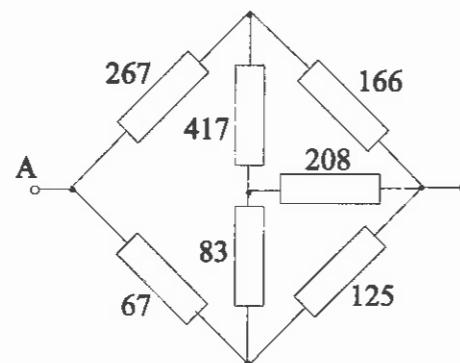
Celkový výsledný odpor obvodu je dán součtem  $R_{AA}$  a  $R_3$ .

$$R_{výsl} = R_{AA} + R_3 = \left( \frac{400}{187} + \frac{2285700}{181577} \right) \Omega \doteq 14,72 \Omega.$$

Pasivní dvojpól má celkový odpor přibližně  $14,72 \Omega$ .

### PŘÍKLAD 1.10:

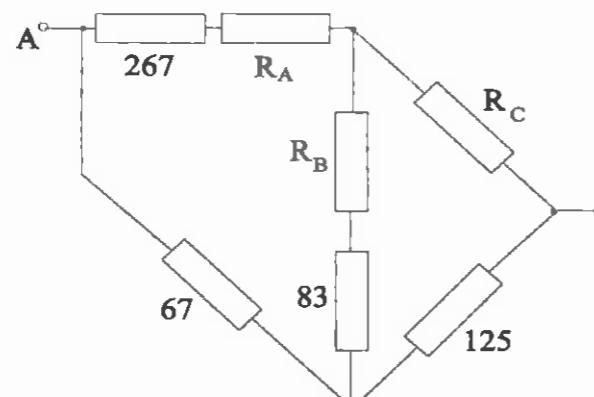
Vypočtěte proud, který dodává zdroj do obvodu podle obr. č. 1.23. Napětí  $U_{AB} = 6 \text{ V}$ . Hodnoty odporů rezistorů jsou v  $\Omega$ .



obr. č. 1.23

**Řešení:** Pro výpočet proudu, který dodává zdroj do obvodu, je zapotřebí určit celkový odpor obvodu.

K výpočtu celkového odporu obvodu použijeme opět transfiguraci trojúhelníku na hvězdu. Trojúhelník v našem případě tvoří rezistory 417, 208 a  $166 \Omega$ . Tyto nahradíme rezistory  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ , zapojenými do hvězdy. Schéma můžeme překreslit:



obr. č. 1.24

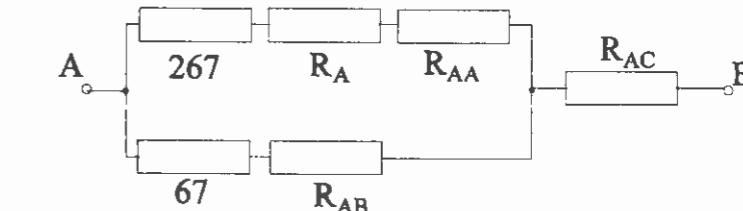
Hodnoty odporů  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  vypočteme dle (9).

$$R_A = \left( \frac{166 \cdot 417}{166 + 417 + 208} \right) \Omega = \frac{69222}{791} \Omega$$

$$R_B = \left( \frac{208 \cdot 417}{166 + 417 + 208} \right) \Omega = \frac{86736}{791} \Omega$$

$$R_C = \left( \frac{166 \cdot 208}{166 + 417 + 208} \right) \Omega = \frac{34528}{791} \Omega$$

Z obr. č. 1.24 je patrné, že větve s rezistory  $R_C$ ,  $125 \Omega$  a  $(R_B + 83 \Omega)$  tvoří opět trojúhelník. provedeme proto ještě jednu transfiguraci tohoto trojúhelníku na hvězdu rezistorů  $R_{AA}$ ,  $R_{AB}$  a  $R_{AC}$ . Obvod je po vhodném překreslení znázorněn na obr. č. 1.25.



obr. č. 1.25

Hodnoty odporů  $R_{AA}$ ,  $R_{AB}$  a  $R_{AC}$  spočteme dle (9).

$$R_{AA} = \frac{(R_B + 83 \Omega) \cdot R_C}{R_B + R_C + 83 \Omega + 125 \Omega} = \frac{5261687392}{226061472} \Omega$$

$$R_{AB} = \frac{(R_B + 83 \Omega) \cdot 125 \Omega}{R_B + R_C + 83 \Omega + 125 \Omega} = \frac{19048625}{285792} \Omega$$

$$R_{AC} = \frac{R_C \cdot 125 \Omega}{R_B + R_C + 83 \Omega + 125 \Omega} = \frac{134875}{8931} \Omega = 15 \Omega$$

Odpor  $R_x$  paralelní části obvodu spočteme následovně:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{(67 \Omega + R_{AB})} + \frac{1}{(267 \Omega + R_A + R_{AA})} \Rightarrow R_x = 99 \Omega.$$

Odpor obvodu na obr. č. 1.25 lze již jednoduše vypočítat:

$$R_{výsl} = R_{AC} + R_x.$$

Po dosazení za  $R_{AC}$  a  $R_x$  vychází celkový odpor obvodu:

$$R_{výsl} = 113,83 \Omega.$$

Proud, který dodává zdroj do obvodu vypočteme jako podíl napětí zdroje a odporu obvodu:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{výsl}} = \frac{6V}{113,83 \Omega} = 52,71 \text{ mA}.$$

Zdroj do obvodu z obr. č. 1.23 dodává proud přibližně 52,71 mA.

## 2. Theveninova a Nortonova věta

Při řešení elektrických obvodů využíváme různých pomocných vět a zákonů. Nejdůležitějšími a nejznámějšími jsou 1. a 2. Kirchhoffův zákon. Protože se jedná o všeobecně známé zákony, nebudeme se jimi mnoho zabývat a pouze si uvedeme jejich znění. To proto, že nacházejí své uplatnění i v částech příkladů, které řešíme obecnějinou metodou.

**1. Kirchhoffův zákon:** (pro uzel elektrické sítě): Algebraický součet proudů v uzlu se rovná nule.

Jestliže se v uzlu stýká n větví, platí:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (10)$$

**2. Kirchhoffův zákon:** (pro jednoduchou smyčku elektrické sítě):

Součet napětí na rezistorech je v uzavřené smyčce roven součtu elektromotorických napětí zdrojů zapojených ve smyčce.

Jestliže se ve smyčce nachází n rezistorů a

$$m \text{ zdrojů, platí: } \sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{j=1}^m U_{ej}. \quad (11)$$

Obecně lze říci, že pokud má elektrický obvod u uzlů a v větví, je celkem nutno sestavit v rovnic, přičemž  $(u-1)$  rovnic plyně z 1. Kirchhoffova zákona a zbylých  $(v-(u-1))$  rovnic pak vyplývá z 2. Kirchhoffova zákona.

Pro jednodušší obvody je použití Kirchhoffových zákonů výhodné a vede rychle k cíli. Řešení složitých elektrických obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů je také možné, je však velice zdlouhavé. Získáme soustavu mnoha rovnic, jejíž řešení nebývá obvykle triviální.

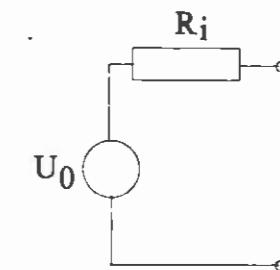
Proto se při řešení složitějších obvodů uchylujeme k pomocným větám. Jedny z nejdůležitějších jsou Theveninova a Nortonova věta (teorém).

## Theveninova věta

Libovolný obvod sestavený z lineárních obvodových prvků (lineárních odporů a zdrojů ...), mající dvě výstupní svorky, se chová k zatěžovací impedanci, připojené k těmto svorkám tak, jako by byl celý tvořen ideálním zdrojem s napětím  $U_0$  se sériově spojeným vnitřním odporem  $R_i$ .

$U_0$  je napětí zdroje na výstupních svorkách bez zátěže. Vnitřní odpor  $R_i$  je odpor, změřený na výstupních svorkách při odpojené zátěži, jsou-li zdroje proudu odpojeny a zdroje napětí nahrazeny zkratem [12].

Výsledný obvod bude mít tvar (obr. č. 2.1):

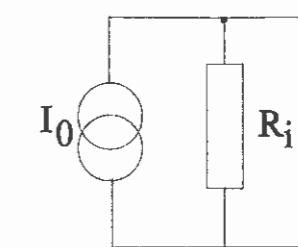


obr. č. 2.1

## Nortonova věta

Libovolný obvod složený z lineárních obvodových prvků a mající dvě výstupní svorky lze nahradit ideálním zdrojem proudu  $I_0$  s paralelně připojeným vnitřním odporem  $R_i$ . Proud  $I_0$  je proud mezi výstupními svorkami při odpojené zátěži (svorky jsou zkratovány). Vnitřní odpor  $R_i$  je odpor naměřený mezi výstupními svorkami při odpojené zátěži, jsou-li zdroje proudu odpojeny a zdroje napětí nahrazeny zkratem [12].

Výsledný obvod bude mít nyní tvar (obr. č. 2.2):



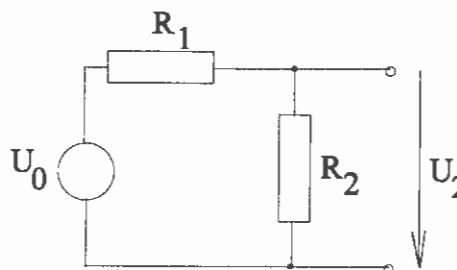
obr. č. 2.2

Pozn.: Proud  $I_0$  zmiňovaný v Nortonově větě se dá vypočítat pomocí  $U_0$  a  $R_i$  (z věty Theveninovy) a Ohmova zákona jako:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i}. \quad (12)$$

Uvedli jsme si dvě pomocné věty, sloužící pro řešení složitějších obvodů.

V příkladech se často setkáme s případem, kdy máme určit výsledné napětí na svorkách obvodu znázorněného na obr. č. 2.3:



obr. č. 2.3

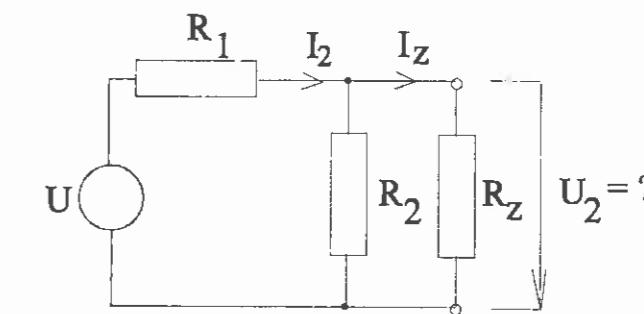
Jedná se o tzv. **DĚLIČ NAPĚTÍ**.

Výstupní napětí  $U_2$  z obr. č. 2.3 vypočítáme podle vzorce:

$$U_2 = U_0 \cdot \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right). \quad (13)$$

### PŘÍKLAD 2.1:

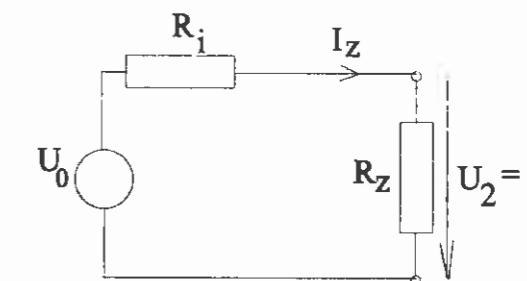
Je dán obvod na obr. č. 2.4., kde  $U = 250 \text{ V}$ ,  $R_1 = 210 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$  a  $I_Z = 3 \text{ mA}$ . Zjednodušte jej pomocí a) Theveninovy věty b) Nortonovy věty.



obr. č. 2.4

Určete velikost výstupního napětí  $U_2$ .

**Řešení:** a) Obvod lze pomocí Theveninovy věty přetrasformovat na tvar dle obr. č. 2.5:



obr. č. 2.5

Napětí  $U_0$  vypočítáme dle (13) - vztah pro dělič napětí:

$$U_0 = U \cdot \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 250 \text{ V} \cdot \frac{30000 \Omega}{20000 \Omega + 30000 \Omega} = 150 \text{ V}$$

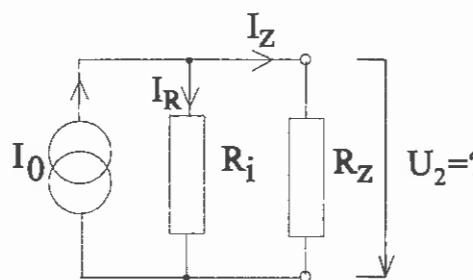
Odpor  $R_i$  vypočítáme na základě předpokladů ve Theveninově větě ( $R_i$  je odpór na výstupních svorkách při odpojené zátěži a zkratovaném zdroji  $U$ ). V našem případě je  $R_i$  dáno paralelní kombinací  $R_1$  a  $R_2$ .

Odtud:  $R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 12 \text{ k}\Omega$ .

Jelikož elektromotorické napětí  $U_0$  zdroje je rovno úbytku napětí na rezistoru  $R_i$  a zatěžovacím rezistoru  $R_Z$ , můžeme již na základě 2. Kirchhoffova zákona spočítat napětí  $U_2$ :

$$U_2 = U_0 - R_i I_Z = 150 \text{ V} - 12000 \Omega \cdot 0,003 \text{ A} = 114 \text{ V}.$$

b) Na základě Nortonovy věty lze obvod z obr. č. 2.4 přetrasformovat na tvar:



obr. č. 2.6

Odpor  $R_i$  vypočítáme stejným způsobem jako v části a):

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 12 \text{ k}\Omega$$

Proud  $I_0$  vypočítáme na základě vztahu (12), kde  $U_0$  je napětí ideálního zdroje, vypočítané v části a):

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i} = \left( \frac{150}{12000} \right) A = 12,5 \text{ mA}.$$

Proud  $I_R$  procházející rezistorem  $R_i$  vypočítáme na základě

1. Kirchhoffova zákona:

$$I_R = I_0 - I_Z = 12,5 \text{ mA} - 3 \text{ mA} = 9,5 \text{ mA}.$$

Jelikož napětí na zatěžovacím rezistoru  $R_z$  musí být stejné jako napětí na odporu  $R_i$ , lze psát:

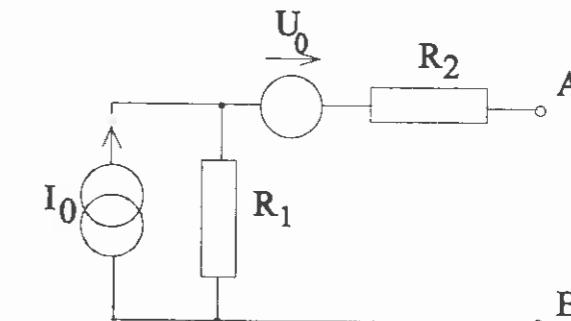
$$U_2 = R_i \cdot I_R = 12000 \Omega \cdot 0,0095 \text{ A} = 114 \text{ V}.$$

Výsledné napětí na zatěžovacím rezistoru nám vyšlo stejně jako v a).

Je z principu jedno, podle které věty se obvod počítal.

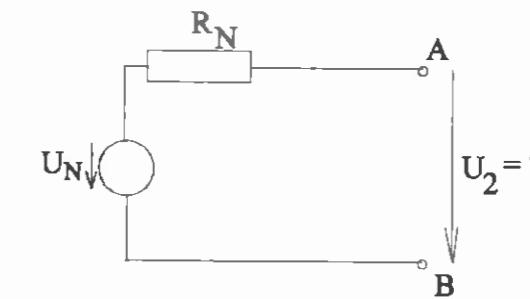
### PŘÍKLAD 2.2:

Je dán obvod podle obr. č. 2.7, kde  $I_0 = 40 \text{ mA}$ ,  $U_0 = 4 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2,4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 600 \Omega$ . Zjednodušte jej pomocí Theveninovy věty.



obr. č. 2.7

**Řešení:** Obvod (dvojpól) z obr. č. 2.7 převedeme podle Theveninovy věty na sériovou kombinaci náhradního ideálního napěťového zdroje  $U_N$  a náhradního rezistoru  $R_N$  podle obrázku č. 2.8:



obr. č. 2.8

Hodnota a orientace napěťového zdroje  $U_N$  je dána napětím naprázdno na svorkách původního dvojpólu, odpor náhradního rezistoru  $R_N$  je dán celkovým odporem na svorkách původního dvojpólu při nulových hodnotách zdrojů napětí a proudu (viz Theveninova věta) [8].

Tedy napětí naprázdno na dvojpólu bude dáno vztahem (plyne z 2. Kirchhoffova zákona):

$$U_2 = -U_0 + R_1 I_0 = -4 \text{ V} + 2,4 \text{ k}\Omega \cdot 40 \text{ mA} = 92 \text{ V}$$

$$U_2 = U_N = 92 \text{ V}.$$

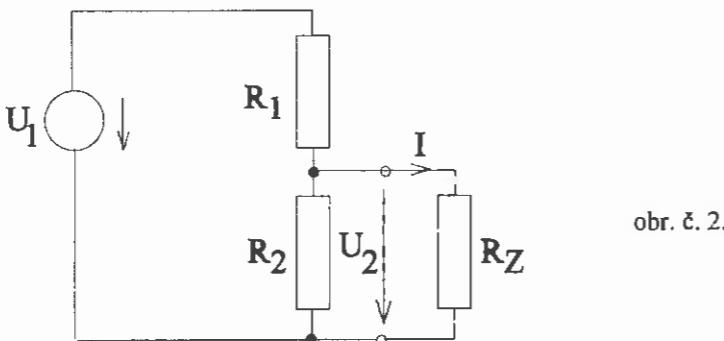
Hodnotu odporu náhradního rezistoru  $R_N$  určíme ze vztahu:

$$R_N = R_1 + R_2 = 2,4 \text{ k}\Omega + 0,6 \text{ k}\Omega = 3 \text{ k}\Omega.$$

### PŘÍKLAD 2.3:

Na zdroj napětí  $U_1 = 10 \text{ V}$  se zanedbatelným vnitřním odporem připojíme dělič napětí tvořený rezistory  $R_1 = 500 \Omega$  a  $R_2 = 1000 \Omega$  (viz obr. č. 2.9).

Nahraďte dělič napětí z hlediska výstupních svorek ideálním zdrojem napětí  $U_0$  v sérii s vnitřním odporem  $R_i$ . Určete velikost výstupního napětí  $U_2$ . Zatěžovací odpor má hodnotu  $R_Z = 1200 \Omega$ .



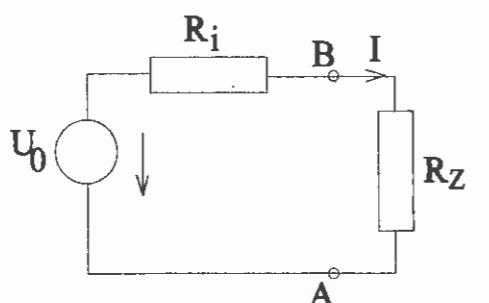
obr. č. 2.9

**Řešení:** Podle Theveninovy věty je možno jakýkoli lineární obvod nahradit z hlediska výstupních svorek náhradním zdrojem napětí  $U_0$  v sérii s vnitřním odporem  $R_i$ . Náhradní napětí  $U_0$  je napětí na výstupních svorkách v nezatíženém stavu (pro  $I = 0$ ). V nezatíženém stavu se napětí rozdělí v poměru odporů.

$$U_0 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ V} \cdot \frac{1000 \Omega}{500 \Omega + 1000 \Omega} = 6,67 \text{ V}$$

a náhradní vnitřní odpor  $R_i$  je odpor, který by se v nezatíženém stavu objevil na výstupních svorkách, kdybychom zdroje napětí zkratovali a zdroje proudu odpojili. V našem případě je  $R_i$  dáno paralelní kombinací  $R_1$  a  $R_2$ :

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{500 \Omega \cdot 1000 \Omega}{500 \Omega + 1000 \Omega} = 334 \Omega$$



obr. č. 2.10

Náhradní schéma je na obr. č. 2.10 a proud  $I$  je dán:

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_Z} = \frac{6,67 \text{ V}}{(334 + 1200) \Omega} = 0,00435 \text{ A}.$$

Úbytek napětí  $U_1$  na odporu  $R_1$ :

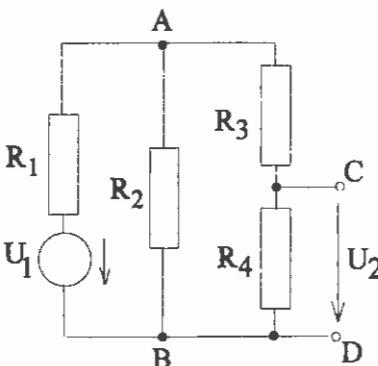
$$U_1 = R_1 \cdot I = 334 \Omega \cdot 0,00435 \text{ A} = 1,45 \text{ V}.$$

A konečně výstupní napětí  $U_2$  při zatížení odporu  $R_Z$ :

$$U_2 = U_0 - U_1 = 6,67 \text{ V} - 1,45 \text{ V} = 5,22 \text{ V}.$$

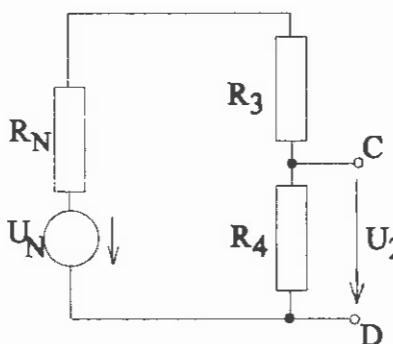
### PŘÍKLAD 2.4:

Je dán obvod podle obr. č. 2.11, máme určit napětí  $U_2$  na výstupních svorkách C a D.



obr. č. 2.11

**Řešení:** Obvod nalevo od svorek A a B včetně odporu  $R_2$  nahradíme podle Theveninovy věty jedním zdrojem  $U_N$  a rezistorem  $R_N$  (viz obr. č. 2.12)



obr. č. 2.12

Odpor rezistoru  $R_N$  je v našem případě určen paralelní kombinací odporů rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ .

Z Theveninovy věty tak vyplývá:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} ; \quad U_N = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Výsledné napětí  $U_2$  na svorkách C a D je pak zřejmě

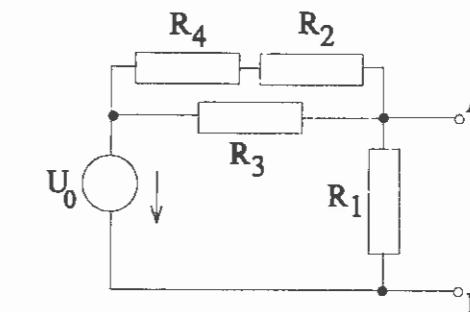
$$U_2 = U_N \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_3 + R_N} ,$$

neboť obr. č. 2.12 představuje již dělič napětí, pro který platí (13).

### PŘÍKLAD 2.5:

Je dán obvod podle obr. č. 2.13.  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$ ,  $U_0 = 15 \text{ V}$ . Nahraďte tento obvod z hlediska svorek A, B:

- a) jedním napěťovým zdrojem a sériovým odporem,
- b) jedním proudovým zdrojem a paralelním odporem.



obr. č. 2.13

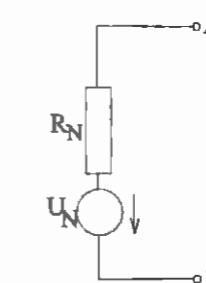
**Řešení:** a) Postupujeme podle Theveninovy věty. Obvod představuje napěťový dělič. S využitím (13) je napětí náhradního zdroje:

$$U_N = U_0 \cdot \frac{\frac{R_1}{(R_2 + R_4) \cdot R_3}}{R_2 + R_3 + R_4} + R_1 = 0,95 \text{ V} .$$

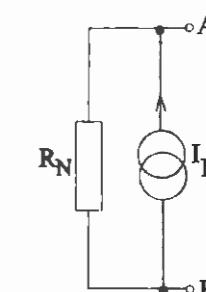
Odpor mezi svorkami A, B je při zkratování napěťového zdroje:

$$R_N = \frac{R \cdot (R_2 + R_4)}{R + R_2 + R_4} = 15,2 \Omega , \text{ kde } R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} .$$

Náhradní obvod bude mít tvar obr. č. 2.14 s vypočtenými hodnotami  $U_N$  a  $R_N$  [6].



obr. č. 2.14



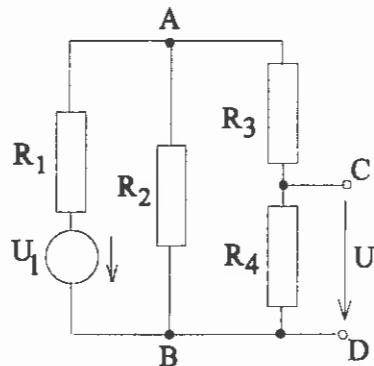
obr. č. 2.15

b) Postupujeme podle Nortonovy věty, přičemž odpor  $R_N$  je shodný s tím, jenž jsme vypočetli v části a). Náhradní obvod bude mít tvar obr. č. 2.15. Proud  $I_N$  je podle (12) opět s přihlédnutím k aktuálním indexům:

$$I_N = \frac{U_N}{R_N} = \frac{0,95 \text{ V}}{15,2 \Omega} = 0,0625 \text{ A} .$$

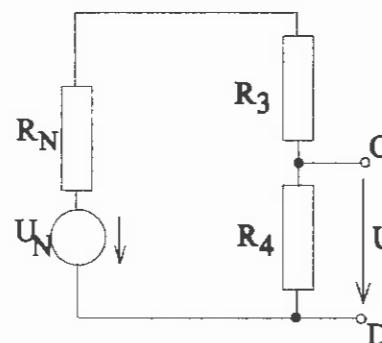
### PŘÍKLAD 2.4:

Je dán obvod podle obr. č. 2.11, máme určit napětí  $U_2$  na výstupních svorkách C a D.



obr. č. 2.11

**Řešení:** Obvod nalevo od svorek A a B včetně odporu  $R_2$  nahradíme podle Theveninovy věty jedním napěťovým zdrojem  $U_N$  a rezistorem  $R_N$  (viz obr. č. 2.12)



obr. č. 2.12

Odpor rezistoru  $R_N$  je v našem případě určen paralelní kombinací odporů rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ .

Z Theveninovy věty tak vyplývá:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} ; \quad U_N = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Výsledné napětí  $U_2$  na svorkách C a D je pak zřejmě

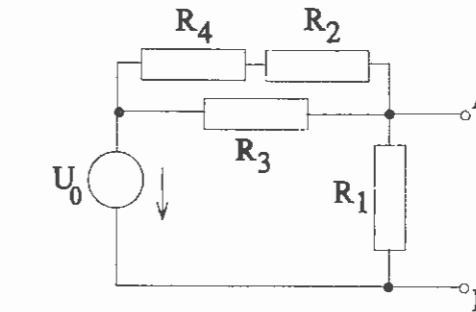
$$U_2 = U_N \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_3 + R_N} ,$$

neboť obr. č. 2.12 představuje již dělič napětí, pro který platí (13).

### PŘÍKLAD 2.5:

Je dán obvod podle obr. č. 2.13.  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$ ,  $U_0 = 15 V$ . Nahraďte tento obvod z hlediska svorek A, B:

- a) jedním napěťovým zdrojem a sériovým odporem,
- b) jedním proudovým zdrojem a paralelním odporem.



obr. č. 2.13

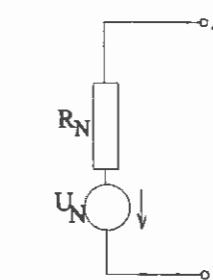
**Řešení:** a) Postupujeme podle Theveninovy věty. Obvod představuje napěťový dělič. S využitím (13) je napětí náhradního zdroje:

$$U_N = U_0 \cdot \frac{R_1}{(R_2 + R_4) \cdot R_3 + R_1} = 0,95 V .$$

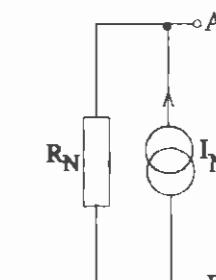
Odpor mezi svorkami A, B je při zkratování napěťového zdroje:

$$R_N = \frac{R \cdot (R_2 + R_4)}{R + R_2 + R_4} = 15,2 \Omega , \text{ kde } R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} .$$

Náhradní obvod bude mít tvar obr. č. 2.14 s vypočtenými hodnotami  $U_N$  a  $R_N$  [6].



obr. č. 2.14



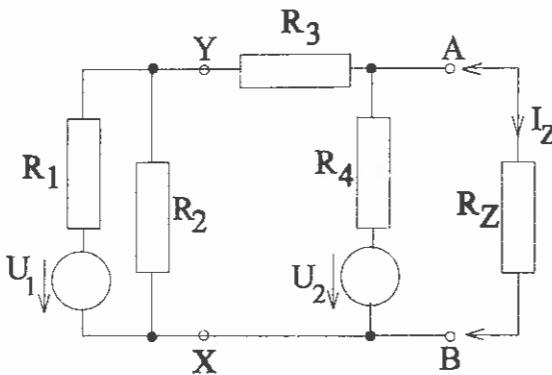
obr. č. 2.15

b) Postupujeme podle Nortonovy věty, přičemž odpor  $R_N$  je shodný s tím, jenž jsme vypočetli v části a). Náhradní obvod bude mít tvar obr. č. 2.15. Proud  $I_N$  je podle (12) opět s přihlédnutím k aktuálním indexům:

$$I_N = \frac{U_N}{R_N} = \frac{0,95 V}{15,2 \Omega} = 0,0625 A .$$

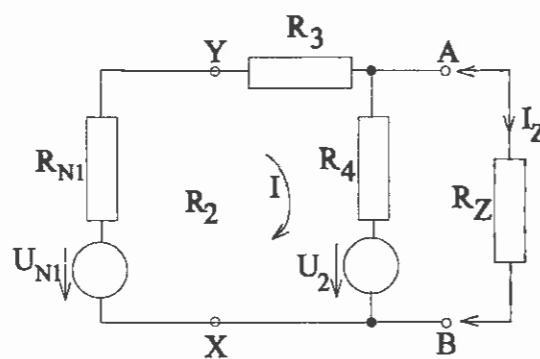
### PŘÍKLAD 2.6:

Je dán obvod podle obr. č. 2.16.  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $U_1 = 8 \text{ V}$ ,  $U_2 = 4 \text{ V}$ . Určete proud  $I_Z$  tekoucí rezistorem  $R_Z$ .



obr. č. 2.16

**Řešení:** Obvod vyřešíme pomocí Theveninovy věty tak, že jeho část nalevo od svorek A, B nahradíme zdrojem  $U_N$  v sérii s vnitřním odporem  $R_N$  a proud zatěžovacím odporem  $R_Z$  určíme pak snadno pomocí Ohmova zákona. Náhradu provedeme ve dvou krocích: nejprve takto nahradíme část obvodu nalevo od svorek X, Y, takže dostaneme obvod na obr. č. 2.17.



obr. č. 2.17

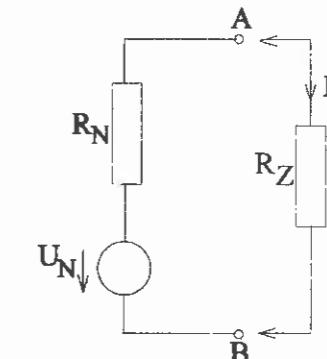
Hodnoty odporu  $R_{N1}$  a napětí  $U_{N1}$  (i orientací) určíme z podmínek, že napětí mezi svorkami X a Y původního i náhradního obvodu naprázdno (při odpojené části obvodu napravo od svorek X, Y) je stejné, že odpory původního i náhradního obvodu mezi svorkami X, Y je stejný, nebo že při zkratovaných svorkách X, Y teče zkratem v obou případech stejný proud [6].

Napětí naprázdno mezi svorkami X, Y je tedy:

$$U_{N1} = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{16}{3} \text{ V}$$

Odpor mezi svorkami X, Y musí být rovněž v obou případech stejný, čili platí:  $R_{N1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3} \Omega$ .

Stejný postup použijeme pro obvod mezi svorkami A, B na obr. č. 2.17. Kombinaci rezistorů  $R_{N1}$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  a zdrojů  $U_{N1}$  a  $U_2$  nahradíme jediným rezistorem  $R_N$  a jediným napěťovým zdrojem  $U_N$ , viz obr. č. 2.18:



obr. č. 2.18

Pro odpor  $R_N$  můžeme psát rovnici (zdroje  $U_{N1}$  a  $U_2$  jsou zkratovány):

$$R_N = \frac{(R_{N1} + R_3) \cdot R_4}{R_{N1} + R_3 + R_4} = \frac{5}{4} \Omega$$

Napětí naprázdno mezi svorkami A, B je dáno součtem napětí zdroje  $U_2$  a úbytkem napětí na odporu  $R_4$ , vzniklého průtokem proudu  $I$ , obr. č. 2.17. Orientaci proudu  $I$  jsme zvolili shodnou s orientací zdroje  $U_2$ , napětí naprázdno mezi body A, B je dáno součtem napětí  $U_2$  a  $U_{R4}$ , kde  $U_{R4}$  je úbytek napětí na odporu  $R_4$ . Pro proud  $I$  můžeme podle 2. Kirchhoffova zákona psát:

$$-U_{N1} + I(R_{N1} + R_3 + R_4) + U_2 = 0.$$

Z čehož:

$$I = \frac{U_{N1} - U_2}{R_{N1} + R_3 + R_4} = \frac{1}{4} \text{ A},$$

a pro  $U_{R4}$ :

$$I \cdot R_4 = \frac{1}{4} \text{ A} \cdot 2\Omega = 0,5 \text{ V}.$$

Konečně pro napětí  $U_N$ :

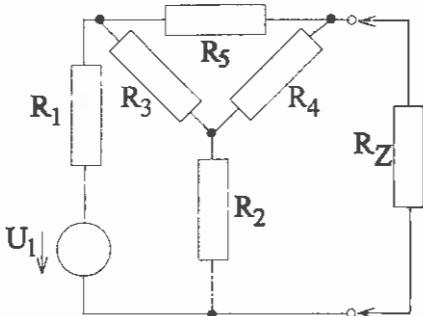
$$U_N = U_2 + U_{R4} = 4 \text{ V} + 0,5 \text{ V} = 4,5 \text{ V}.$$

Tím máme určeny hodnoty odporu rezistoru  $R_N$  a zdroje  $U_N$  náhradního obvodu a můžeme již snadno určit proud zatěžovacím rezistorem  $R_Z$ :

$$I = \frac{U_N}{R_N + R_Z} = \frac{18}{9} \text{ A} = 2 \text{ A}.$$

**PŘÍKLAD 2.7:**

Zjistěte napětí  $U_Z$  na zatěžovacím rezistoru  $R_Z$  v obr. č. 2.19.  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 1000 \Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 500 \Omega$ ,  $R_5 = 250 \Omega$ ,  $R_Z = 600 \Omega$ .



obr. č. 2.19

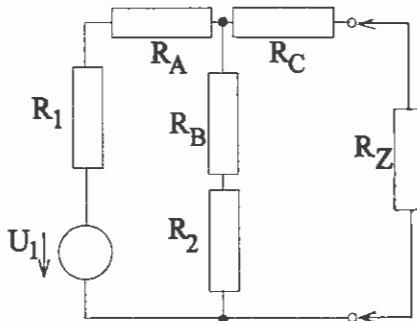
**Řešení:** Nejprve transfigurujeme trojúhelník rezistorů  $R_3$ ,  $R_4$  a  $R_5$  na hvězdu rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  za pomoci vztahů (9).

$$R_A = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 100 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 200 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 100 \Omega$$

Ovvod přejde do tvaru na obr.č. 2.20:



obr. č. 2.20

Podle Theveninovy věty překreslíme obvod na náhradní zapojení s napěťovým zdrojem  $U$  a vnitřním odporem  $R_i$ .

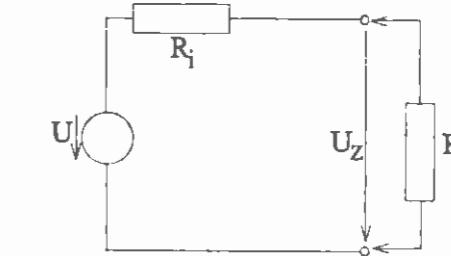
Jedná se vlastně o napěťový dělič, jehož napětí na výstupních svorkách (při odpojeném  $R_Z$ ) je dáno vztahem:

$$U = U_1 \cdot \frac{R_B + R_2}{R_1 + R_A + R_B + R_2} = \frac{60}{14} V \doteq 4,29 V$$

Vnitřní odpor obvodu je podle Theveninovy věty určen:

$$R_i = R_C + \frac{(R_1 + R_A)(R_2 + R_B)}{R_1 + R_2 + R_A + R_B} = \frac{1200}{7} \Omega \doteq 271,5 \Omega$$

Náhradní obvod bude mít tvar obr. č. 2.21:



obr. č. 2.21

Výsledné napětí  $U_Z$  vypočítáme podle vztahu pro napěťový dělič:

$$U_Z = U \cdot \frac{R_Z}{R_i + R_Z} = 2,95 V$$

### PŘÍKLAD 2.8:

Vypočtěte napětí na zatěžovacím rezistoru v obvodu na obr. č. 2.19 (viz příklad 7). Hodnoty odporů a napětí jsou totožné jako v příkladu 2.7. K výpočtu použijte Nortonovu větu.

**Řešení:** Zpočátku postupujeme stejným způsobem jako v příkladu 2.7. Nejprve transfigurujeme trojúhelník rezistorů  $R_3$ ,  $R_4$  a  $R_5$  na hvězdu rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ .

$$R_A = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 100\Omega$$

$$R_B = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 200\Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 100\Omega$$

Poté vzniklý obvod z obr. č. 2.20 nahradíme náhradním zapojením s jedním proudovým zdrojem s paralelně připojeným rezistorem  $R_i$ . Ten je podle Nortonovy věty:

$$R_i = R_c + \frac{(R_1 + R_A)(R_2 + R_B)}{R_1 + R_2 + R_A + R_B} = \frac{1200}{7}\Omega \doteq 271,5\Omega.$$

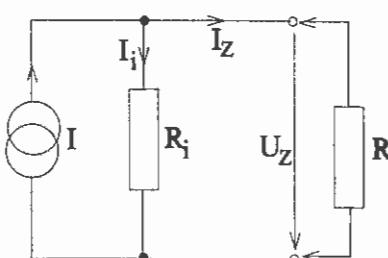
Hodnotu proudu  $I$  vypočteme z Ohmova zákona za využití vypočítaného napětí  $U$  z příkladu 2.7:

$$U = U_1 \cdot \frac{R_B + R_2}{R_1 + R_A + R_B + R_2} = \frac{60}{14}V \doteq 4,29V$$

Pro proud  $I$  platí:

$$I = \frac{U}{R_i} \doteq 0,016A.$$

Nakreslíme výsledné náhradní schéma obvodu (viz obr. č. 2.22)



obr. č. 2.22

Jelikož napětí na zatěžovacím rezistoru  $R_z$  musí být shodné s napětím na rezistoru  $R_i$ , lze psát:

$$I_i \cdot R_i = I_z \cdot R_z$$

Zároveň z 1. Kirchhoffova zákona vyplývá:

$$I = I_i + I_z$$

Po vyřešení této soustavy dvou rovnic obdržíme pro  $I_i$  a  $I_z$  hodnoty:

$$I_i = 11,05\text{ mA}; I_z = 5\text{ mA}$$

A konečně napětí  $U_z$  je rovno úbytku napětí na odporu  $R_z$ , kterým prochází proud  $I_z$ . Tedy:

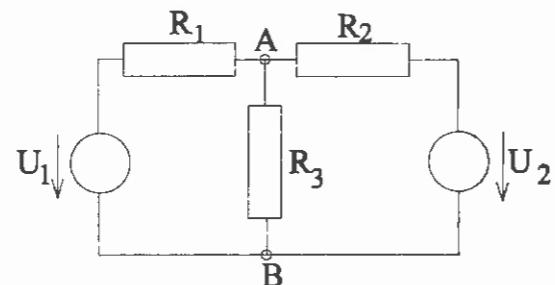
$$U_z = I_z \cdot R_z \doteq 2,95\text{ V.}$$

### PŘÍKLAD 2.9:

Na obr. č. 2.23 je nakreslen obvod se dvěma zdroji napětí  $U_1$  a  $U_2$ .

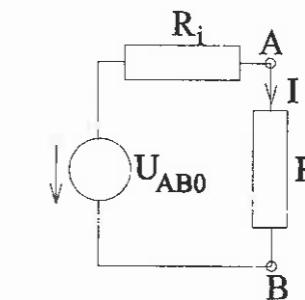
$$U_1 = 10 \text{ V}, U_2 = 20 \text{ V}, R_1 = 10 \Omega, R_2 = 10 \Omega, R_3 = 20 \Omega.$$

Vypočtěte napětí  $U_{AB}$  mezi body A a B. K řešení použijte Theveninovu větu.



obr. č. 2.23

Můžeme tedy nakreslit náhradní obvod viz obr. č. 2.25:



obr. č. 2.25

Proud tekoucí do zátěže  $R_3$  je :

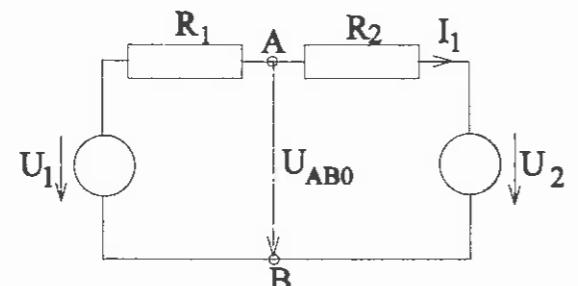
$$I = \frac{U_{AB0}}{R_i + R_3} = \frac{15 \text{ V}}{25 \Omega} = 0,6 \text{ A}.$$

Na rezistoru  $R_i$  bude úbytek napětí  $U_i$ :

$$U_i = R_i \cdot I = (5 \cdot 0,6) \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

---

**Řešení:** Při řešení Theveninovou větou budeme považovat rezistor  $R_3$  za zátěž připojenou na svorky A a B. Nalezneme nejprve napětí  $U_{AB0}$ , které bylo na svorkách v nezatíženém stavu (viz obr. č. 2.24).



obr. č. 2.24

Podle 2. Kirchhoffova zákona můžeme psát rovnici:

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 + U_2 - U_1 = 0.$$

Z této rovnice vypočteme  $I_1$  :

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{-10 \text{ V}}{20 \Omega} = -0,5 \text{ A}.$$

Opět podle 2. Kirchhoffova zákona lze například psát:

$$R_2 \cdot I_1 + U_2 - U_{AB0} = 0.$$

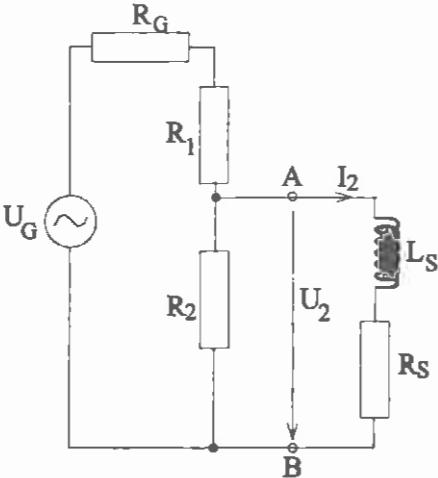
Vypočteme  $U_{AB0}$  :  $U_{AB0} = U_2 + R_2 \cdot I_1 = 15 \text{ V}.$

Odpor náhradního rezistoru  $R_i$ , který se jeví na svorkách AB při zkratovaných zdrojích napětí, je dán paralelní kombinací  $R_1$  a  $R_2$ :

$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5 \Omega.$$

**PŘÍKLAD 2.10:**

Vypočtěte výstupní napětí  $U_2$  v obvodu na obr. č. 2.26. Je dán:  $L_S = 40 \text{ mH}$ ,  $R_S = 1,5 \Omega$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $U_G = 6 \text{ V}$ ,  $R_G = 3 \Omega$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .



obr. č. 2.26

Impedance obvodu je:

$$Z_Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(R_i + R_S)^2 + X_S^2},$$

$$Z_Z = \sqrt{(2,5 + 1,5)^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0,04)^2} \Omega = \sqrt{(2,5 + 1,5)^2 + 12,6^2} \Omega \doteq 13,2 \Omega.$$

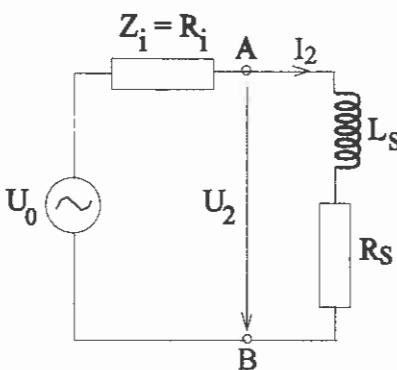
Proud  $I_2$  je:

$$I_2 = \frac{U_0}{Z_Z} = \frac{3 \text{ V}}{13,2 \Omega} \doteq 0,227 \text{ A}.$$

A konečně výstupní napětí:

$$U_2 = I_2 \cdot \sqrt{R_S^2 + X_S^2} = (0,227 \cdot \sqrt{1,5^2 + 12,6^2}) \text{ V} \doteq 2,88 \text{ V}.$$

**Řešení:** Obvod převedeme pomocí Theveninovy věty na náhradní zapojení podle obrázku č. 2.27. Každý aktivní jednobranu můžeme (na základě Theveninovy věty) při zachování proudových a napěťových poměrů na zátěži nahradit zdrojem napětí  $U_0$  a sériovou impedancí  $Z_i$ .



obr. č. 2.27

Velikost napětí  $U_0$  náhradního zdroje se vypočte jako napětí naprázdno na výstupních svorkách jednobranu A - B:

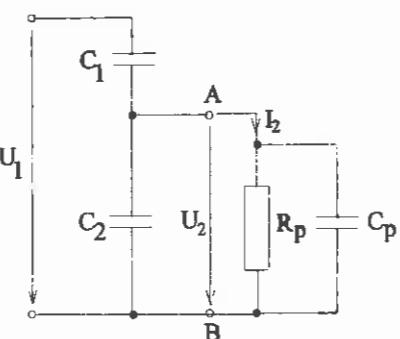
$$U_0 = U_G \cdot \frac{R_2}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{5 \Omega}{(3 + 2 + 5) \Omega} \cdot 6 \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Impedance  $Z_i$  je dána impedancí na výstupních svorkách jednobranu při odpojené zátěži a zdroji napětí spojením nakrátko; platí tedy:

$$Z_i = \frac{R_2(R_G + R_1)}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{5 \Omega \cdot (3 + 2) \Omega}{(3 + 2 + 5) \Omega} = 2,5 \Omega.$$

### PŘÍKLAD 2.11:

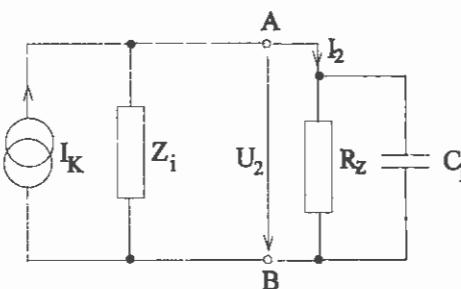
Přeypočtěte pomocí Nortonovy věty obvod nakreslený na obr. č. 2.28. na náhradní schéma se zdrojem proudu  $I_K$  a s paralelní impedancí  $Z_i$ . Je dán:  $C_1 = 1,5 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 3,5 \text{ nF}$ ,  $U_1 = 8 \text{ V}$ ,  $f = 25 \text{ kHz}$ .



obr. č. 2.28

**Řešení:** Na základě Nortonovy věty je možné každý aktivní lineární jednobran při zachování proudových a napěťových poměrů na zátěži nahradit zdrojem proudu  $I_K$  a paralelně připojenou impedancí  $Z_i$ .

Obvod lze tudíž nahradit obvodem z obr. č. 2.29:



obr. č. 2.29

Velikost zdroje proudu vypočteme jako proud nakrátko na výstupních svorkách jednobranu A-B:

$$I_K = \frac{U_1}{X_{C1}} = U_1 \cdot \omega \cdot C_1 ,$$

$$I_K = (8.2\pi \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9}) A \doteq 1,9 \cdot 10^{-3} A .$$

Admitance  $Y_i$  je dána admitancí na výstupních svorkách jednobranu při odpojené zátěži a zdroji napětí spojeném nakrátko:

$$\frac{1}{Z_i} = Y_i = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} = \omega \cdot (C_1 + C_2) ,$$

$$Y_i = 2\pi \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot (1,5 + 3,5) \cdot 10^{-9} S \doteq 785 \cdot 10^{-6} S \Rightarrow Z_i \doteq 1,274 k\Omega .$$

Tímto je náš úkol splněn.

### 3. Metoda smyčkových proudů a uzlových napětí

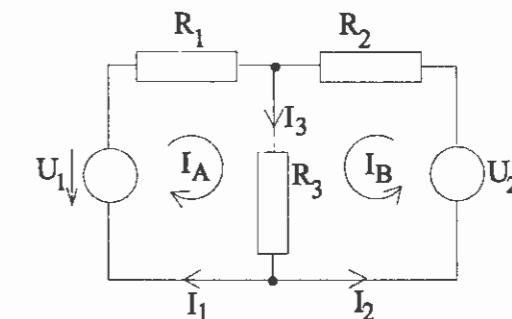
Dalšími z metod, které slouží k řešení elektrických obvodů jsou metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí. Ve své podstatě obě vycházejí z Kirchhoffových zákonů [12].

#### Metoda smyčkových proudů

Tato metoda umožnuje řešit elektrické obvody na základě 2. Kirchhoffova zákona ovšem s podstatným omezením počtu rovnic. Pokud má obvod v větví a u uzlů, vystačíme pouze s  $(v-u+1)$  rovnicemi.

Tato metoda spočívá v tom, že si v jednotlivých nezávislých smyčkách obvodu stanovíme libovolný směr proudů, které jimi protékají. Tyto proudy nazýváme smyčkovými, označujeme např.  $I_{S1}$ ,  $I_{S2}$  atd. nebo častěji  $I_A$ ,  $I_B$  atd. Vyřešíme soustavu rovnic pro smyčkové proudy plynoucích z 2. Kirch. zákona pro dané smyčky obvodu. K původním proudům ( $I_1$  atd.), které tekly v obvodu, se dostaneme pomocí tzv. přeopočítávacích vztahů. Celou metodu si uvedeme na následujícím jednoduchém příkladě:

Máme vypočítat proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  tekoucí obvodem na obr. č. 3.1.



obr. č. 3.1

Pro obvod z obr. č. 3.1 můžeme dle 2. Kirchhoffova zákona psát rovnice:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 + R_3 I_3, \\ U_2 &= R_2 I_2 + R_3 I_3 . \end{aligned} \quad (14)$$

Do obrázku vyznačíme směry smyčkových proudů  $I_A$  a  $I_B$  ve smyčkách.

Rovnice (14) upravené pro smyčkové proudy budou nyní mít tvar:

$$U_1 = R_1 I_A + R_3 (I_A + I_B),$$

$$U_2 = R_2 I_B + R_3 (I_A + I_B) . \quad (15)$$

V dalším řešíme soustavu (15), přičemž přepočítávací vztahy mezi smyčkovými a původními proudy jsou:

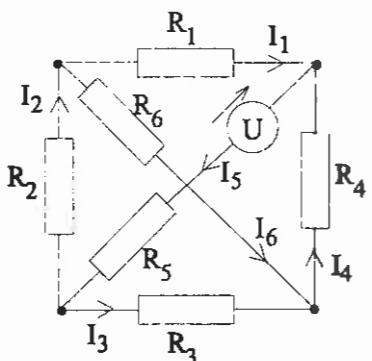
$$I_1 = I_A, \quad I_2 = I_B, \quad I_3 = I_A + I_B . \quad (16)$$

### Metoda uzlových napětí

Tato metoda umožňuje řešit el. obvody na základě 1. Kirchhoffova zákona opět s podstatným omezením počtu rovnic. Pokud má elektrický obvod u uzlů, vystačíme pouze s  $(u-1)$  rovnicemi. Pod pojmem uzlového napětí si můžeme představit potenciál daného uzlu vůči náměřenému referenčnímu uzlu [12].

Celou metodu si ozrejmíme opět nejlépe na názorném příkladě:

Máme určit proudy  $I_1$  až  $I_6$  tekoucí obvodem na obr. č. 3.2.



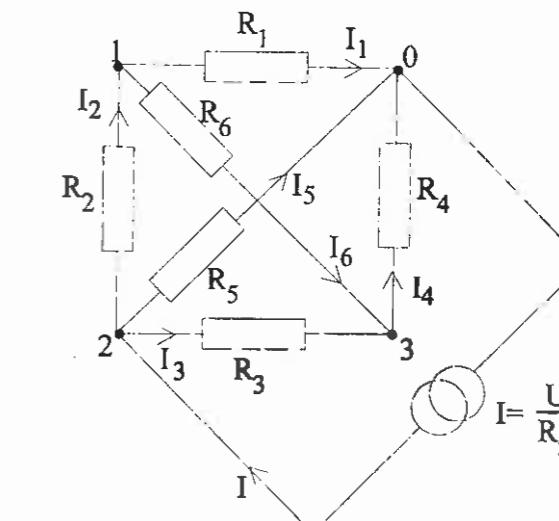
obr. č. 3.2

Nejprve všechny zdroje napětí musíme nahradit zdroji proudu pomocí Nortonovy věty. Proto zdroj napětí v obvodu s odporem  $R_5$  nahradíme zdrojem proudu  $I$  s  $R_5$  paralelně zapojeným.

Platí:

$$I = \frac{U}{R_5} . \quad (17)$$

Za referenční uzel zvolíme pravý horní uzel. Označíme jej např. 0. Ostatní uzly označíme po řadě 1, 2 a 3. Nyní můžeme překreslit celé schéma (viz obr. č. 3.3). Každý uzel 1, 2, 3 má vůči uzlu 0 určitý potenciál. Těm odpovídají napětí  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ . Takto jsme stanovili uzlová napětí jednotlivých uzlů vůči zvolenému referenčnímu. Pro jednotlivé uzly 1, 2 a 3 můžeme psát rovnice, vycházející z 1. Kirchhoffova zákona. Na levou stranu rovnic píšeme proud, který je do uzlu přímo dodáván, na pravou pak proudy, jenž nejsou od zdroje.



obr. č. 3.3

Pro uzel 2:

$$I = I_2 + I_3 + I_5,$$

$$\text{což odpovídá: } I = \frac{U}{R_5} = \frac{U_2 - U_1}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_3} + \frac{U_2}{R_5} . \quad (18)$$

Pro uzel 1:

$$0 = I_1 + I_6 - I_2,$$

$$\text{což odpovídá: } 0 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_6} - \frac{U_2 - U_1}{R_2} . \quad (19)$$

Pro uzel 3:

$$0 = I_4 - I_3 - I_6,$$

$$\text{což odpovídá: } 0 = \frac{U_3}{R_4} - \frac{U_2 - U_3}{R_3} - \frac{U_1 - U_3}{R_6} . \quad (20)$$

Máme soustavu 3 rovnic (18, 19, 20) pro neznámá uzlová napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_3$ . Tuto vyřešíme a hledané proudy  $I_1$  až  $I_6$  získáme z uzlových napětí pomocí přepočítávacích vztahů:

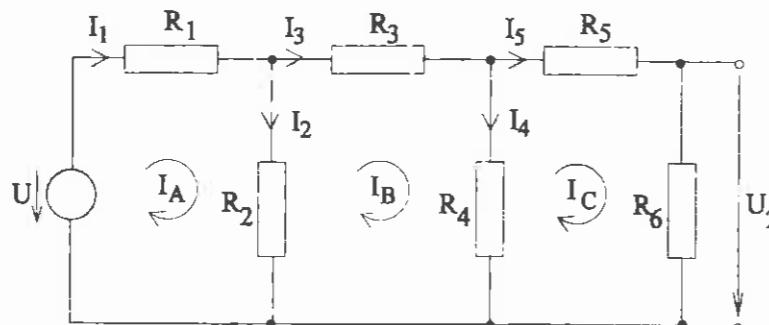
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{R_1}, & I_2 &= \frac{U_2 - U_1}{R_2}, & I_3 &= \frac{U_2 - U_3}{R_3}, \\ I_4 &= \frac{U_3}{R_4}, & I_5 &= \frac{U_2}{R_5}, & I_6 &= \frac{U_1 - U_3}{R_6} \end{aligned} \quad (21)$$

Závěrem je třeba uvést, že metodu smyčkových proudů je vhodné použít pro obvody s mnoha uzly, kdežto metodu uzlových napětí naopak pro obvody, kde je počet uzlů menší než počet nezávislých smyček [12].

Z tohoto je patrné, že ve většině obvodů bude užíváno metody smyčkových proudů.

**PŘÍKLAD 3.1:**

Na zdroj stejnosměrného napětí 100 V je připojena kombinace rezistorů zapojených podle obr. č. 3.4., kde  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 80 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$ ,  $R_6 = 50 \Omega$ . Určete napětí na výstupních svorkách a smyčkové proudy  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ .



obr. č. 3.4

Dále vztah pro  $I_B$  upravovat nebudeme. Po dosazení hodnot odporů nám pro  $I_B$  číselně vychází:

$$I_B \doteq 0,662 \text{ A.}$$

Po dosazení za  $I_B$  do (22) a (23) nám vychází  $I_A$  a  $I_C$ :

$$I_A \doteq 1,108 \text{ A} \quad , \quad I_C = I_S \doteq 0,354 \text{ A.}$$

Napětí  $U_2$  na výstupních svorkách je pak dán úbytkem napětí na rezistoru  $R_6$ , jímž protéká proud  $I_5$ :

$$U_2 = R_6 I_5 \doteq 17,7 \text{ V.}$$

**Řešení:** Nejdříve vypočítáme jednotlivé smyčkové proudy  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ .

Mezi smyčkovými a původními proudy  $I_1$  až  $I_5$  platí přepočítávací vztahy:

$$I_1 = I_A, \quad I_3 = I_B, \quad I_5 = I_C, \quad I_2 = I_A - I_B, \quad I_4 = I_B - I_C.$$

Pro jednotlivé smyčky lze psát rovnice:

$$U = R_1 I_A + R_2 (I_A - I_B),$$

$$0 = R_3 I_B + R_4 (I_B - I_C) + R_2 (I_B - I_A),$$

$$0 = R_5 I_C + R_6 I_C + R_4 (I_C - I_B).$$

$$\text{Z prvej rovnice vyjádříme } I_A: \quad I_A = \frac{U + R_2 I_B}{R_1 + R_2}. \quad (22)$$

$$\text{Ze třetí rovnice vyjádříme } I_C: \quad I_C = \frac{R_4 I_B}{R_4 + R_5 + R_6}. \quad (23)$$

Tyto vyjádřené smyčkové proudy  $I_A$  a  $I_B$  dosadíme do druhé rovnice a vypočteme tak  $I_B$ :

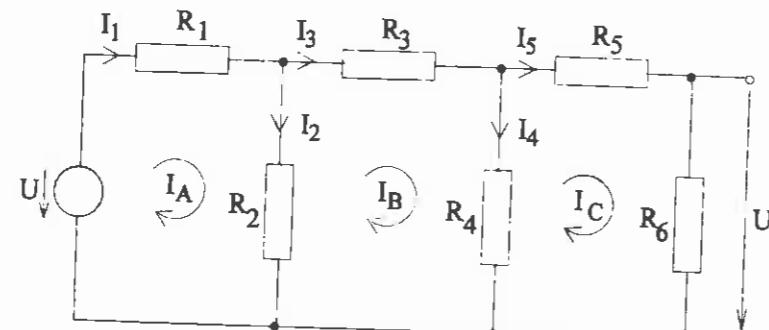
$$0 = (R_2 + R_3 + R_4) I_B - R_2 I_A - R_4 I_C,$$

$$0 = -R_2 \cdot \frac{U + R_2 I_B}{R_1 + R_2} + (R_2 + R_3 + R_4) I_B - R_4 \cdot \frac{R_4 I_B}{R_4 + R_5 + R_6},$$

$$\left( R_2 + R_3 + R_4 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4^2}{R_4 + R_5 + R_6} \right) I_B = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2}.$$

### PŘÍKLAD 3.1:

Na zdroj stejnosměrného napětí 100 V je připojena kombinace rezistorů zapojených podle obr. č. 3.4., kde  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 80 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$ ,  $R_6 = 50 \Omega$ . Určete napětí na výstupních svorkách a smyčkové proudy  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ .



obr. č. 3.4

**Řešení:** Nejdříve vypočítáme jednotlivé smyčkové proudy  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ . Mezi smyčkovými a původními proudy  $I_1$  až  $I_5$  platí přepočítávací vztahy:

$$I_1 = I_A, \quad I_3 = I_B, \quad I_5 = I_C, \quad I_2 = I_A - I_B, \quad I_4 = I_B - I_C.$$

Pro jednotlivé smyčky lze psát rovnice:

$$U = R_1 I_A + R_2 (I_A - I_B),$$

$$0 = R_3 I_B + R_4 (I_B - I_C) + R_2 (I_B - I_A),$$

$$0 = R_5 I_C + R_6 I_C + R_4 (I_C - I_B).$$

$$\text{Z prvé rovnice vyjádříme } I_A: \quad I_A = \frac{U + R_2 I_B}{R_1 + R_2}. \quad (22)$$

$$\text{Ze třetí rovnice vyjádříme } I_C: \quad I_C = \frac{R_4 I_B}{R_4 + R_5 + R_6}. \quad (23)$$

Tyto vyjádřené smyčkové proudy  $I_A$  a  $I_B$  dosadíme do druhé rovnice a vypočteme tak  $I_B$ :

$$0 = (R_2 + R_3 + R_4) I_B - R_2 I_A - R_4 I_C,$$

$$0 = -R_2 \cdot \frac{U + R_2 I_B}{R_1 + R_2} + (R_2 + R_3 + R_4) I_B - R_4 \cdot \frac{R_4 I_B}{R_4 + R_5 + R_6},$$

$$\left( R_2 + R_3 + R_4 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4^2}{R_4 + R_5 + R_6} \right) I_B = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2}.$$

Dále vztah pro  $I_B$  upravovat nebudeme. Po dosazení hodnot odporů nám pro  $I_B$  číselně vychází:

$$I_B \doteq 0,662 \text{ A.}$$

Po dosazení za  $I_B$  do (22) a (23) nám vychází  $I_A$  a  $I_C$ :

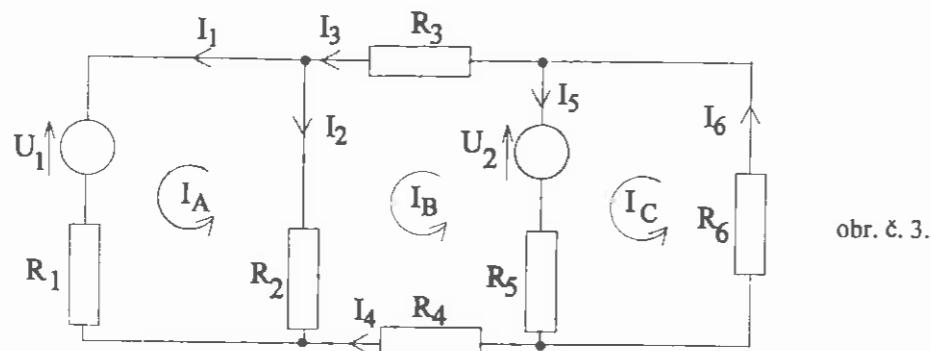
$$I_A \doteq 1,108 \text{ A}, \quad I_C = I_5 \doteq 0,354 \text{ A.}$$

Napětí  $U_2$  na výstupních svorkách je pak dán úbytkem napětí na rezistoru  $R_6$ , jímž protéká proud  $I_5$ :

$$U_2 = R_6 I_5 \doteq 17,7 \text{ V.}$$

### PŘÍKLAD 3.2:

Vypočtěte proudy ve všech větvích sítě podle obr.č. 3. 5, jestliže  
 $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R_5 = 10 \Omega$ ,  $R_6 = 4 \Omega$ ,  $U_1 = 30 \text{ V}$ ,  
 $U_2 = 60 \text{ V}$ .



obr. č. 3.5

Vzhledem k orientaci a označení smyčkových proudů lze psát přepočítávací vztahy pro jednotlivé proudy  $I_1$  až  $I_6$ :

$$I_1 = I_A, \quad I_2 = I_B - I_A, \quad I_3 = I_B, \quad I_4 = -I_B, \quad I_5 = I_C - I_B, \quad I_6 = I_C.$$

Z čehož nám po dosazení za  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$  vychází:

$$\begin{array}{lll} I_1 \doteq 5,85 \text{ A} & I_2 \doteq -4,83 \text{ A} & I_3 \doteq 1,02 \text{ A} \\ I_4 \doteq -1,02 \text{ A} & I_5 \doteq 4,00 \text{ A} & I_6 \doteq 5,02 \text{ A}. \end{array}$$

Řešení: Výpočet budeme provádět metodou smyčkových proudů.  
V obrázku jsou značeny (včetně jejich orientace) jako  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$ .  
Pro smyčkové proudy lze psát následující rovnice:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_A + R_2(I_A - I_B), \\ -U_2 &= (R_3 + R_4)I_B + R_2(I_B - I_A) + R_5(I_B - I_C), \\ U_2 &= R_6 I_C + R_5(I_C - I_B). \end{aligned}$$

$$\text{Z první rovnice vyjádříme } I_A: \quad I_A = \frac{U_1 + R_2 I_B}{R_1 + R_2}. \quad (24)$$

$$\text{Ze třetí rovnice vyjádříme } I_C: \quad I_C = \frac{U_2 + R_5 I_B}{R_5 + R_6}. \quad (25)$$

Tyto vyjádřené proudy  $I_A$  a  $I_C$  dosadíme do druhé rovnice, ze které po krátké úpravě dostaneme následující rovnost:

$$\left( R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} - \frac{R_5^2}{R_5 + R_6} \right) I_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 - \frac{R_6}{R_5 + R_6} U_2.$$

Do tohoto vztahu pro  $I_B$  již raději rovnou dosadíme hodnoty odporů rezistorů a jednotlivá napětí a vypočteme smyčkový proud  $I_B$ :

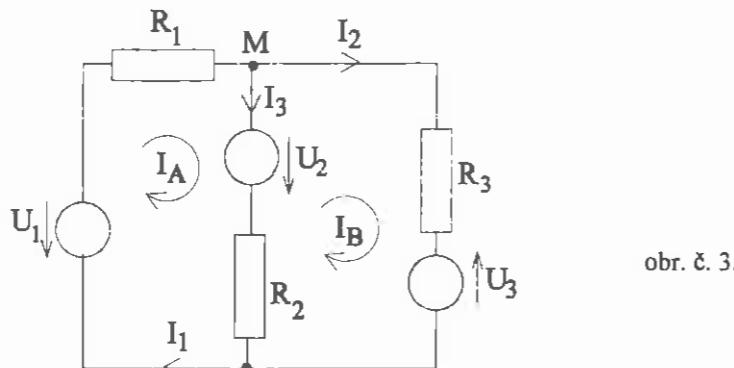
$$I_B \doteq 1,022 \text{ A}.$$

Po dosazení vypočítaného  $I_B$  do (24) a (25) nám vychází  $I_A$  a  $I_C$ :

$$I_A \doteq 5,851 \text{ A}, \quad I_C \doteq 5,015 \text{ A}.$$

**PŘÍKLAD 3.3:**

Vypočtěte proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  v bodě M v zapojení podle obr. č. 3.6, je-li dáno:  $U_1 = 16 \text{ V}$ ,  $U_2 = 4 \text{ V}$ ,  $U_3 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 8 \Omega$ .



obr. č. 3.6

Z přepočítávacích vztahů plyně:  $I_1 = I_A = 0,81 \text{ A}$ ,  
 $I_2 = I_B = 1,23 \text{ A}$ ,  
 $I_3 = I_A - I_B = -0,42 \text{ A}$ .

Pozn.: Jelikož nám vyšel proud  $I_3$  záporný, znamená to, že jeho směr bude opačný, než je znázorněn v obr. č. 3.6.

**Řešení:** Obvod vyřešíme metodou smyčkových proudů, které označíme  $I_A$  a  $I_B$ . Pro smyčky napíšeme soustavu rovnic:

$$R_1 I_A + R_2 (I_A - I_B) - U_1 + U_2 = 0,$$

$$R_2 (I_B - I_A) + R_3 I_B - U_3 - U_2 = 0.$$

Tentokrát soustavu vyřešíme pomocí determinantů. Nejprve ji upravíme do vhodného tvaru:

$$(R_1 + R_2) I_A - R_2 I_B = U_1 - U_2,$$

$$-R_2 I_A + (R_2 + R_3) I_B = U_3 + U_2.$$

Po dosazení hodnot ze zadání:

$$30 I_A - 10 I_B = 12$$

$$-10 I_A + 18 I_B = 14$$

Determinant soustavy:  $D_S = \begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 18 \end{vmatrix} = 440$ .

Determinant pro  $I_A$ :  $D_A = \begin{vmatrix} 12 & -10 \\ 14 & 18 \end{vmatrix} = 356$ .

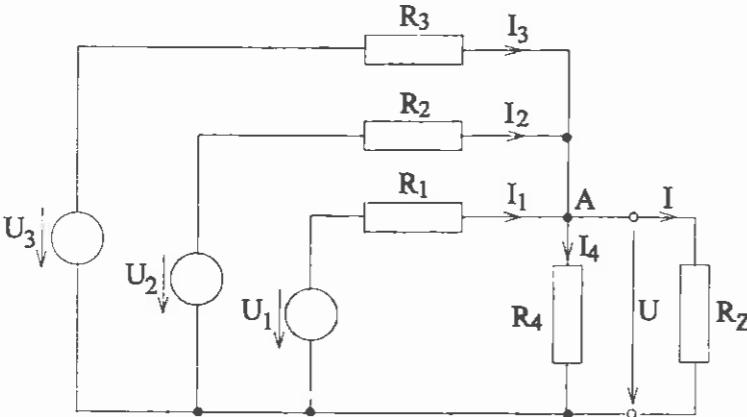
Determinant pro  $I_B$ :  $D_B = \begin{vmatrix} 30 & 12 \\ -10 & 14 \end{vmatrix} = 540$ .

Velikost proudu  $I_A$ :  $I_A = \frac{D_A}{D_S} = \frac{356}{440} A = 0,81 A$ .

Velikost proudu  $I_B$ :  $I_B = \frac{D_B}{D_S} = \frac{540}{440} A = 1,23 A$ .

**PŘÍKLAD 3.4:**

Jak velké bude výstupní napětí  $U$  sčítacího obvodu podle obr. č. 3.7 v nezatíženém stavu ( $U = U_0$  při  $I = 0$ ) a jak se změní výstupní napětí v případě, že obvod zatížíme proudem  $I = 0,5 \text{ A}$ ?  
 $U_1 = 1 \text{ V}$ ,  $U_2 = 1,6 \text{ V}$ ,  $U_3 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ .



obr. č. 3.7

**Řešení:** Pro řešení tohoto obvodu použijeme metodu uzlových napětí, která využívá k popisu obvodu 1. Kirchhoffova zákona. Celý obvod je poté popsán jednou rovnicí. Bod A zvolíme za referenční uzel a platí:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I = 0.$$

Po dosazení prvků obvodu:

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} - \frac{U}{R_4} - I = 0. \quad (26)$$

Pro nezatížený stav, kdy  $I = 0$  a  $U = U_0$  rovnice přejde do tvaru:

$$\frac{U_1 - U_0}{R_1} + \frac{U_2 - U_0}{R_2} + \frac{U_3 - U_0}{R_3} - \frac{U_0}{R_4} = 0.$$

Z této rovnice po úpravě vypočteme již  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}. \quad (27)$$

Po číselném dosazení hodnot ze zadání úlohy do (27) pro výstupní napětí  $U_0$  v nezatíženém stavu vychází:

$$U_0 = 1,5 \text{ V}.$$

Po zatížení proudem  $I$  klesne výstupní napětí na hodnotu  $U$ , kterou vypočítáme přímo z rovnice (26):

$$U = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} - I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}. \quad (28)$$

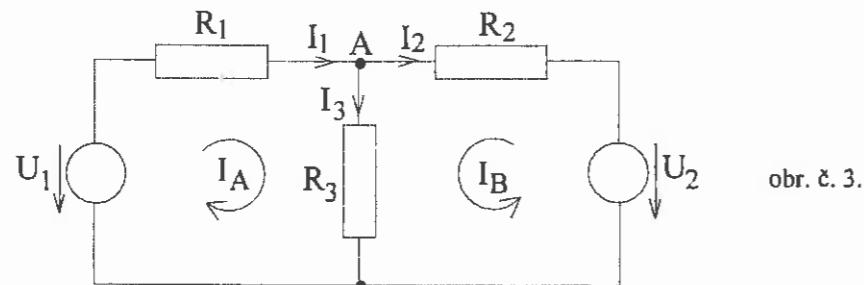
Po číselném dosazení do (28) pro napětí  $U$  v zatíženém stavu vychází:

$$U = 1,27 \text{ V}.$$

**Pozn.:** Z výsledku je patrné značné snížení výstupního napětí při zatížení. Bude proto vhodnější volit menší hodnoty odporů rezistorů ve sčítacím obvodu.

### PŘÍKLAD 3.5:

Na obrázku č. 3.8 je nakreslen obvod se dvěma zdroji napětí  $U_1$  a  $U_2$ . Vypočítejte výstupní napětí  $U_{AB}$  mezi body A a B a proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  tekoucí jednotlivými odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ , je-li  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ . K řešení použijte metodu smyčkových proudů.



obr. č. 3.8

**Řešení:** Označení a směr smyčkových proudů je vyznačeno již v obr. č. 3.8. Pro jednotlivé smyčky nyní můžeme psát rovnice plynoucí z 2. Kirchhoffova zákona.

Při řešení metodou smyčkových proudů nám stačí v tomto případě pouze dvě rovnice, jejímž řešením jsou proudy  $I_A$  a  $I_B$ .

Pro smyčkový proud  $I_A$  platí rovnice:

$$R_1 I_A + R_3 (I_A + I_B) - U_1 = 0.$$

Pro smyčkový proud  $I_B$  platí rovnice:

$$R_2 I_B + R_3 (I_A + I_B) - U_2 = 0.$$

Tato soustava 2 rovnic o dvou neznámých  $I_A$  a  $I_B$  má po úpravě a dosazení tvar:

$$30 I_A + 20 I_B = 10,$$

$$20 I_A + 30 I_B = 20.$$

Upřavenou soustavu vyřešíme pomocí determinantů.

$$\text{Determinant soustavy: } D_s = \begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 30 \end{vmatrix} = 500.$$

$$\text{Determinant pro } I_A: \quad D_A = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \end{vmatrix} = -100.$$

$$\text{Determinant pro } I_B: \quad D_B = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 20 & 20 \end{vmatrix} = 400.$$

Konečně vypočteme již proudy  $I_A$  a  $I_B$ .

$$I_A = \frac{D_A}{D_s} = \frac{-100}{500} A = -0,2 A,$$

$$I_B = \frac{D_B}{D_s} = \frac{400}{500} A = 0,8 A.$$

Přepočítávací vztahy mezi původními a smyčkovými proudy v našem případě jsou (i s dosazením):

$$I_1 = I_A = -0,2 A,$$

$$I_2 = -I_B = -0,8 A,$$

$$I_3 = I_A + I_B = 0,6 A.$$

Jelikož znaménka u proudů  $I_1$  a  $I_2$  jsou záporná, znamená to, že oba dva tečou opačným směrem než je směr uvedený v obrázku. Směr proudu  $I_3$  je v obrázku již vyznačen správně.

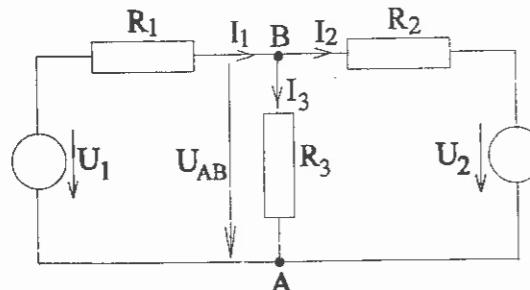
Napětí  $U_{AB}$  mezi body A a B je dáno úbytkem napětí na odporu  $R_3$ , kterým protéká proud  $I_3$ .

Z Ohmova zákona tudíž plyne:

$$U_{AB} = R_3 \cdot I_3 = (20 \cdot 0,6) \text{ V} = 12 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 3.6:

Na obrázku č. 3.9 je nakreslen obvod se dvěma zdroji napětí  $U_1$  a  $U_2$ . Vypočítejte výstupní napětí  $U_{AB}$  mezi body A a B a proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  tekoucí jednotlivými odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ , je-li  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 20\Omega$ . K řešení tentokráté použijte metodu uzlových napětí.



obr. č. 3.9

**Řešení:** V tomto případě nám stačí pouze jedna rovnice (celý obvod má pouze 2 uzly). Referenční uzel je např. uzel označený písmenem A.

Pro uzel B poté platí:  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ .

Po dosazení prvků obvodu:

$$\frac{U_1 - U_{AB}}{R_1} - \frac{U_{AB} - U_2}{R_2} - \frac{U_{AB}}{R_3} = 0.$$

Z této rovnice vypočteme  $U_{AB}$ :

$$U_{AB} = \frac{\frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2 + R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10 + 10}{10 + 10 + 10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} \text{ V} = 12 \text{ V}.$$

Proud  $I_1$  a  $I_2$  vypočteme na základě druhého Kirchhoffova zákona, aplikovaným na jednotlivé smyčky:

Pro první smyčku platí:  $U_1 - U_{AB} - R_1 I_1 = 0$ ,

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{AB}}{R_1} = \frac{10 - 12}{10} \text{ A} = -0,2 \text{ A}.$$

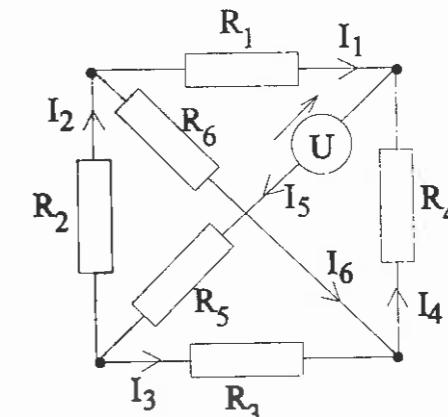
Pro druhou smyčku platí:  $U_2 - U_{AB} + R_2 I_2 = 0$ ,

$$I_2 = \frac{U_2 - U_{AB}}{R_2} = \frac{20 - 12}{10} \text{ A} = -0,8 \text{ A}.$$

Proud  $I_3$  spočteme Ohmovým zákonem:  $I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{20}{12} \text{ A} = 0,6 \text{ A}$ .

### PŘÍKLAD 3.7:

Určete velikosti jednotlivých proudů  $I_1$  až  $I_6$  tekoucích obvodem na obrázku č. 3.10, je-li dán:  $U = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = \dots = R_6 = 10\Omega$ .

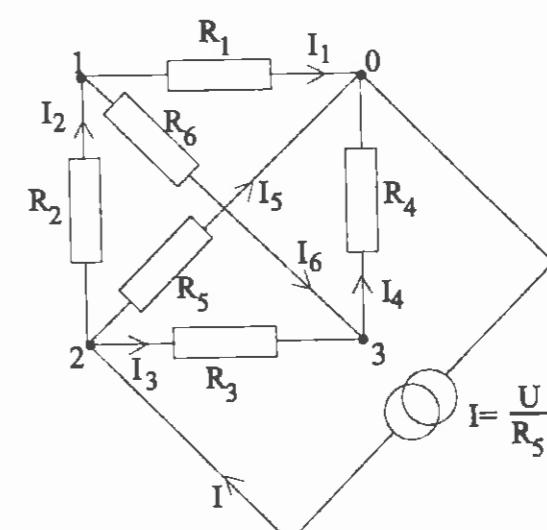


obr. č. 3.10

**Řešení:** Příklad vyřešíme metodou uzlových napětí. Nejprve nahradíme zdroj napětí U zdrojem proudu I. Za pomocí Nortonovy věty:

$$I = \frac{U}{R_5}.$$

Za referenční uzel zvolíme pravý horní uzel 0. Ostatní uzly označíme v pořadí 1, 2 a 3. Nyní můžeme překreslit celé schéma (viz obr. č. 3.11).



obr. č. 3.11

Každý uzel 1,2,3 má vůči uzlu 0 určitý potenciál. Těm odpovídají napětí  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ . Takto jsme stanovili uzlová napětí jednotlivých uzlů vůči zvolenému uzlu referenčnímu. Pro jednotlivé uzly 1,2 a 3 můžeme psát rovnice, vycházející z 1. Kirchhoffova zákona.

Pro uzel 2:

$$I = I_1 + I_3 + I_5,$$

$$\text{což odpovídá: } I = \frac{U}{R_5} = \frac{U_2 - U_1}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_3} + \frac{U_2}{R_5}.$$

Pro uzel 1:

$$0 = I_1 + I_6 - I_2,$$

$$\text{což odpovídá: } 0 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_6} - \frac{U_2 - U_1}{R_2}.$$

Pro uzel 3:

$$0 = I_4 - I_3 - I_6,$$

$$\text{což odpovídá: } 0 = \frac{U_3}{R_4} - \frac{U_2 - U_3}{R_3} - \frac{U_1 - U_3}{R_6}.$$

Máme soustavu 3 rovnic pro neznámá uzlová napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_3$ .

Tuto soustavu nejprve upravíme do následujícího tvaru:

$$0 = U_1 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{U}{R_2} - \frac{U_3}{R_6},$$

$$0 = -\frac{U_1}{R_6} - \frac{U_2}{R_3} + U_3 \cdot \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right),$$

$$\frac{U}{R_5} = -\frac{U_1}{R_2} + U_2 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{U_3}{R_3}.$$

Po dosazení a úpravě tato soustava přejde na tvar:

$$3U_1 - U_2 - U_3 = 0,$$

$$-U_1 - U_2 + 3U_3 = 0,$$

$$-U_1 + 3U_2 - U_3 = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme  $U_3$ :  $U_3 = 3U_1 - U_2$ . (29)

Vyjádřené  $U_3$  dosadíme do druhé a třetí rovnice a po krátké úpravě obdržíme soustavu dvou rovnic pro neznámé  $U_1$  a  $U_2$ . Tu již bravurně vyřešíme.

Vychází:

$$U_1 = 2,5 \text{ V},$$

$$U_2 = 5 \text{ V}.$$

Po dosazení za  $U_1$  a  $U_2$  do (29) vychází  $U_3$ :

$$U_3 = 2,5 \text{ V}.$$

Tím jsme získali jednotlivá uzlová napětí  $U_1$  až  $U_3$ . Hledané proudy  $I_1$  až  $I_6$  získáme z uzlových napětí pomocí přepočítávacích vztahů:

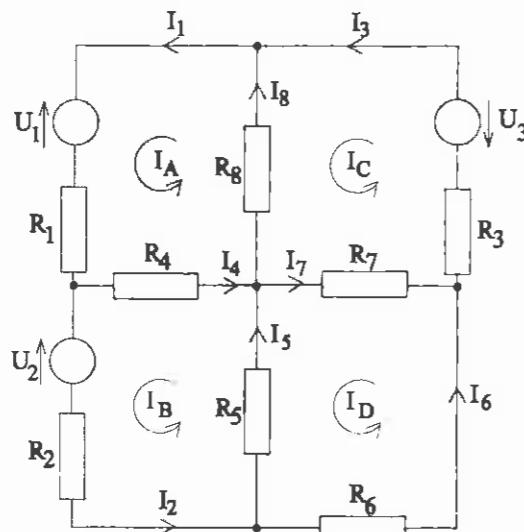
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{R_1}, & I_2 &= \frac{U_2 - U_1}{R_2}, & I_3 &= \frac{U_2 - U_3}{R_3}, \\ I_4 &= \frac{U_3}{R_4}, & I_5 &= \frac{U_2}{R_5}, & I_6 &= \frac{U_1 - U_3}{R_6}. \end{aligned} \quad . \quad (30)$$

Po dosazení do (30) vychází pro jednotlivé proudy  $I_1$  až  $I_6$  a náhradní proud  $I$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = I_4 = 0,25 \text{ A}, \\ I_5 &= 0,5 \text{ A}, & I_6 &= 0 \text{ A}, & I &= 1 \text{ A}. \end{aligned}$$

### PŘÍKLAD 3.8:

Vypočítejte metodou smyčkových proudů proudy  $I_1$  až  $I_8$  tekoucí jednotlivými větvemi obvodu na obr. č. 3.12, kde  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 15 \text{ V}$ ,  $U_3 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = \dots = R_8 = 10 \Omega$ .



obr. č. 3.12

**Řešení:** Obvod řešíme metodou smyčkových proudů. Ty jsou na obrázku č. 3.12 označeny jako  $I_A$  až  $I_D$ . Pro jednotlivé smyčky obvodu lze na základě 2. Kirchhoffova zákona psát rovnice:

$$U_1 = R_1 I_A + R_4 (I_A - I_B) + R_8 (I_A - I_C),$$

$$U_2 = R_2 I_B + R_5 (I_B - I_D) + R_4 (I_B - I_A),$$

$$U_3 = R_3 I_C + R_8 (I_C - I_A) + R_7 (I_C - I_D),$$

$$0 = R_5 (I_D - I_B) + R_6 I_D + R_7 (I_D - I_C).$$

Máme soustavu 4 rovnice o neznámých  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  a  $I_D$ . Tuto dále řešíme.

Do soustavy dosadíme a po krátké úpravě obdržíme soustavu tvaru:

$$10 = 30 I_A - 10 I_B + 10 I_C,$$

$$15 = -10 I_A + 30 I_B - 10 I_D,$$

$$20 = -10 I_A + 30 I_C - 10 I_D,$$

$$0 = -10 I_B - 10 I_C + 30 I_D. \quad (31)$$

Z prvej rovnice z (31) vyjádříme  $I_A$  a dosadíme do zbylých třech rovnic.

Po krátké úpravě:  $-10 I_D = \frac{55}{3} - \frac{80}{3} I_B - \frac{10}{3} I_C,$

$$-6 I_B + 6 I_C = 1,$$

$$0 = -10 I_B - 10 I_C + 30 I_D. \quad (32)$$

Z prvej rovnice ze soustavy (32) vyjádříme  $I_D$  a to dosadíme do třetí rovnice. Získáme tak soustavu 2 rovnic pro neznámé  $I_B$  a  $I_C$ :

$$-6 I_B + 6 I_C = 1,$$

$$70 I_B - 55 = 0. \quad (33)$$

Ze soustavy (33) vypočítáme již  $I_B$  a  $I_C$ :

$$I_B = \frac{55}{70} A \doteq 0,786 A,$$

$$I_C = \frac{1+6I_B}{6} = \frac{400}{420} A \doteq 0,9524 A.$$

Dosazením  $I_A$  a  $I_B$  do vyjádřených  $I_A$  a  $I_D$  z prvních rovnic soustav (31) a (32) dostáváme pro smyčkové proudy  $I_A$  a  $I_D$ :

$$I_A = \frac{U_1 + R_4 I_B - R_8 I_C}{R_1 + R_4 + R_8} \doteq 0,2778 A,$$

$$I_D = -\frac{55}{30} + \frac{80}{30} I_B + \frac{10}{30} I_C \doteq 0,5794 A.$$

Na základě přepočítávacích vztahů mezi původními a smyčkovými proudy dostáváme pro  $I_1$  až  $I_8$ :

$$I_1 = I_A \doteq 0,2778 A,$$

$$I_2 = I_B \doteq 0,786 A,$$

$$I_3 = I_C \doteq 0,9524 A,$$

$$I_4 = I_A - I_B \doteq -0,5082 A,$$

$$I_5 = I_B - I_D \doteq 0,2066 A,$$

$$I_6 = I_D \doteq 0,5794 A,$$

$$I_7 = I_C - I_D \doteq 0,373 A,$$

$$I_8 = I_A - I_C \doteq -0,6746 A.$$

## 4. Věta o superpozici

Mezi pomocné věty, které nám usnadňují řešit elektrické obvody, jako je Theveninova nebo Nortonova věta, patří i věta o superpozici, jinak řečeno princip lineární superpozice.

Princip superpozice umožnuje v lineárním obvodu, který obsahuje několik zdrojů napětí a proudů, určit proud tekoucí jeho libovolnou větví a nebo napětí mezi dvěma libovolnými body obvodu.

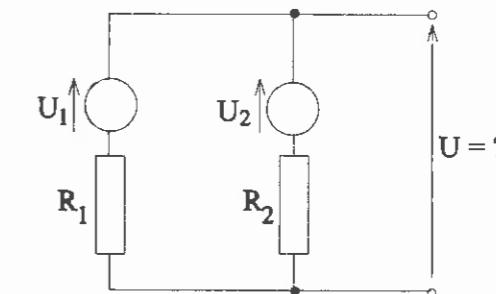
Výstupní (výsledné) napětí nebo proud v libovolném místě obvodu složeného z lineárních obvodových prvků je dáno součtem napětí, popř. proudů způsobenými samostatně jednotlivými zdroji, jsou-li ostatní zdroje napětí nahrazeny zkratem a zdroje proudu odpojeny [12].

U stejnosměrných veličin se jedná o součet algebraický, kdežto u střídavých veličin o součet vektorový.

Ještě je třeba podotknout, že tento princip nemůžeme použít v nelineárních obvodech [2].

### PŘÍKLAD 4.1:

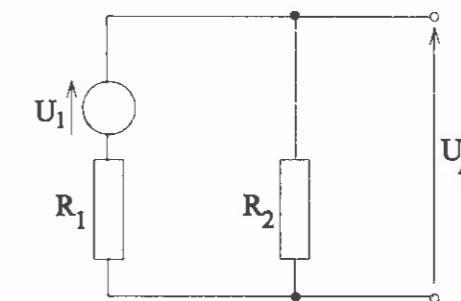
Principem superpozice určete výsledné napětí  $U$  na výstupních svorkách obvodu na obr. č. 4.1, kde  $U_1 = 150 \text{ V}$ ,  $U_2 = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ .



obr. č. 4.1

**Řešení:** Budeme postupovat podle principu superpozice. Výsledné napětí bude dáno součtem příspěvků napětí  $U_A$  a  $U_B$  od jednotlivých zdrojů  $U_1$  a  $U_2$  zvlášť.

Nejprve budeme počítat příspěvek  $U_A$  od zdroje  $U_1$ : v obvodu necháme  $U_1$ ,  $R_1$  a  $R_2$  a vyřadíme  $U_2$ . Vznikne tak obvod na obr. č. 4.2.

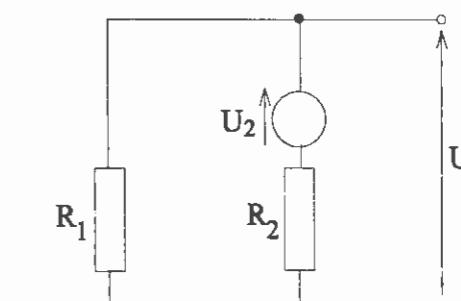


obr. č. 4.2

Jedná se vlastně o dělič napětí. Pro napětí  $U_A$  tak platí:

$$U_A = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \text{ V}.$$

V dalším spočítáme příspěvek  $U_B$  od zdroje  $U_2$ : v obvodu necháme pouze  $U_2$ ,  $R_1$  a  $R_2$  a vyřadíme  $U_1$ . Vznikne tak obvod na obr. č. 4.3.



obr. č. 4.3

Opět se jedná o napěťový dělič, kde výstupní napětí  $U_B$  tentokráté odebíráme na odporu  $R_1$ . Pro  $U_B$  tedy platí vztah

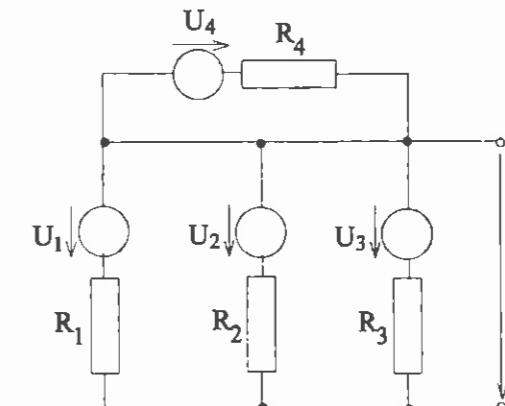
$$U_B = U_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \doteq 33,3 \text{ V}.$$

Jednotlivá dílčí napětí  $U_A$  a  $U_B$  mají na výstupních svorkách původního obvodu (obr. č. 4.1) stejný směr, celkové výstupní napětí bude tedy dáno (podle principu superpozice) jejich prostým součtem.

$$U = U_A + U_B \doteq 100,0 \text{ V} + 33,3 \text{ V} = 133,3 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 4.2:

Principem superpozice vypočtěte napětí  $U$  na výstupních svorkách obvodu z obr. č. 4.4, kde  $U_1 = U_3 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$ ,  $U_4 = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ .



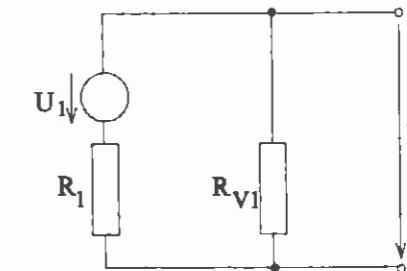
obr. č. 4.4

**Řešení:** Budeme postupovat podle principu superpozice. Výsledné napětí  $U$  bude dáno součtem příspěvkových napětí  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  a  $U_D$  od jednotlivých zdrojů  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  a  $U_4$  zvlášť.

Nejprve necháme v obvodu pouze zdroj  $U_1$ , ostatní zdroje vyřadíme. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.5, kde  $R_{V1}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $R_2$  a  $R_3$ .

Pro velikost odporu  $R_{V1}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{V1} = 12 \Omega.$$



obr. č. 4.5

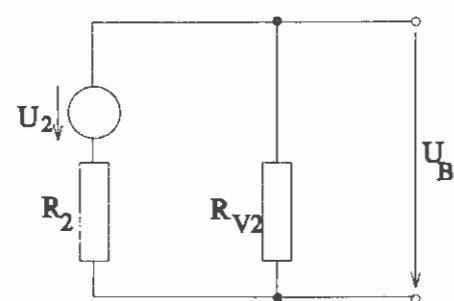
Jedná se vlastně o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_A$  měříme na rezistoru  $R_{V1}$ . Pro  $U_A$  tudíž platí vztah:

$$U_A = U_1 \cdot \frac{R_{V1}}{R_1 + R_{V1}} \doteq 5,45 \text{ V}.$$

Dále necháme v obvodu pouze zdroj  $U_2$ , ostatní zdroje nahradíme zkratem. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.6, kde  $R_{V2}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $R_1$  a  $R_3$ .

Pro velikost odporu  $R_{V2}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{V2} = 7,5\Omega.$$



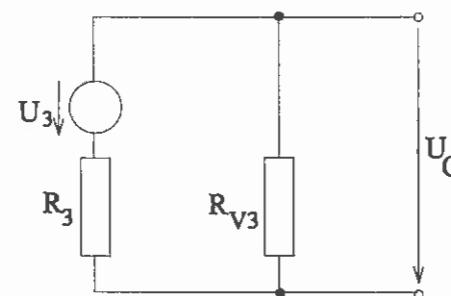
obr. č. 4.6

Jedná se o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_B$  odebíráme na rezistoru  $R_{V2}$ . Pro  $U_B$  tudíž platí vztah  $U_B = U_2 \cdot \frac{R_{V2}}{R_2 + R_{V2}} \doteq 5,45 V$ .

Dále necháme v obvodu pouze zdroj  $U_3$ , ostatní zdroje nahradíme zkratem. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.7, kde  $R_{V3}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ .

Pro velikost odporu  $R_{V3}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{V3} \doteq 6,67\Omega.$$



obr. č. 4.7

Jedná se o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_C$  odebíráme na rezistoru  $R_{V3}$ . Pro  $U_C$  tudíž platí vztah

$$U_C = U_3 \cdot \frac{R_{V3}}{R_3 + R_{V3}} \doteq 1,82 V.$$

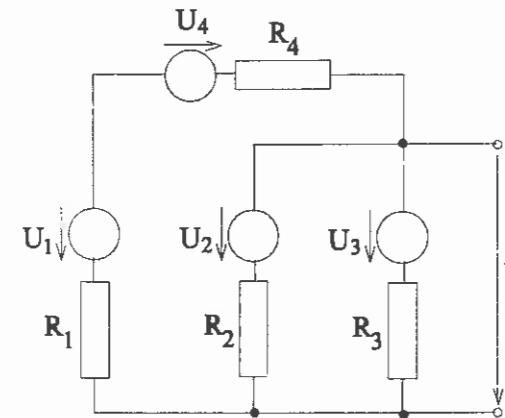
Nakonec určíme ještě příspěvek od napětí  $U_4$ . V obvodu necháme pouze  $U_4$ , ostatní zdroje napětí vyřadíme. Obvod bude nyní představován pouze smyčkou s napětím  $U_4$  a odporem  $R_4$  s ním sériově spojeným. Proud nám vlastně poteče do zkratu přes odpor  $R_4$ . Tudíž příspěvek od zdroje  $U_4$  bude 0 V.

Všechna příspěvková napětí  $U_A$ ,  $U_B$  a  $U_C$  mají stejný směr, výsledné napětí je dáno tudíž jejich klasickým součtem.

$$U = U_A + U_B + U_C \doteq (5,45 + 5,45 + 1,82) V = 12,72 V.$$

### PŘÍKLAD 4.3:

Pomocí principu superpozice vypočtěte výsledné napětí  $U$  na výstupních svorkách obvodu na obr. č. 4.8, kde  $U_1 = U_3 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$ ,  $U_4 = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ .



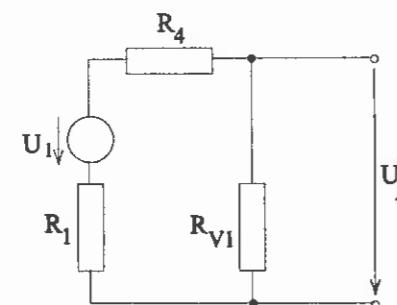
obr. č. 4.8

**Řešení:** Postupujeme přesně podle principu superpozice. Vypočítáme příspěvky jednotlivých zdrojů napětí zvlášť a ty pak sečteme.

Nejprve necháme v obvodu pouze zdroj  $U_1$ , ostatní zdroje vyřadíme. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.9, kde  $R_{V1}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $R_2$  a  $R_3$ .

Pro velikost odporu  $R_{V1}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{V1} = 12 \Omega.$$



obr. č. 4.9

Jde vlastně o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_A$  odebíráme na rezistoru  $R_{V1}$ . Pro  $U_A$  tedy platí vztah

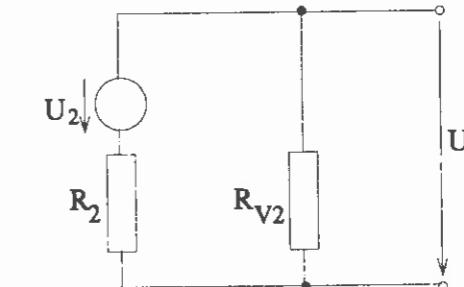
$$U_A = U_1 \cdot \frac{R_{V1}}{R_1 + R_4 + R_{V1}} = 1,94 \text{ V}.$$

Stejným postupem pokračujeme dál. Necháme v obvodu pouze zdroj  $U_2$ , ostatní zdroje vyřadíme.

Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.10, kde  $R_{V2}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $(R_1 + R_4)$  a  $R_3$ .

Pro velikost odporu  $R_{V2}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V2}} = \frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{V2} = 18,75 \Omega.$$



obr. č. 4.10

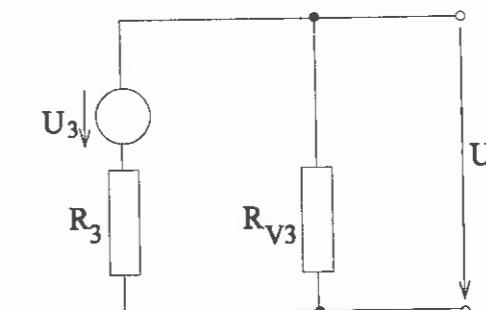
Jedná se o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_B$  odebíráme na rezistoru  $R_{V2}$ . Pro  $U_B$  tedy platí vztah

$$U_B = U_2 \cdot \frac{R_{V2}}{R_2 + R_{V2}} = 9,68 \text{ V}.$$

Dále necháme v obvodu pouze zdroj  $U_3$ , ostatní zdroje vyřadíme. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.11, kde  $R_{V3}$  je odpor paralelní kombinace rezistorů  $(R_1 + R_4)$  a  $R_2$ .

Pro velikost odporu  $R_{V3}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V3}} = \frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{V3} = 14,29 \Omega.$$



obr. č. 4.11

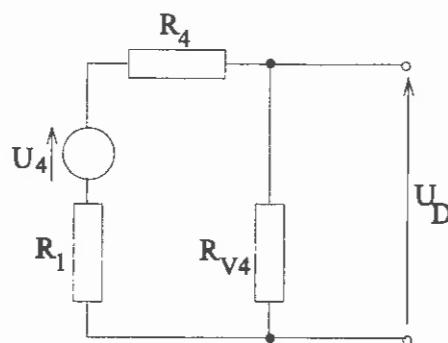
Jedná se o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_C$  odebíráme na rezistoru  $R_{V3}$ . Pro  $U_C$  tedy platí vztah

$$U_C = U_3 \cdot \frac{R_{V3}}{R_3 + R_{V3}} = 3,23 \text{ V}.$$

Nakonec určíme ještě příspěvek od zdroje napětí  $U_4$ . V obvodu necháme pouze  $U_4$ , ostatní zdroje napětí vyřadíme. Obvod nyní vypadá jako na obr. č. 4.12, kde  $R_{V4}$  je odpor paralelní kombinace odporů  $R_2$  a  $R_3$ .

Pro velikost odporu  $R_{V4}$  tedy platí:

$$\frac{1}{R_{V4}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{V4} = 12 \Omega.$$



obr. č. 4.12

Jedná se o dělič napětí, kdy výstupní napětí  $U_D$  měříme na rezistoru  $R_{V4}$ . Pro  $U_D$  tudíž platí vztah

$$U_D = U_4 \cdot \frac{R_{V4}}{R_1 + R_4 + R_{V4}} = 2,9 \text{ V}.$$

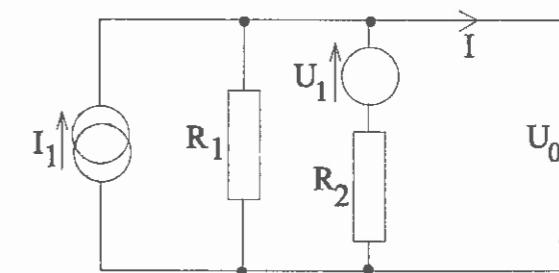
Napětí  $U_A$ ,  $U_B$  a  $U_C$  mají stejný směr,  $U_D$  má směr opačný.

Výsledné napětí je tudíž rovno

$$U = U_A + U_B + U_C - U_D = (1,94 + 9,68 + 3,23 - 2,90) \text{ V} = 11,95 \text{ V}.$$

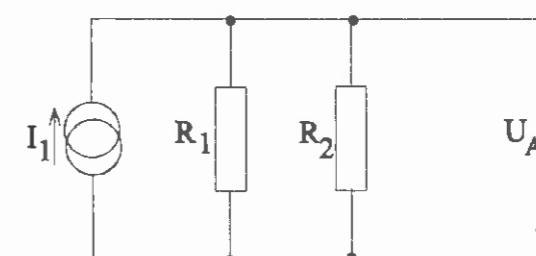
#### PŘÍKLAD 4.4:

Principem superpozice určete svorkové napětí  $U_0$  naprázdno obvodu z obr. č. 4.13, kde  $I_1 = 4 \text{ mA}$ ,  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ .



obr. č. 4.13

**Řešení:** Postupně vypočítáme napěťové příspěvky od obou zdrojů. Příspěvek  $U_A$  ideálního proudového zdroje  $I_1$  vypočítáme z upraveného obvodu, nakresleného na obr. č. 4.14 (napěťový zdroj  $U_1$  je nahrazený zkratem).

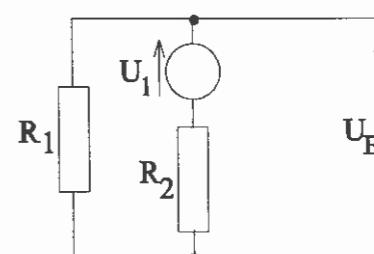


obr. č. 4.14

Napětí  $U_A$  je rovno úbytku napětí na odporu, jehož velikost je dána paralelní kombinací odporů rezistorů  $R_1$  a  $R_2$  a jímž protéká proud  $I_1$ . Spočteme je jednoduše z Ohmova zákona:

$$U_A = I_1 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \left( 4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5 \cdot 20}{5+20} \cdot 10^3 \right) \text{ V} = 16 \text{ V}.$$

Příspěvek  $U_B$  ideálního zdroje napětí  $U_1$  vypočítáme z upraveného obvodu podle obrázku č. 4.15.



obr. č. 4.15

Jelikož se vlastně jedná o dělič napětí, s napětím  $U_B$  na rezistoru  $R_1$ , platí pro  $U_B$  následující vztah:

$$U_B = U_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \left( 10 \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{(5+20) \cdot 10^3} \right) V = 2 V.$$

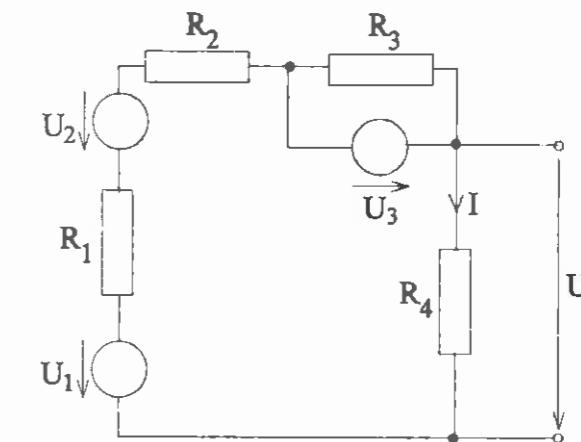
Jelikož příspěvek napětí  $U_A$  má stejný směr jako výsledné napětí  $U$  a  $U_B$  má směr opačný, výsledné svorkové napětí naprázdno  $U_0$  je podle principu superpozice určeno:

$$U_0 = U_A - U_B = (16 - 2)V = 14 V.$$

Pozn.: Ke stejnemu výsledku pro  $U_0$  bychom dospěli, pokud bychom považovali napětí  $U_B$  za záporné (má opačný směr než  $U_0$ ).  $U_0$  bychom pak dostali pouhým klasickým součtem  $U_A$  a  $U_B$  [2]. Oba přístupy jsou možné.

### PŘÍKLAD 4.5:

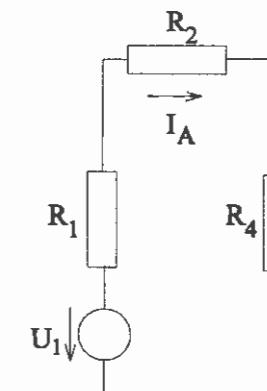
Tři zdroje napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_3$  jsou připojeny na obvod složený z rezistorů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  a  $R_4$  podle obr. č. 4.16. Vypočtěte metodou superpozice velikost napětí  $U_4$  na rezistoru  $R_4$ , je-li dáno:  $U_1 = 9 V$ ,  $U_2 = 6 V$ ,  $U_3 = 3 V$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 600 \Omega$ ,  $R_4 = 400 \Omega$ .



obr. č. 4.16

Řešení: Při řešení postupujeme tak, jako by byl v obvodu vždy pouze jeden zdroj (ostatní zdroje napětí jsou zkratovány) a proudy vyvolané jednotlivými zdroji se sčítají. Tedy proud  $I$  odporem  $R_4$  je dán součtem proudů  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$  vyvolanými napětími  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_3$ .

Nejprve určíme proud  $I_A$  vyvolaný zdrojem napětí  $U_1$ . Upravený obvod je nakreslen na obr. č. 4.17.

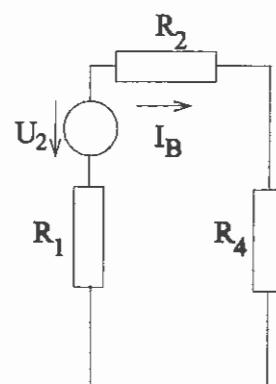


obr. č. 4.17

Pro proud  $I_A$  tudíž z Ohmova zákona vyplývá:

$$I_A = \frac{U_1}{R_1 + R_2 + R_4} = \left( \frac{9}{200 + 100 + 400} \right) A = 0,0128 A.$$

Dále určíme proud  $I_B$  vyvolaný zdrojem napětí  $U_2$ . Upravený obvod je na obr. č. 4.18.

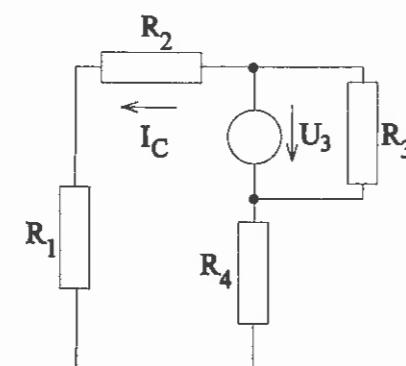


obr. č. 4.18

Pro proud  $I_B$  tudíž z Ohmova zákona vyplývá:

$$I_B = \frac{U_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \left( \frac{6}{200+100+400} \right) A = 0,0086 A.$$

Nakonec určíme ještě proud  $I_C$  vyvolaný zdrojem  $U_3$ . Upravený obvod je nakreslen na obr. č. 4.19.



obr. č. 4.19

Pro proud  $I_C$  tudíž z Ohmova zákona vyplývá:

$$I_C = \frac{U_3}{R_1 + R_2 + R_4} = \left( \frac{3}{200+100+400} \right) A = 0,0043 A.$$

Celkový proud  $I$  tekoucí rezistorem  $R_4$  je dán podle principu superpozice součtem jednotlivých příspěvkových proudů. Proud  $I_C$  má směr opačný než  $I_A$  a  $I_B$ . Budeme ho tudíž odečítat:

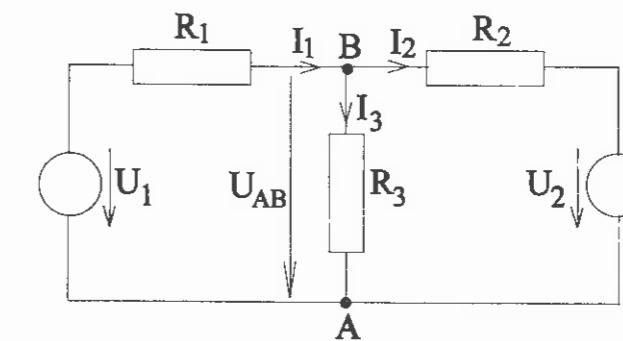
$$I = I_A + I_B - I_C = (0,0128 + 0,0086 - 0,0043) A = 0,0171 A.$$

Napětí  $U_4$  na rezistoru  $R_4$  vypočteme dle Ohmova zákona:

$$U_4 = R_4 \cdot I = 400 \Omega \cdot 0,0171 A = 6,84 V.$$

#### PŘÍKLAD 4.6:

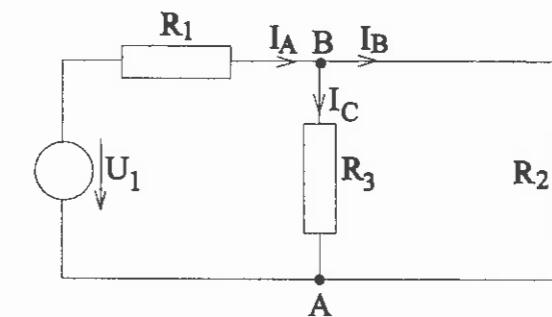
Na obr. č. 4.20 je nakreslen obvod se dvěma zdroji napětí  $U_1$  a  $U_2$ . Vypočítejte výstupní napětí  $U_{AB}$  mezi body A a B a proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  tekoucí jednotlivými odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ , je-li  $U_1 = 10 V$ ,  $U_2 = 20 V$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ . K řešení použijte metodu superpozice.



obr. č. 4.20

**Řešení:** Při řešení postupujeme tak, jako by v obvodu byl pouze vždy jeden zdroj (ostatní zdroje napětí jsou nahrazeny zkratem) a proudy vyvolané jednotlivými zdroji se sčítají.

Nejprve budeme uvažovat zdroj  $U_1$ . Schéma z obr. č. 4.20 se zjednoduší na schéma nakreslené na obr. č. 4.21.



obr. č. 4.21

Abychom určili  $I_A$ , vypočteme celkový odpor  $R_C$  zapojený na zdroj  $U_1$ :

$$R_C = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \left( 10 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} \right) \Omega = 16,6 \Omega.$$

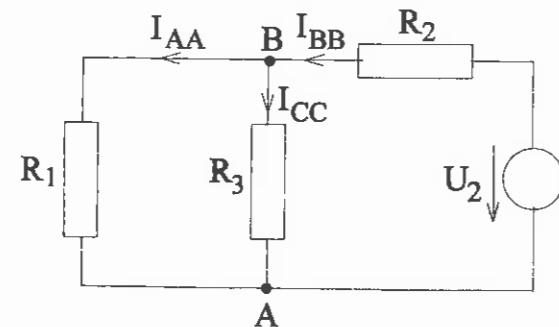
$$\text{Pro proud } I_A \text{ pak platí: } I_A = \frac{U_1}{R_C} = \left( \frac{10}{16,6} \right) A = 0,6 A.$$

Proud  $I_B$  a  $I_C$  se rozdělí v nepřímém poměru odporů rezistorů  $R_2$  a  $R_3$ :

$$\frac{I_C}{I_B} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{10}{20} \quad \text{a platí } I_A = I_B + I_C = 0,6 A.$$

Z těchto dvou rovnic vypočteme  $I_C = 0,2 \text{ A}$  a  $I_B = 0,4 \text{ A}$ .

Nyní budeme uvažovat zdroj  $U_2$  (viz obr. č. 4.22).



obr. č. 4.22

Abychom určili proud  $I_{BB}$ , vypočteme celkový odpor  $R_{CC}$  připojený na zdroj  $U_2$ :

$$R_{CC} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \left( 10 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} \right) \Omega = 16,6 \Omega.$$

Pro proud  $I_{BB}$  pak platí:  $I_{BB} = \frac{U_2}{R_{CC}} = \left( \frac{20}{16,6} \right) A = 1,2 A$ .

Proudys  $I_{AA}$  a  $I_{CC}$  se rozdělí v nepřímém poměru odporů rezistorů  $R_1$  a  $R_3$ :

$$\frac{I_{CC}}{I_{AA}} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{10}{20} \quad \text{a platí} \quad I_{BB} = I_{AA} + I_{CC} = 1,2 A.$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme  $I_{AA} = 0,8 A$  a  $I_{CC} = 0,4 A$ .

Nyní již můžeme na základě principu superpozice dopočít proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$ .

Proud  $I_1$ :  $I_1 = I_A - I_{AA} = (0,6 - 0,8) A = -0,2 A$ .

Proud  $I_2$ :  $I_2 = I_B - I_{BB} = (0,4 - 1,2) A = -0,8 A$ .

Proud tekoucí odporem  $R_3$  je

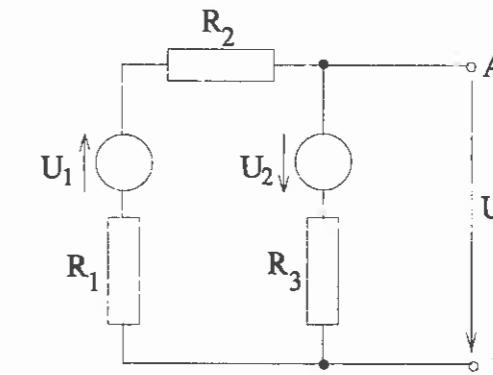
$$I_3 = I_C + I_{CC} = (0,2 + 0,4) A = 0,6 A,$$

a napětí  $U_{AB}$  na odporu  $R_3$  je

$$U_{AB} = R_3 \cdot I_3 = 20 \Omega \cdot 0,6 A = 12 V.$$

### PŘÍKLAD 4.7:

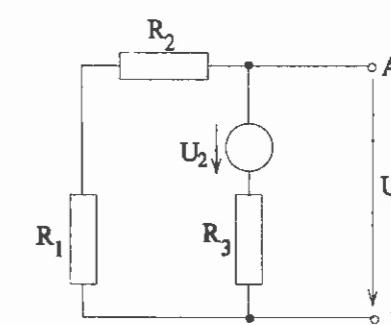
Je dán obvod podle obr. č. 4.23. Určete napětí  $U_0$  mezi body A a B, je-li  $R_1 = 1,6 M\Omega$ ,  $R_2 = 1,2 M\Omega$ ,  $R_3 = 100 k\Omega$ ,  $U_1 = -450 V$ ,  $U_2 = 250 V$ . Uvedený obvod nahraťte z hlediska výstupních svorek jedním zdrojem napětí se sériově připojeným rezistorem.



obr. č. 4.23

**Řešení:** Podle principu superpozice je napětí  $U_0$  dáno součtem napětí, způsobených jednotlivými zdroji, přičemž ostatní jsou nahrazeny zkratem.

Při zkratovaném zdroji  $U_1$  obvod (viz obr. č. 4.24) představuje dělič napětí  $U_2$ , přičemž výstupní napětí  $U_A$  měříme na sériové kombinaci rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ .

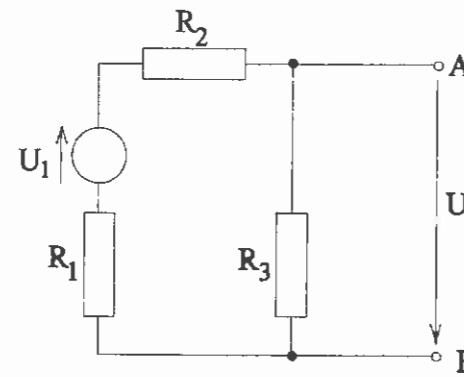


obr. č. 4.24

Pro napětí  $U_A$  tudíž platí:

$$U_A = U_2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \left( 250 \cdot \frac{2,8}{2,9} \right) V = 241,5 V.$$

Při zkratovaném zdroji  $U_2$  obvod představuje dělič napětí  $U_1$  (obr. č. 4.25), přičemž výstupní napětí  $U_B$  měříme na rezistoru  $R_3$ .



obr. č. 4.25

Pro napětí  $U_B$  tudíž platí:

$$U_B = U_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \left( 450 \cdot \frac{0,1}{2,9} \right) V = 15,5 V.$$

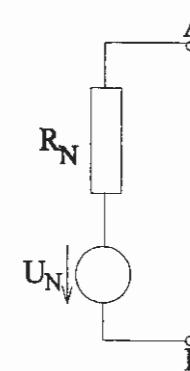
Jelikož obě dvě napětí  $U_A$  i  $U_B$  mají opačný směr, výsledné napětí  $U_0$  je dán klasickým rozdílem dílčích napětí  $U_A$  a  $U_B$ .

Pro  $U_0$  tedy platí:

$$U_0 = U_A - U_B = (241,5 - 15,5) V = 226 V..$$

V dalším provedeme nahrazení obvodu z obr. č. 4.23 obvodem dle obr. č. 4.26.

Napětí  $U_0$  nezatíženého obvodu na obr. č. 4.23 se musí rovnat napětí naprázdno obvodu podle obrázku č. 4.26, tedy  $U_N = U_0 = 226 V$ .



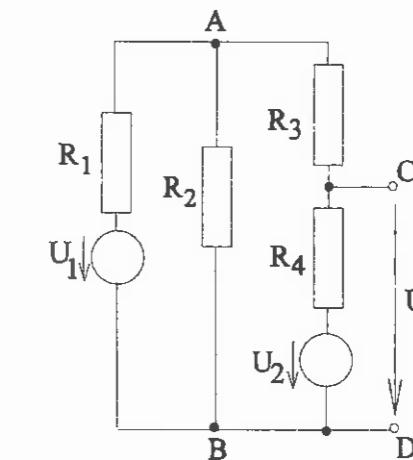
obr. č. 4.26

Rezistor  $R_N$  představuje nahrazení sérioparalelní kombinace rezistorů  $(R_1 + R_2)$  a  $R_3$ . Pro odporník rezistoru  $R_N$  můžeme tak psát:

$$R_N = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(1,6 + 1,2) \cdot 0,1}{1,6 + 1,2 + 0,1} M\Omega = \frac{0,28}{2,9} M\Omega = 0,0965 M\Omega = 96,5 k\Omega.$$

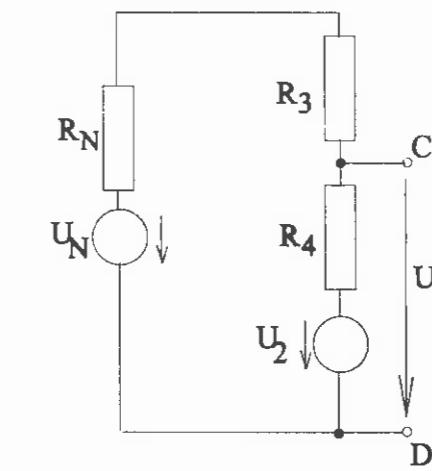
#### PŘÍKLAD 4.8:

Vyjádřete napětí  $U_0$  na výstupních svorkách C,D obvodu z obr. č. 4.27.



obr. č. 4.27

Řešení: Obvod nalevo od svorek A a B včetně rezistoru  $R_2$  nejprve nahradíme podle Theveninovy věty jedním zdrojem  $U_N$  a rezistorem  $R_N$  (viz obr. č. 4.28) a napětí  $U_0$  určíme pomocí principu superpozice.



obr. č. 4.28

Odpor rezistoru  $R_N$  je v našem případě určen paralelní kombinací rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ . Z Theveninovy věty tak vyplývá:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} ; \quad U_N = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Napětí  $U_0$  určíme principem superpozice jako součet napětí  $U_A$  a  $U_B$ , způsobených jednotlivými zdroji napětí  $U_2$  a  $U_N$  zvlášť.

Při zkratovaném  $U_N$  obvod představuje dělič napětí  $U_2$ , přičemž výstupní napětí  $U_A$  měříme na sériové kombinaci rezistorů  $R_N$  a  $R_3$ .

Pro napětí  $U_A$  tudíž platí:

$$U_A = U_2 \cdot \frac{R_N + R_3}{R_N + R_3 + R_4}.$$

Při zkratovaném  $U_1$  obvod představuje dělič napětí  $U_N$ , přičemž výstupní napětí  $U_B$  měříme na rezistoru  $R_4$ .

Pro napětí  $U_B$  tudíž platí:

$$U_B = U_N \cdot \frac{R_4}{R_N + R_3 + R_4}.$$

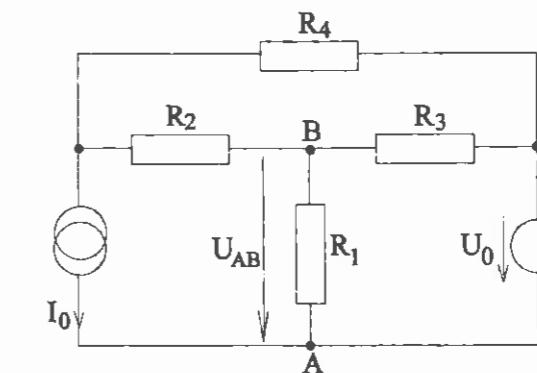
Jelikož obě dvě napětí  $U_A$  i  $U_B$  mají stejný směr, výsledné napětí  $U_0$  je dáno klasickým součtem dílčích napětí  $U_A$  a  $U_B$ .

$U_0$  jsme tedy vyjádřili jako:

$$U_0 = U_A + U_B = U_2 \cdot \frac{R_N + R_3}{R_N + R_3 + R_4} + U_N \cdot \frac{R_4}{R_N + R_3 + R_4}.$$

### PŘÍKLAD 4.9:

Je dán obvod podle obr. č. 4.29, kde  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$ ,  $U_0 = 15 \text{ V}$  a  $I_0 = 3 \text{ A}$ . Určete napětí  $U_{AB}$  naprázdno mezi výstupními svorkami A,B.



obr. č. 4.29

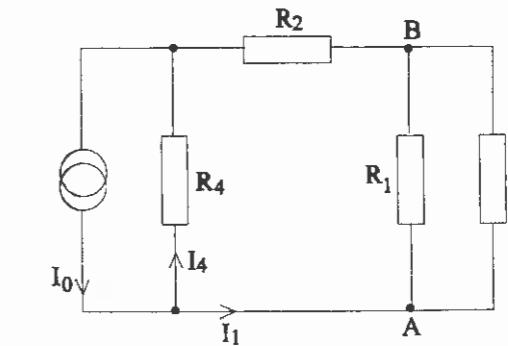
**Řešení:** Napětí naprázdno mezi svorkami A a B určíme jako součet napětí vlivem jednotlivých zdrojů při vyřazeném zdroji druhém.

Napětí  $U_A$  vzniklé rezistoru  $R_1$  působením zdroje  $I_0$  (zdroj  $U_0$  je zkratován) určíme (viz obr. č. 4.30) následovně:

Platí:  $I_4 R_4 = I_1 \cdot \left( \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + R_2 \right).$

Z čehož:  $\frac{I_1}{I_4} = \frac{R_4}{\left( \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + R_2 \right)} = C = 0,48.$

Protože zároveň:  $I_1 + I_4 = I_0$ , je  $I_1 = I_0 \cdot \frac{C}{C+1} = 0,97 \text{ A}.$

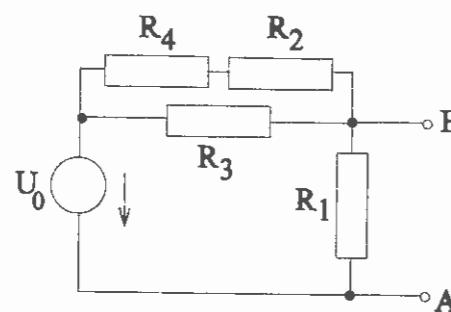


obr. č. 4.30

Napětí  $U_A$  je poté určeno napětím na paralelní kombinaci rezistorů  $R_1$  a  $R_3$ :

$$U_A = -I_1 \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = (-0,97 \cdot 3,33) V = -3,24 V.$$

Dále určíme napětí  $U_B$  vzniklé na rezistoru  $R_1$  působením zdroje  $U_0$  (zdroj proudu  $I_0$  je vyřazen). Obvod tak přejde do tvaru obr. č. 4.31.



obr. č. 4.31

Obvod na obr. č. 4.31 představuje napěťový dělič. Pro napětí  $U_B$  vyplývá:

$$U_B = U_0 \cdot \frac{\frac{R_1}{(R_2 + R_4) \cdot R_3 + R_1}}{R_2 + R_3 + R_4} = 0,95 V.$$

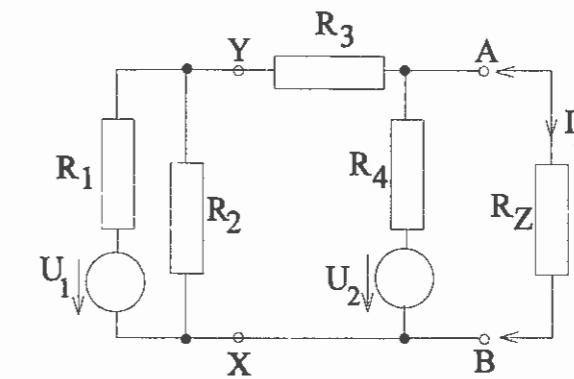
Napětí naprázdno mezi svorkami A a B je tedy dle principu superpozice:

$$U_{AB} = U_A + U_B = (-3,24 + 0,95) V = -2,29 V.$$

Pozn.: Napětí mezi svorkami A a B má velikost 2,29 V a směr opačný, než je tomu v obr. č. 4.29.

### PŘÍKLAD 4.10:

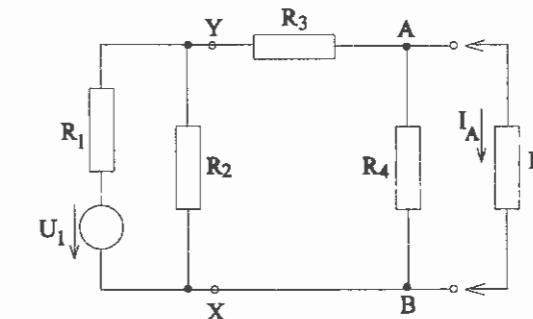
Určete proud  $I_Z$  zatěžovacím rezistorem  $R_Z$  v obvodu na obr. č. 4.32, je-li dáno:  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R_Z = 2 \Omega$ ,  $U_1 = 8 V$ ,  $U_2 = 4 V$ . Řešte pomocí principu superpozice.



obr. č. 4.32

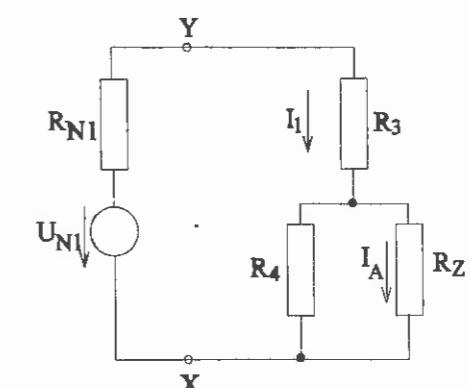
Řešení: Proud  $I_Z$  určíme jako součet proudů  $I_A$  a  $I_B$ , tekoucích rezistorem  $R_Z$ , je-li vždy jeden ze zdrojů vyřazen (= zkratován v případě napěťového zdroje).

Obvod podle obr. č. 4.32 bude mít při zkratovaném zdroji  $U_2$  tvar podle obr. č. 4.33.



obr. č. 4.33

Pro určení  $I_A$  zjednodušíme nejprve obvod z obr. č. 4.33 použitím Theveninovy věty na obvod nalevo od svorek X a Y. Dostaneme obvod podle obrázku č. 4.34.



obr. č. 4.34

Hodnoty odporu  $R_{N1}$  a napětí  $U_{N1}$  (i polaritou) určíme z podmínek, že napětí mezi svorkami X a Y původního i náhradního obvodu naprázdno (při odpojené části obvodu napravo od svorek X,Y) je stejně, že odpor původního i náhradního obvodu mezi svorkami X,Y je stejný, nebo že při zkratovaných svorkách X,Y teče zkratem v obou případech stejný proud. Napětí naprázdno mezi svorkami X,Y je tedy:

$$U_{N1} = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{16}{3} V.$$

Odpor mezi svorkami X,Y musí být rovněž v obou případech stejný, čili

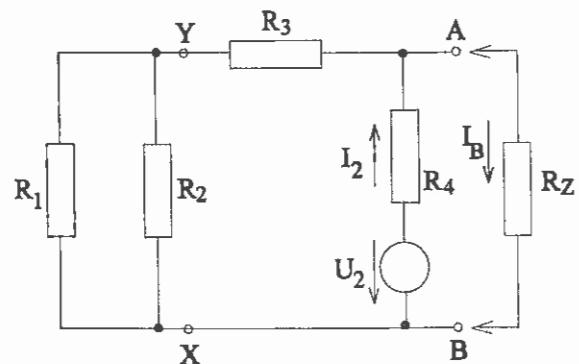
$$R_{N1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3} \Omega.$$

Z obr. č. 4.34 dále plyne:

$$I_1 = \frac{U_{N1}}{R_{N1} + R_3 + \frac{R_4 \cdot R_Z}{R_4 + R_Z}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{4}{3} + 2 + \frac{2.2}{2+2}} A = \frac{16}{3} A,$$

$$I_A = I_1 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_Z} = \left( \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{2+2} \right) A = \frac{8}{13} A.$$

Při zkratovaném zdroji napětí  $U_1$  bude mít obvod tvar jako na obr. č.4.35.



obr. č. 4.35

Pro proud  $I_2$  podle obr. č. 4.35 platí:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_4 + \frac{R \cdot R_Z}{R + R_Z}}, \quad \text{kde } R = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$\text{Po dosazení do vztahu pro } R: R = \left( 2 + \frac{2 \cdot 4}{2+4} \right) \Omega = \frac{10}{3} \Omega.$$

Pro proud  $I_B$  pak plyne:  $I_B = I_2 \cdot \frac{R}{R + R_Z}$ .

Po dosazení do odvozeného vztahu pro  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{4}{2 + \left( \frac{\frac{10}{3} \cdot 2}{\frac{10}{3} + 2} \right)} A = \frac{16}{3} A.$$

A po dosazení do vztahu pro  $I_B$ :

$$I_B = \left( \frac{16}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3} + 2} \right) A = \frac{10}{13} A..$$

Proud  $I_A$  a  $I_B$  protékají zatěžovacím rezistorem  $R_Z$  stejným směrem, proto proud  $I_Z$  je dán součtem proudů  $I_A$  a  $I_B$ :

$$I_Z = I_A + I_B = \left( \frac{8}{13} + \frac{10}{13} \right) A = \frac{18}{13} A \doteq 1,384 A.$$

## 5. Obvody se střídavými průběhy U a I

Každý střídavý signál lze zapsat předpisem (zde pro U):

$$U(t) = U(t+T), \text{ kde } T \text{ je perioda.}$$

V případě, že průběh je harmonický, má předpis tvar:

$$U(t) = U_M \cdot \sin(\omega t + \phi_0).$$

$U(t)$  je okamžitá hodnota U,  $U_M$  je amplituda (maximální hodnota U),  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ , t je čas,  $\phi_0$  je počáteční fáze.

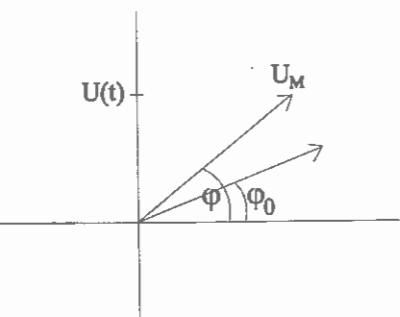
K řešení obvodů se střídavými napětími a proudy lze užít:

- 1) Fázorovou metodu (fázorové diagramy)
- 2) Komplexní symbolickou metodu

### FÁZOROVÁ METODA

Fázor představuje časový vektor dané el. veličiny (I nebo U), jehož velikost nám určuje maximální velikost  $I_M$  nebo  $U_M$  a jehož směr určuje fázi  $\phi$ . Fázové diagramy vynášíme do souřadné roviny tak, že základní veličinu, ke které vztahujeme posuvy ostatních veličin, položíme do horizontální osy.

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0$$



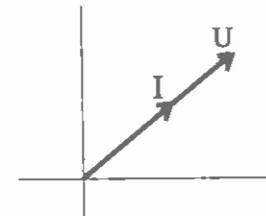
obr. č. 5.1.

$$U(t) = U_M \sin(\phi)$$

1) Rezistor (odpor):  $R = \frac{U_M}{I_M} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = \frac{u}{i}, \quad U_{ef} = \frac{U_M}{\sqrt{2}},$   
u,i jsou okamžité hodnoty U,I.

Fázové posunutí mezi U a I je nulové.

Fázorový diagram je na obr. č. 5.2.

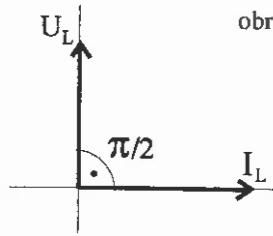


obr. č. 5.2.

2) Cívka: induktance  $X_L = \frac{U_M}{I_M} = \omega \cdot L.$

Napětí na cívce předchází proud o  $\frac{\pi}{2}$ .

Fázorový diagram viz obr. č. 5.3.

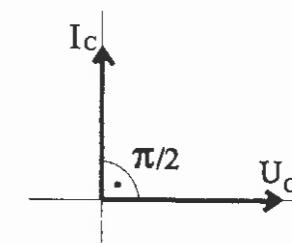


obr. č. 5.3.

3) Kondenzátor: kapacitance  $X_C = \frac{U_M}{I_M} = \frac{1}{\omega C}.$

Napětí se na kondenzátoru zpožďuje za proudem o  $\frac{\pi}{2}$ .

Fázorový diagram viz obr. č. 5.4.



obr. č. 5.4.

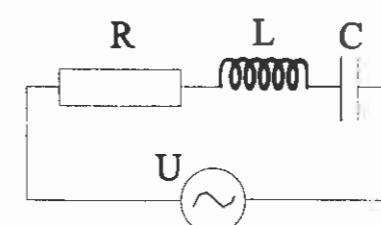
Fázové posunutí je obecně dáné rozdílem fází napětí a proudu, tedy:  $\phi = \phi_U - \phi_I.$

Celkové fázové posunutí obvodu je určeno součtem fázorů jednotlivých prvků obvodu.

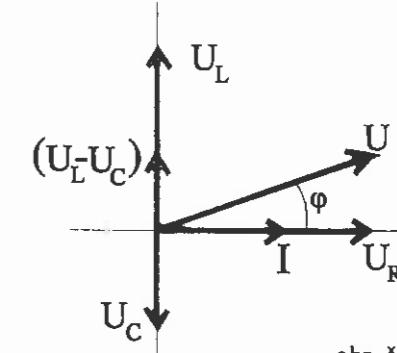
### Obvody s RLC prvky

1) Sériově RLC: Obvod je znázorněn na obr. č. 5.5., jeho fázorový diagram pak na obr. č. 5.6.

Fázor proudu je společný pro R i L i C a má stejný směr jako U na rezistoru [4].



obr. č. 5.5.



obr. č. 5.6.

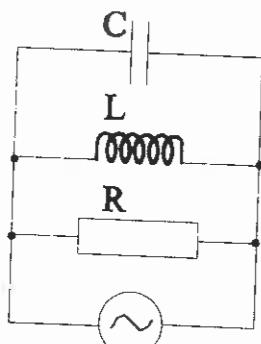
Impedance sériového RLC:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} . \quad (34)$$

A pro fázové posunutí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) . \quad (35)$$

2) Paralelně RLC: Obvod je na obr. č. 5.7. a jeho fázorový diagram na obr. č. 5.8. Fázor napětí je společný pro R,L i C a má stejný směr jako proud protékající odporem.



obr.č.5.7.

Impedance paralelního RLC:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} . \quad (36)$$

A fázové posunutí:

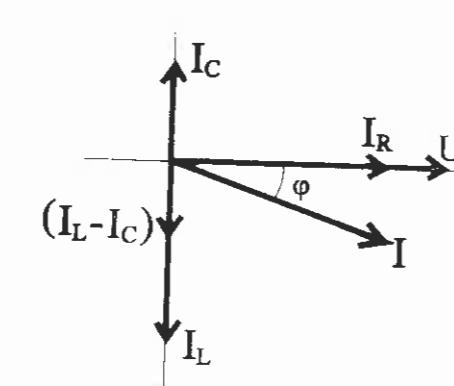
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{I_L - I_C}{I_R} \right) = \operatorname{arctg} \left( R \cdot \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right) . \quad (37)$$

### KOMPLEXNÍ SYMBOLICKÁ METODA

- spočívá ve vyjádření el. veličin komplexními čísly. Nad takto vyjádřenými el. veličinami píšeme obvykle stříšku. V následujícím textu budou uvedeny tři různé tvary zápisu komplexní impedance  $\hat{z}$ .

1) algebraický tvar:  $\hat{z} = \operatorname{Re}(\hat{z}) + \operatorname{Im}(\hat{z})j$ , (38)

2) goniometrický tvar:  $\hat{z} = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ , (39)



obr.č.5.8.

3) exponenciální tvar:  $\hat{z} = |z|e^{j\varphi}$ , (40)

j v zápisech značí imaginární jednotku.

Nejčastěji se používá algebraického a exponenciálního tvaru vyjádření.

1) Odpor (resistance):  $\varphi = 0 \Rightarrow \hat{R} = R(\cos 0 + j \sin 0) = R$ .

2) Cívka:  $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \hat{X}_L = \omega L(\cos 90 + j \sin 90) = j\omega L$ .

3) Kondenzátor:  $\varphi = -90^\circ \Rightarrow \hat{X}_C = \frac{1}{\omega C}(\cos(-90) + j \sin(-90)) = \frac{1}{j\omega C}$ .

### Obvody s RLC prvky

1) Sériově RLC:  $\hat{Z} = \hat{R} + \hat{X}_L + \hat{X}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ .

Impedance:  $Z = |\hat{Z}| = \sqrt{(\operatorname{Re}(\hat{Z}))^2 + (\operatorname{Im}(\hat{Z}))^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} . \quad (41)$

Fázové posunutí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) . \quad (42)$$

2) Paralelně RLC:  $\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \Rightarrow \hat{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$ .

Impedance:  $Z = |\hat{Z}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} . \quad (43)$

Fázové posunutí udáváme obvykle pomocí admitance  $\hat{Y}$ .

$$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(\hat{Y})}{\operatorname{Re}(\hat{Y})} = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right). \quad (44)$$

## REZONANCE

Pokud je fázové posunutí mezi U a I nulové, dochází k tzv. rezonanci. Impedance je rovna přímo činnému odporu R a je tudíž minimální v sériovém RLC obvodu (tzv. proudová rezonance) popř. maximální v paralelním RLC obvodu (tzv. napěťová rezonance). Rezonance se bohatě využívá v el. konstrukcích.

K rezonanci dochází při určité, rezonanční, frekvenci f. Tu lze odvodit na základě podmínky, že imaginární složka impedance obvodu je nulová (platí jak pro sériové, tak pro paralelní zapojení RLC):

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \\ \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (45)$$

Výsledný vzorec (45) pro výpočet rezonanční frekvence je označován též jako Thomsonův vztah.

## NAPĚŤOVÝ PŘENOS

- slouží k popisu charakteristiky přenosu sinusového napětí z obvodu výstupního do obvodu vstupního např. u lineárních dvojbranů (obvod mající dvě vstupní a dvě výstupní svorky) atd.

Napěťový přenos označujeme A a je obecně dán podílem vstupního napětí  $U_1$  a výstupního napětí  $U_2$ . Platí pro něj vztah :

$$\hat{A} = \frac{U_2}{U_1}. \quad (46)$$

Při stálé frekvenci je velikost napěťového přenosu konstantní. Při měnící se frekvenci závisí napěťový přenos na frekvenci v průběhu času.  $A = A(t)$  tak udává frekvenční závislost napěťového přenosu (tzv. útlumová charakteristika).

Pro zjištění hodnoty napěťového přenosu v decibelech (dB) se používá vztahu:

$$a = 20 \cdot \log A \quad (47)$$

## PŘÍKLAD 5.1:

Jaká má být kapacita kondenzátoru, jestliže se jeho kapacitní odpor má rovnat  $X_C = 500 \Omega$  při proudu s frekvencí a)  $f_1 = 50 \text{ Hz}$   
b)  $f_2 = 50 000 \text{ Hz}$  ?

**Řešení:** Kapacitní odpor kondenzátoru  $X_C$  je dle teorie:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Z tohoto vztahu lze po dosazení za  $\omega = 2\pi f$  vyjádřit kapacitu C kondenzátoru jako:  $C = \frac{1}{X_C \cdot 2\pi f}$ .

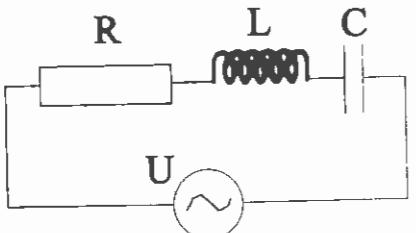
Po dosazení hodnot ze zadání do vyjádřenému vztahu pro hledanou kapacitu kondenzátoru vychází:

- pro  $f_1 = 50 \text{ Hz}$ :  $C_1 = \frac{1}{500 \cdot 2\pi \cdot 50} F \doteq 6,37 \mu F$ ,

- pro  $f_2 = 50 000 \text{ Hz}$ :  $C_2 = \frac{1}{500 \cdot 2\pi \cdot 50000} F \doteq 6,37 nF$ .

### PŘÍKLAD 5.2:

Prvky v sériovém RLC obvodu z obr. č. 5.9. mají tyto hodnoty:  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $U = 220 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ . Vypočtěte celkovou impedanci obvodu, proud jím protékající a fázový posun  $\varphi$  mezi napětím a proudem.



obr. č. 5.9.

**Řešení:** Impedanci v sériovém RLC obvodu vypočítáme jednoduše dosazením do (34):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{10^4 + (314 - 3185)^2} \Omega = 2687 \Omega.$$

Impedance představuje celkový odpor obvodu. Proud, který obvodem protéká, spočítáme poté jednoduše pomocí Ohmova zákona:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{2687} A = 0,08 A.$$

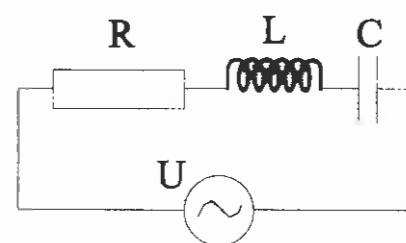
Zbývá nám určit ještě fázový posun  $\varphi$ . Ten spočítáme opět jednoduše dosazením do (35):

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = \arctg \left( \frac{314 - 3185}{100} \right) = \arctg(-28,71) \Rightarrow \varphi = -88^\circ.$$

Fázový posun mezi napětím a proudem je záporný. To znamená, že napětí se zpožďuje za proudem o  $88^\circ$ . Obvod se tak celkově vůči zdroji chová jako kapacita.

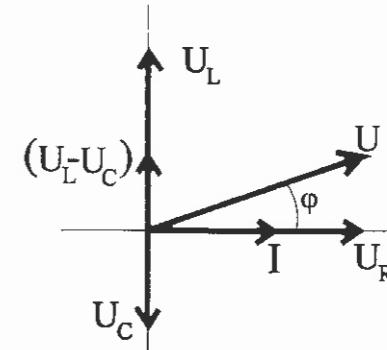
### PŘÍKLAD 5.3:

Jaký proud bude protékat obvodem z obr. č. 5.10., ve kterém jsou do série zapojené  $R = 10 \Omega$ , cívka s  $L = 0,1 \text{ H}$  a kondenzátor s  $C = 2 \mu\text{F}$ , jestliže je obvod připojený na střídavé napětí  $U = 220 \text{ V}$  s frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ ? Jaká bude rezonanční frekvence tohoto obvodu?



obr. č. 5.10.

**Řešení:** Jde o klasický sériový RLC obvod. Jeho fázorový diagram představuje obr. č. 5.11.



obr. č. 5.11

Pro napětí  $U$  lze s ohledem na fázorový diagram psát:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2.$$

Po úpravě výše uvedené rovnice a jejím odmocnění dostaneme rovnici:

$$Z \cdot I = \sqrt{R^2 I^2 + \left( I \omega L - \frac{I}{\omega C} \right)^2}.$$

A z této rovnice lze již získat celkovou impedanci obvodu:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Proud protékající obvodem určíme na základě Ohmova zákona:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání do vyjádřeného vztahu pro proud  $I$  protékající obvodem dostaneme:

$$I = 0,14 \text{ A.}$$

Rezonanční frekvenci obvodu určíme na základě rezonanční podmínky

$$(45): \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání pro rezonanční frekvenci obvodu vychází:

$$f = 355,9 \text{ Hz.}$$

#### PŘÍKLAD 5.4:

Kondenzátor s kapacitou  $C = 30 \mu\text{F}$  a cívka s vlastní indukčností  $L = 25 \text{ H}$  a ohmickým odporem  $R = 500 \Omega$  jsou zapojeny do série a připojeny na střídavé napětí  $U = 220 \text{ V}$ . Při jakém kmitočtu  $f_R$  je napětí  $U$  a proud v obvodu ve fázi? Jaká bude pro tento případ výsledná impedance  $Z_R$ , proud  $I_R$  a napětí na kondenzátoru  $U_C$  a na svorkách cívky  $U_{LR}$ ?

Řešení: Jde o klasický sériový RLC obvod. Napětí a proud jsou ve fázi při rezonanci. Pro případ sériové rezonance je  $U_L = U_C$ . Rezonanční frekvence je dána Thomsonovým vztahem:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{25 \cdot 30 \cdot 10^{-6}}} \text{ Hz} = 5,81 \text{ Hz.}$$

Impedance při rezonanci je rovna ohmickému odporu obvodu:

$$Z_R = R = 500 \Omega.$$

Proud  $I_R$  pak vypočteme dle Ohmova zákona:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{500} \text{ A} = 0,44 \text{ A.}$$

Napětí na kondenzátoru při rezonanci tudíž bude:

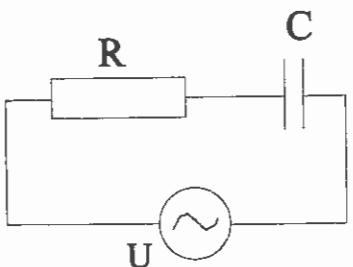
$$U_C = \frac{1}{\omega_R C} I_R = \frac{I_R}{2\pi f_R C} = \frac{0,44}{36,5 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} \text{ V} = 401,8 \text{ V.}$$

A napětí  $U_{LR}$  na cívce při rezonanci bude:

$$U_{LR} = \sqrt{R^2 + \omega_R^2 L^2} \cdot I_R = \left( \sqrt{500^2 + (36,5 \cdot 25)^2} \cdot 0,44 \right) \text{ V} = 457,8 \text{ V.}$$

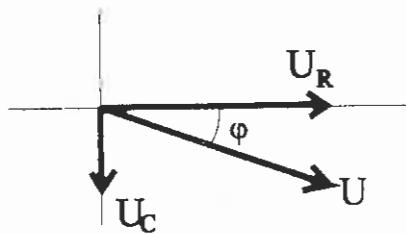
### PŘÍKLAD 5.5:

Kondenzátor  $C = 16 \mu F$  a rezistor o odporu  $R = 200 \Omega$  zapojené do série jsou připojeny na síť s  $U = 220 V$  a  $f = 50 Hz$  (viz obr. č. 5.12). Určete impedanci  $Z$  obvodu, protékající proud, fázové posunutí mezi  $U$  a  $I$  v obvodu, napětí na kondenzátoru a napětí na rezistoru.



obr. č. 5.12

**Řešení:** Na obvod můžeme nahlížet jako na sériový RLC obvod, přičemž  $L = 0$ . Fázový diagram tohoto obvodu je na obr. č. 5.13.



obr. č. 5.13.

Z Pythagorovy věty:

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2,$$

$$Z \cdot I = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 282 \Omega.$$

Protékající proud:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{220}{282} A = 0,78 A.$$

Pro fázové posunutí platí dle obr. č. 5.13.:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{-U_C}{U_R} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{\omega R}} = -\frac{1}{\omega R C} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\omega R C} \right) = -44^{\circ} 50'.$$

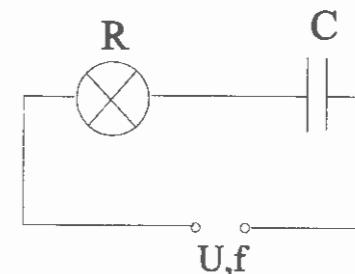
Napětí na rezistoru:  $U_R = I \cdot R = 0,78 A \cdot 200 \Omega = 156 V$ .

Napětí na kondenzátoru:

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{0,78}{2\pi \cdot 50 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} V = 155 V.$$

### PŘÍKLAD 5.6:

Máme k dispozici žárovku  $60 W, 120 V$  a potřebujeme ji připojit přes kondenzátor na střídavou síť  $220 V/50 Hz$  (viz obr. č. 5.14). Určete velikost kapacity kondenzátoru, který je nutné k žárovce připojit, aby na žárovce bylo její předepsané napětí.



obr. č. 5.14.

**Řešení:** Vypočítáme jmenovitý proud žárovky  $I_N$  a její odpor  $R$ :

$$I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{60}{120} A = 0,5 A \quad R = \frac{U_N}{I_N} = \frac{120}{0,5} \Omega = 240 \Omega.$$

Žárovka s kondenzátorem tvoří sériový obvod a celková impedance obvodu musí být taková, aby při napětí  $220 V$  protékal obvodem proud  $I_N$ .

$$Z_N = \frac{U}{I_N} = \frac{220}{0,5} \Omega = 440 \Omega.$$

Impedance sériového obvodu RLC (kde  $L=0$ ) je dána:

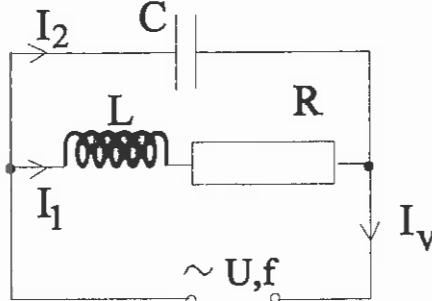
$$Z_N = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Z tohoto výrazu již určíme velikost kapacity kondenzátoru  $C$ :

$$C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{Z_N^2 - R^2}} = \left( \frac{1}{314} \sqrt{\frac{1}{440^2 - 240^2}} \right) F = 8,6 \mu F.$$

### PŘÍKLAD 5.7:

Je dán obvod z obr. č. 5.15., kde  $R = 200 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$  a  $U = 220 \text{ V}$  s frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ . Určete proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_V$  tekoucí v obvodu.



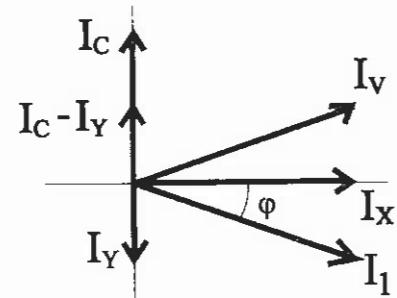
obr. č. 5.15.

Řešení: Proud  $I_1$  a  $I_2$  ve větvích obvodu stanovíme na základě Ohmova zákona jako podíl napětí ku impedanci dané větve:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 0,59073 \text{ A},$$

$$I_2 = I_C = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U \omega C = 0,69115 \text{ A}.$$

Proud  $I_V$  určíme z fázorového diagramu (viz obr. č. 5.16.).



obr. č. 5.16.

Platí:  $\tan \varphi = \frac{I_Y}{I_X} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = 57,5^\circ.$

Dále:  $I_X = I_1 \cdot \cos(\varphi) = 0,3174$ ,  $I_Y = I_1 \cdot \sin(\varphi) = 0,4982$ .

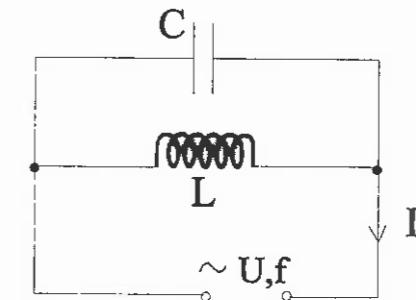
Z Pythagorovy věty plyne:  $I_V = \sqrt{I_X^2 + (I_C - I_Y)^2}$ .

Po číselném dosazení je proud  $I_V$ , tekoucí nerozvětvenou částí obvodu:

$$I_V = 0,37 \text{ A}.$$

### PŘÍKLAD 5.8:

Jaký proud  $I$  protéká obvodem složeným z  $L = 4 \text{ H}$  a  $C = 16 \mu\text{F}$ , které jsou zapojeny paralelně a připojeny ke zdroji střídavého napětí  $U = 220 \text{ V}$  s frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ ? Daný obvod znázorňuje obr. č. 5.17.



obr. č. 5.17.

Řešení: Proud  $I$  vypočítáme jednoduše dle Ohmova zákona jako podíl napětí v obvodu ku celkové impedanci obvodu  $Z$ . Stačí nám tudíž určit pouze impedanci obvodu  $Z$ .

Tentokrát budeme postupovat na základě komplexní symbolické metody. Řešení bude takto velice jednoduché a krátké.

Pro impedanci  $\hat{Z}$  v obvodu z obr. č. 5.17. můžeme psát:

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right),$$

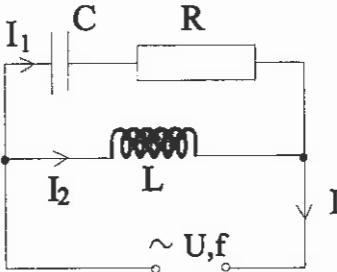
$$\frac{1}{Z} = \left| \frac{1}{\hat{Z}} \right| = \sqrt{\left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Pro proud  $I$  pak lze psát:

$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 0,93 \text{ A}.$$

### PŘÍKLAD 5.9:

Je dán obvod podle obr. č. 5.18.  $R = 250 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ , střídavé napětí  $U = 220 \text{ V}$  s frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ . Určete proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I$  tekoucí v obvodu.



obr. č. 5.18.

**Řešení:** Nejprve určíme pomocí komplexní symbolické metody impedance jednotlivých větví.

$$\hat{Z}_2 = \hat{X}_L = j\omega L \Rightarrow Z_2 = |\hat{Z}_2| = \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L,$$

$$\hat{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \cdot \frac{1}{\omega C} \Rightarrow Z_1 = |\hat{Z}_1| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Proud  $I_1$  a  $I_2$  již nyní můžeme určit:

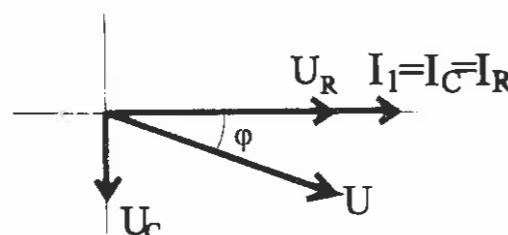
$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 0,54 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\omega L} \doteq 1,4 \text{ A}.$$

Abychom získali proud  $I$ , musíme proudy  $I_1$  a  $I_2$  sečist jako fázory. Budeme postupovat ve dvou krocích. Nejprve zjistíme fázové posunutí a pak teprve vypočítáme proud  $I$ .

1) Sériové spojení  $C$  a  $R$  ( $I_C$  a  $I_R$  jsou ve fázi,  $U_C$  a  $U_R$  však ne)

Fázorový diagram je pro tuto situaci na obr. č. 5.19.



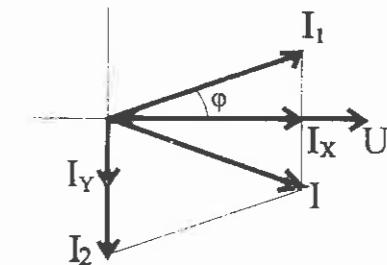
obr. č. 5.19.

Pro fázové posunutí lze psát:

$$\tg \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\omega C}{I_1 R} = \frac{1}{\omega R C} \Rightarrow \varphi = \arctg \left( \frac{1}{\omega R C} \right) \doteq -51^\circ 51'.$$

Zjistili jsme, že proud předbíhá napětí o přibližně  $51^\circ$ .

2) Celkové paralelní spojení větví: nyní zakreslíme fázory proudů (viz obr. č. 5.20)



obr. č. 5.20.

$$I_X = I_1 \cos(\varphi) = 0,33 \text{ A}, \quad I_Y = I_2 - I_1 \sin(\varphi) = 0,98 \text{ A}.$$

Pro výsledný proud  $I$  pak podle fázorového diagramu na obr. č. 5.20 podle Pythagorovy věty vyplývá:

$$I = \sqrt{I_X^2 + I_Y^2} = \sqrt{0,33^2 + 0,98^2} \text{ A} = 1,03 \text{ A}.$$

♦ Daný příklad vyřešíme pro srovnání ještě použitím čistě komplexní symbolické metody:

Celková impedance zapojení je  $\hat{Z}$ . Dále pro obvod z obr. č. 5.18. platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{Z}} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R - j \frac{1}{\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{\omega C(R\omega C + j)}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \frac{j}{\omega L} = \\ &= \left( \frac{R\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \right) + j \left( \frac{\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} \right). \end{aligned}$$

Pro proud  $I$  pak platí Ohmův zákon:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{|\hat{Z}|} = \frac{U}{\sqrt{\left( \frac{R\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \right)^2 + \left( \frac{\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}.$$

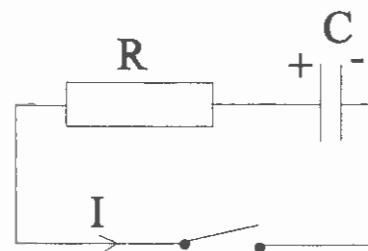
Po dosazení číselných hodnot vychází proud  $I = 1,03 \text{ A}$ .

Pozn.: Jak lze postřehnout, komplexní symbolická metoda byla v našem případě o poznání kratší.

Následující dva příklady (5.10 a 5.11) spadají vlastně do jiné samostatné kategorie, souhrnně nazývané „přechodové jevy“. Vzhledem k tomu, že i zde jsou proměnné průběhy jednotlivých el. veličin, a že se jedná pouze o dva případy, vložili jsme je právě do těchto míst. Přitom jsme vybrali pouze přechodové jevy ve stejnosměrných obvodech.

### PŘÍKLAD 5.10:

Kondenzátor kapacity  $C$  má v čase  $t = 0$  s potenciál  $V_0$ . Vybjíme ho přes rezistor  $R$ . Určete obecně časový průběh proudu v obvodu na obr. č. 5.21.



obr. č. 5.21.

Řešení: V čase  $t = 0$  s měl kondenzátor potenciál  $V_0$ . Poté byl spínač sepnut a obvodem začal protékat proud  $I$ . Kondenzátor se tak vybjíel a jeho potenciál klesal. Jde nám o určení časové závislosti proudu protékajícího obvodem.[12]

Vyjdeme z 2. Kirchhoffova zákona, přičemž uvažujeme, že kondenzátor v obvodu představuje zdroj napětí, které odpovídá podílu náboje na kondenzátoru ku jeho kapacitě  $C$ . Vyjádříme proud  $I$ :

$$U = R \cdot I = \frac{Q}{C} \Rightarrow I = \frac{Q}{RC}$$

Časovou závislost  $I$  budeme hledat derivováním vyjádřeného vztahu

pro proud:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot (-I),$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} \cdot dt.$$

Poslední rovnici zintegrujeme:

$$\ln I = -\frac{1}{RC} \cdot t + K \Rightarrow I = e^K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = K_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dostali jsme časový průběh proudu  $I$  s neznámou konstantou  $K_0$ .

Konstantu  $K_0$  určíme pomocí počátečních podmínek:  $t = 0$ ,  $V_0 = R \cdot I$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R}.$$

Zintegrováná rovnice pro proud pak přejde na tvar:

$$I = K_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = K_0 \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = K_0 \cdot 1 = K_0 \Rightarrow K_0 = I = \frac{V_0}{R}.$$

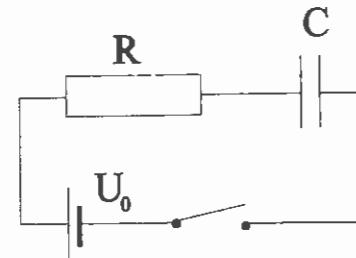
Časový průběh proudu  $I$  má pak rovnici:

$$I = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pozn.: Z časové závislosti průběhu proudu vyplývá, že pro vysoké hodnoty  $R$  a  $C$  bude proud v obvodu klesat velice pomalu. Při opačných hodnotách  $R$  a  $C$  proud  $I$  klesne velice rychle.

**PŘÍKLAD 5.11:**

Za jaký čas od začátku nabíjení kondenzátoru  $C$  přes rezistor  $R$  dosáhne napětí na deskách kondenzátoru hodnotu  $U$ , jestliže zapojením spínacího klice vložíme na svorky sériového zapojení odporu a kondenzátoru napětí  $U_0$ . Situace je znázorněna na obr. č. 5.22.



obr. č. 5.22.

Další úpravou této rovnice již zjistíme vyjádření času  $t$ , ve kterém dosáhne napětí na deskách kondenzátoru hodnoty  $U$ :

$$\frac{t}{RC} = \ln \frac{I_0}{I} = \ln \frac{\frac{U_0}{R}}{\frac{U_0 - U}{R}} = \ln \frac{U_0}{U_0 - U} \Rightarrow t = RC \cdot \ln \frac{U_0}{U_0 - U}.$$

**Řešení:** Vyjdeme z 2. Kirchhoffova zákona. Pro daný obvod lze psát:

$$U_0 = R \cdot I + \frac{Q}{C} \Rightarrow I = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}.$$

Vyjádřenou rovnici pro proud zderivujeme:

$$\frac{dI}{dt} = 0 - \frac{1}{RC} \cdot I.$$

Úpravou:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Poslední rovnici zintegrujeme:

$$\ln I = -\frac{1}{RC} \cdot t + K \Rightarrow I = e^{K} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = K_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Vyjádřili jsme tak časový průběh proudu  $I$ . Nyní určíme neznámou  $K_0$ .

Z počátečních podmínek v čase  $t = 0$  je  $Q_C = 0$  a tudíž i  $U = 0$ .

Po dosazení těchto počátečních podmínek do poslední rovnice zjistíme

konstantu  $K_0$ :  $I = K_0 \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = K_0 = I_0$ .

Rovnice časového průběhu proudu  $I$  má pak tvar:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zlogaritmováním této rovnice dostaneme:

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + \ln I_0.$$

### PŘÍKLAD 5.12:

Na štítku tlumivky typu 842 pro zářivku s výkonem 40W jsou uvedeny tyto údaje: 220 V; 0,42 A; 50 Hz;  $\cos\varphi = 0,56$ . Vypočítejte z těchto údajů impedanci, indukční reaktanci, činný odpor cívky, napětí na indukční reaktanci, napětí na činném odporu a indukčnost.

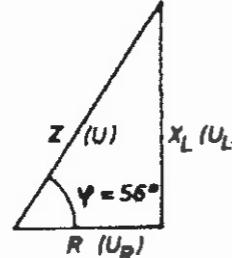
Řešení: Impedance je:  $Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{0,42} \Omega = 523,8 \Omega$ .

Tlumivka je vlastně tvořena sériovým spojením cívky L s jejím vnitřním odporem R. Jelikož C = 0, lze fázorový diagram pro napětí překreslit do názorného trojúhelníku napětí (odporů) [11].

Z trojúhelníku odporů (obr. č. 5.23) pak zjistíme indukční reaktanci.

$$\cos\varphi = 0,56 \Rightarrow \varphi = 56^\circ$$

$$\sin 56^\circ = 0,83$$



obr. č. 5.23.

Indukční reaktance:

$$X_L = Z \cdot \sin 56^\circ = (523,8 \cdot 0,83) \Omega = 434,75 \Omega$$

Činný odpor vinutí je:

$$R = Z \cdot \cos 56^\circ = (523,8 \cdot 0,56) \Omega = 293,33 \Omega$$

Napětí na indukční reaktanci je:

$$U_L = I \cdot X_L = (0,42 \cdot 434,75) V = 182,6 V$$

Napětí na činném odporu je:

$$U_R = I \cdot R = (0,42 \cdot 293,33) V = 123,2 V$$

Induktivnost tlumivky vypočteme z indukční reaktance:

$$X_L = \omega L \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{434,75}{2\pi \cdot 50} H = 1,38 H$$

Protože podle obr. č. 5.23 platí (Pythagorova věta):  $U^2 = U_L^2 + U_R^2$ ,

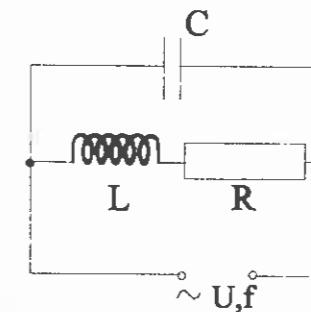
lze dosazením jednoduše ověřit správnost našeho výpočtu.

### PŘÍKLAD 5.13:

Jak velký kondenzátor musíme připojit paralelně ke svorkovnici jednofázového motoru o indukčnosti L = 2H a činném odporu R = 0,5 Ω, abychom dosáhli účiníku  $\cos\varphi = 1$ , je-li napětí zdroje U = 220 V a frekvence je f = 50 Hz?

Řešení: Při  $\cos\varphi = 1$  je fázový posun mezi napětím motoru a zatěžovacím proudem nulový ( $\varphi = 0$ ), čehož lze dosáhnout při rezonanci.

Protože motor představuje vlastní indukčnost L v sérii s činným odporem R, musíme k motoru připojit kondenzátor [11]. Rezonančního stavu pak dosáhneme jen volbou kapacity, protože frekvence zdroje je stálá. Celé zapojení schématicky zachycuje obr. č. 5.24.



obr. č. 5.24.

Vypočteme celkovou impedanci obvodu s přidaným kondenzátorem. Řešíme komplexní symbolickou metodou.

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} = \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C,$$

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Při rezonanci bude imaginární část posledního výrazu rovna nule. Máme tedy rezonanční podmínu:

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0 \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

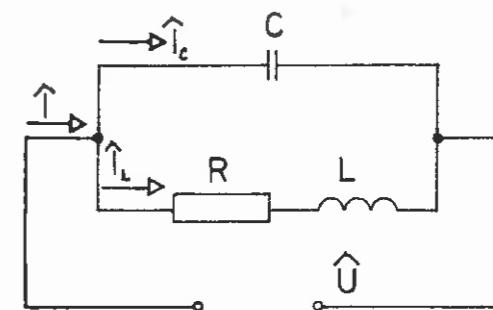
Získali jsme vztah pro kapacitu  $C$ , potřebnou k dosažení účiníku  $\cos\phi = 1$ . Do vztahu již pouze číselně dosadíme:

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{0,5^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 2)^2} F = 5,35 \mu F.$$

Pozn.: Po připojení kondenzátoru s kapacitou přibližně  $5\mu F$  bude proud motoru ve fázi se svorkovým napětím  $U$ , tzn. že motor nebude odebírat ze sítě jalový magnetizační proud, protože ho dodá kondenzátor.

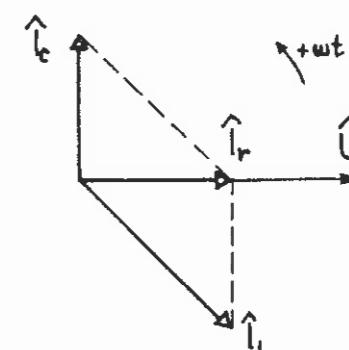
#### PŘÍKLAD 5.14:

Kondenzátor s kapacitou  $C = 8 \mu F$  a cívka s odporem  $R = 50 \Omega$  a indukčností  $L = 1 H$  jsou zapojeny paralelně a připojeny na střídavé napětí  $U = 220 V$  dle obr. č. 5.25. Při jakém kmitočtu  $f$  je napětí  $U$  a proud v obvodu  $I$  ve fázi? Jaká bude pro tento případ výsledná impedance  $Z$ , proud v obvodu  $I$ , proud v kondenzátoru  $I_C$  a proud v cívce  $I_L$ ? Nakreslete fázorový diagram, odpovídající rezonanci.



obr. č. 5.25.

Řešení: Napětí a proud budou ve fázi právě při rezonanci. Fázorový diagram, odpovídající danému obvodu na obr. č. 5.25., je pro případ paralelní rezonance na obr. č. 5.26.



obr. č. 5.26.

Napětí  $\hat{U}$  a proud  $\hat{I} = \hat{I}_R$  jsou ve fázi. K výpočtu použijeme komplexní symbolickou metodu. Lze tak psát:

$$\hat{I} = \hat{I}_C + \hat{I}_L = \hat{U} \cdot j\omega C + \frac{\hat{U}}{R + j\omega L}.$$

Po úpravě:

$$\hat{I} = \hat{U} \cdot \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \hat{U} \cdot j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right).$$

Fázor napětí položíme do reálné osy:  $\hat{U} = U e^{j \cdot 0^\circ}$ .

Aby i fázor proudu ležel na reálné ose (tentýž zápis), musí být imaginární část proudu  $\hat{I}$  rovna 0. Máme tak rezonanční podmíinku:

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1.8 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{50}{1}\right)^2} \text{ rad.s}^{-1} = 350 \text{ rad.s}^{-1}.$$

A pro rezonanční frekvenci:

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{350}{2\pi} \text{ Hz} = 55,7 \text{ Hz}.$$

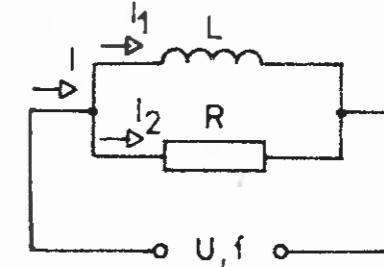
Ostatní veličiny (impedance a proudy tekoucí jednotlivými součástkami) odvodíme z reálné složky proudu  $\hat{I}$ :

$$Z_R = \frac{R^2 + \omega_R^2 L^2}{R} = \frac{50^2 + 350^2 \cdot 1^2}{50} \Omega = 2500 \Omega \quad I_R = \frac{U}{Z_R} = \frac{220}{2500} A = 0,088 A,$$

$$I_C = U \omega_R C = 220 \cdot 350 \cdot 8 \cdot 10^{-6} A = 0,616 A \quad I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega_R^2 L^2}} = \frac{220}{\sqrt{50^2 + 350^2 \cdot 1^2}} A = 0,622 A.$$

### PŘÍKLAD 5.15:

V obvodu zapojeném podle obr. č. 5.27. je paralelně spojena indukčnost  $L = 150 \text{ mH}$  a odpor  $R = 5 \text{ k}\Omega$ . Obvod je připojen na zdroj střídavého napětí  $U = 10 \text{ V}$  s frekvencí  $10 \text{ kHz}$ . Určete, jak velký proud odebírá kombinace ze zdroje a jak velké jsou proudy jednotlivými prvky. Nakreslete fázorový diagram.



obr. č. 5.27.

Řešení: Nejprve si vypočteme proudy tekoucí jednotlivými větvemi obvodu. K výpočtu použijeme komplexní symbolické metody. Napětí  $\hat{U}$  položíme do reálné osy [9]. Proud tekoucí indukčnosti  $I_1$ :

$$\hat{I}_1 = \frac{U}{jX_L} = -j \frac{U}{\omega L} = -j \cdot \frac{10}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 150 \cdot 10^{-3}} A = -j1,06 mA,$$

$$I_1 = |\hat{I}_1| = 1,06 mA.$$

Proud  $I_2$  tekoucí odporem:

$$\hat{I}_2 = \frac{U}{R} = I_2 = \frac{10}{5 \cdot 10^3} A = 2 mA.$$

Celkový proud  $\hat{I}$  je dán podle 1. Kirchhoffova zákona:

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = (2 \cdot 10^{-3} - j1,06 \cdot 10^{-3}) A,$$

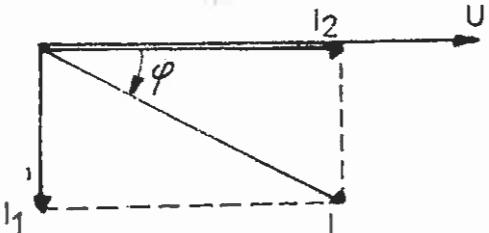
$$I = |\hat{I}| = \sqrt{(2 \cdot 10^{-3})^2 + (1,06 \cdot 10^{-3})^2} A = 2,26 mA.$$

Fázový posun mezi celkovým proudem a napájecím napětím:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{-1,06}{2} \right) = \arctg(-0,53) = -28^\circ.$$

Celkový proud lze tak psát v exponenciálním tvaru:

$$\hat{I} = 2,26 e^{-j28^\circ} mA.$$



obr. č. 5.28

Úplný fázový diagram je nakreslen na obr. č. 5.28. Ke společnému napětí  $U$  jsou vztázeny proudy  $\hat{I}_1$ ,  $\hat{I}_2$  a  $\hat{I}$ .

#### PŘÍKLAD 5.16:

Cívka má indukčnost  $L = 0,4 \text{ mH}$  a odpor  $R = 100 \Omega$ , je zapojená do série s kondenzátorem o kapacitě  $C = 400 \text{ pF}$ , s nímž tvoří rezonanční obvod. Vypočtěte rezonanční frekvenci, proud tekoucí obvodem při rezonanci a napětí na kapacitě a indukčnosti při rezonanci, je-li obvod připojen na generátor sinusových kmitů o napětí  $U = 1 \text{ V}$ .

**Řešení:** Rezonanční frekvence je dána Thomsonovým vztahem a je nezávislá na velikosti ohmického odporu:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28\sqrt{4 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}} \text{ Hz} = 4 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 400 \text{ kHz}.$$

Při rezonanci se induktivní reaktance rovná kapacitní reaktanci a celková impedance je rovna činnému odporu  $R$ . Rezonanční proud je tedy:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{1}{100} \text{ A} = 10 \text{ mA}.$$

Vypočteme ještě napětí při rezonanci na kapacitě a indukčnosti. Proud tekoucí obvodem položíme do reálné osy.

$$\hat{U}_L = I \cdot jX_L = jI \cdot \omega L = j0,01 \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ V} = j.10 \text{ V},$$

$$\hat{U}_C = I \left( -j \cdot \frac{1}{\omega C} \right) = -jI \cdot \frac{1}{\omega C} = -j \cdot 0,01 \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-10}} \text{ V} = -j.10 \text{ V}.$$

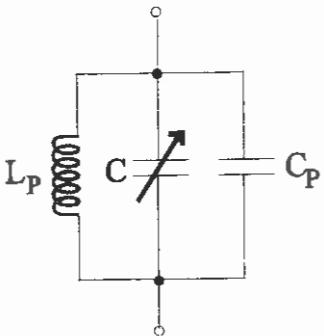
A pro velikosti napětí:

$$U_L = |\hat{U}_L| = 10 \text{ V}, \quad U_C = |\hat{U}_C| = 10 \text{ V}.$$

**Pozn.:** Z výsledků je patrné, že obě napětí jsou stejně veliká, ale opačného směru. Při rezonanci jsou napětí na kapacitě a indukčnosti několikanásobně větší než je napětí napájecí.

### PŘÍKLAD 5.17:

Laděný paralelní rezonanční obvod (viz obr. č. 5.29) má otočný kondenzátor, jehož kapacita se mění v rozmezí 50 pF až 500 pF. Krajní polohy kondenzátoru mají odpovídat rezonančním frekvencím 1000 kHz a 500 kHz. Určete  $L_P$  a  $C_P$  tak, aby se dosáhlo požadovaného frekvenčního rozsahu.



obr. č. 5.29.

**Řešení:** Rezonanční frekvence označíme  $f_1 = 1000$  kHz a  $f_2 = 500$  kHz. Pro rezonanční frekvenci  $f_1$  a  $f_2$  obvodu z obr. č. 5.29. lze s ohledem na paralelní spojení kapacit  $C$  a  $C_P$  psát Thomsonův vztah ve tvaru:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_P \cdot (C_1 + C_P)}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2 f_1^2} = L_P C_1 + L_P C_P,$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_P \cdot (C_2 + C_P)}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2 f_2^2} = L_P C_2 + L_P C_P.$$

$C_1$  a  $C_2$  označují krajní kapacity laděného kondenzátoru  $C$ .

Jelikož pro  $f_1 > f_2$  je  $C_1 < C_2$ , označíme vzhledem ke zvoleným  $f_1$  a  $f_2$  kapacity  $C_1$  a  $C_2$  následovně:  $C_1 = 50$  pF,  $C_2 = 500$  pF.

Obě rovnice obsahují  $C_P$ . To vyjádříme z druhé rovnice:

$$C_P = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 L_P} - C_2.$$

Vyjádřené  $C_P$  dosadíme do prvej rovnice a po krátké úpravě a následném číselném dosazení obdržíme pro  $L_P$ :

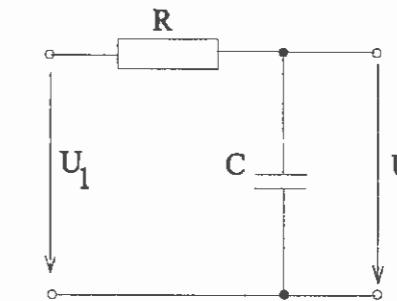
$$L_P = \frac{\frac{1}{4\pi^2} \cdot \left( \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)}{C_1 - C_2} = 169 \mu\text{H}.$$

Po dosazení vypočítané hodnoty  $L_P$  do vztahu pro  $C_P$  nám vychází:

$$C_P = 100 \text{ pF}.$$

### PŘÍKLAD 5.18:

Dělič napětí podle obr. č. 5.30 je připojen na laditelný generátor sinusových kmitů s výstupním napětím  $U_1 = 10$  V. Určete frekvenci, při které je fázový posun výstupního napětí děliče vůči vstupnímu napětí  $45^\circ$  a velikost výstupního napětí  $U_2$  při této frekvenci.  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .



obr. č. 5.30.

**Řešení:** Obvod představuje dělič střídavého napětí. Výpočet budeme provádět podle vztahu pro dělič napětí (13) s přihlédnutím k aktuálním indexům za použití komplexní symbolické metody [11].

Výstupní napětí děliče  $\hat{U}_2$ :

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{U}_1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR}.$$

Po úpravě:

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j \frac{\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right).$$

Položíme-li napětí  $\hat{U}_1$  do reálné osy je:

$$\hat{U}_2 = U_1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j \frac{\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right).$$

Fázový posun napětí  $\hat{U}_2$  vůči  $\hat{U}_1$  je:

$$\varphi = -\arctg \left( \frac{\omega CR}{\frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \right) = -\arctg (\omega CR).$$

Má-li být  $\varphi = 45^\circ$ , pak  $\omega CR = 1$ . Odtud vypočteme hledanou  $f$ :

$$f = \frac{1}{2\pi CR} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-6} \cdot 100} \text{ Hz} = 1592,4 \text{ Hz}.$$

Výstupní napětí  $\hat{U}_2$  při frekvenci  $f = 1592,4$  Hz, kdy  $\omega CR = 1$  je:

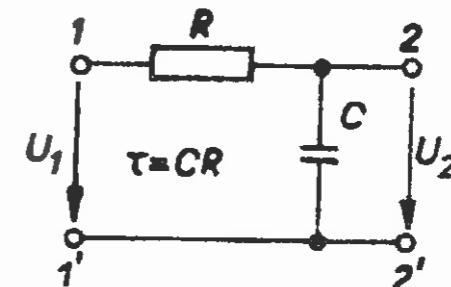
$$\hat{U}_2 = U_1 \cdot \left( \frac{1}{1+1} - j \cdot \frac{1}{1+1} \right) = U_1 \left( \frac{1}{2} \right) - j \cdot U_1 \left( \frac{1}{2} \right).$$

Velikost výsledného napětí  $U_2$  je tedy:

$$U_2 = |\hat{U}_2| = U_1 \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2} = U_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V} = 7,07 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 5.19:

Vypočtěte napěťový přenos, jeho velikost a velikost fázového posunutí článku RC z obr. č. 5.31.  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ nF}$ ,  $f = 160 \text{ kHz}$ . Zakreslete jeho útlumovou a fázovou charakteristiku.



obr. č. 5.31

**Řešení:** Napěťový přenos dvojbranu se vypočte z poměru výstupního a vstupního napětí. Budeme postupovat na základě komplexní symbolické metody.

$$\text{Napětí } \hat{U}_2: \quad \hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Napěťový přenos je tedy:

$$\hat{A} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{j\omega RC}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC - 1}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Pro velikost napěťového přenosu:

$$A = |\hat{A}| = \sqrt{\left( \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Velikost napěťového přenosu v decibelech:

$$\alpha = 20 \log A = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dB = -3 dB.$$

Velikost fázového posunutí:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}} = \frac{-\omega RC}{\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}} = -\omega RC = -1 \Rightarrow \varphi = -45^\circ.$$

Pro zjednodušení zápisu zavádíme časovou konstantu  $\tau$ , mezní úhlovou frekvenci a mezní frekvenci [11].

Časová konstanta obvodu  $RC$ :  $\tau = R.C$

$$\text{Mezní úhlová frekvence: } \omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$

$$\text{Mezní frekvence je pak: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Vztah pro napěťový přenos pak přejde do tvaru:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}.$$

A vztah pro fázové posunutí přejde do tvaru:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC = -\frac{f}{f_0}.$$

Charakteristiky zmíněného  $RC$  článku sestrojíme následujícím způsobem:

a) pro  $f \ll f_0$  :  $A$  se blíží 1, kondenzátor se pro nízké frekvence chová jako odpor s velikou kapacitancí, napěťový přenos je téměř stoprocentní ( $U_2 \approx U_1$ ) a  $\varphi$  se blíží k 0.

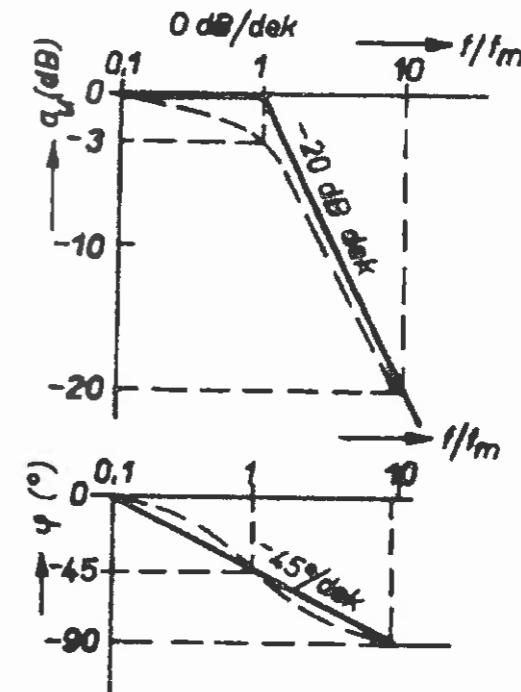
$$\text{speciálně pro } \frac{f}{f_0} = 0,1; \quad a = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+0,1^2}} dB \doteq 0 dB; \varphi = -\arctg 0,1 \doteq 0^\circ.$$

$$\text{b) pro } f = f_0 : A = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} dB \doteq -3 dB; \varphi = -\arctg 1 = -45^\circ.$$

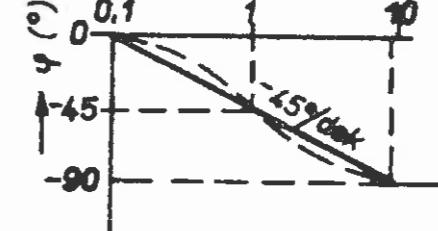
c) pro  $f > f_0$  :  $A$  se blíží 0, pro velmi vysoké frekvence kondenzátor představuje malý odpor, veškerý úbytek napětí je na  $R$ ,  $U_2$  se blíží k 0.

$$\text{speciálně pro } \frac{f}{f_0} = 10; \quad a = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+10^2}} dB \doteq -20 dB; \varphi = -\arctg 10 \doteq -90^\circ.$$

Nyní již můžeme nakreslit přibližnou útlumovou charakteristiku (obr. č. 5.32) a fázovou charakteristiku (obr. č. 5.33).



obr. č. 5.32

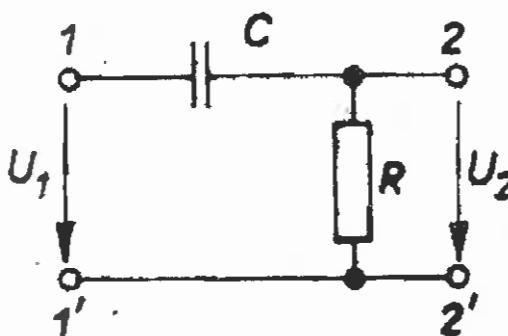


obr. č. 5.33

S ohledem na charakteristiky lze říci, že zmíněný článek  $RC$  se chová jako dolnofrekvenční propust (filtruje vysoké kmitočty).

### PŘÍKLAD 5.20:

Vypočtěte napěťový přenos horní propusti zapojené podle obr. č.5.34. pro vstupní napětí sinusového průběhu s frekvencí  $f = 50 \text{ kHz}$ , jeho velikost a velikost fázového posunutí.  $R = 460 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 20 \text{ pF}$ . Zakreslete jeho útlumovou a fázovou charakteristiku.



obr. č. 5.34.

Řešení: Napěťový přenos dvojbranu se vypočte z poměru výstupního a vstupního napětí. Budeme postupovat na základě komplexní symbolické metody.

Napětí  $\hat{U}_2$ :

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Napěťový přenos je tedy:

$$\hat{A} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{R}{\omega C} \cdot j}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{R^2 \omega C + j \cdot R}{R^2 \omega C + \frac{1}{\omega C}} = R \cdot \frac{RC\omega + j}{R^2 \omega C + \frac{1}{\omega C}}.$$

Pro velikost napěťového přenosu:

$$A = |\hat{A}| = R \cdot \sqrt{\frac{R^2 C^2 \omega^2 + 1}{\left(R^2 \omega C + \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{2,89}{\sqrt{1+8,35}} \approx 0,945.$$

Velikost napěťového přenosu v decibelech:

$$a = 20 \log A = 20 \log (0,945) \text{ dB} = -0,49 \text{ dB}.$$

Velikost fázového posunutí:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}} = \frac{\frac{R}{\omega C}}{\frac{R^2 \omega C + \frac{1}{\omega C}}{\omega C}} = \frac{1}{R^2 \omega C + \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{2,89} \approx 0,346 \Rightarrow \varphi \approx 19^\circ.$$

Pro zjednodušení zápisu zavádíme časovou konstantu  $\tau$ , mezní úhlovou frekvenci a mezní frekvenci.

Časová konstanta obvodu RC:  $\tau = R \cdot C$

$$\text{Mezní úhlová frekvence: } \omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R \cdot C}.$$

$$\text{Mezní frekvence je pak: } f_0 = \frac{1}{2\pi \tau} = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 17,3 \cdot 10^3 \text{ Hz}.$$

Vztah pro napěťový přenos pak přejde do tvaru:

$$A = \frac{\frac{f}{f_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}.$$

A vztah pro fázové posunutí přejde do tvaru:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega RC} = \frac{f_0}{f}.$$

Charakteristiky zmíněného RC článku sestrojíme stejným způsobem jako v předešlém příkladě:

a) pro  $f \ll f_0$ :  $A$  se blíží k 0, napěťový přenos je téměř nulový ( $U_2 \approx 0$ ) a  $\varphi$  se blíží k  $90^\circ$ .

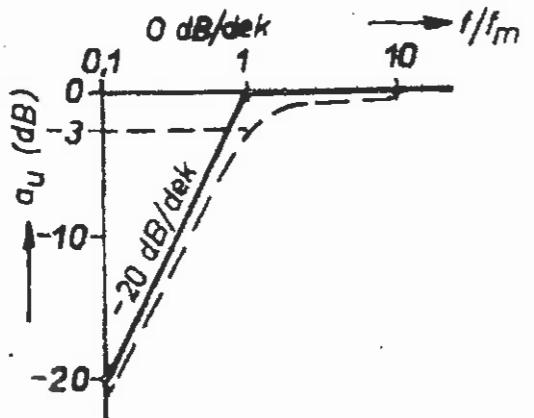
$$\text{speciálně pro } \frac{f}{f_0} = 0,1; \quad a = 20 \log \frac{0,1}{\sqrt{1+0,1^2}} \text{ dB} \approx -20 \text{ dB}; \quad \varphi = \arctg 10 \approx 84^\circ.$$

$$\text{b) pro } f = f_0: \quad A = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}; \quad \varphi = \arctg 1 = 45^\circ.$$

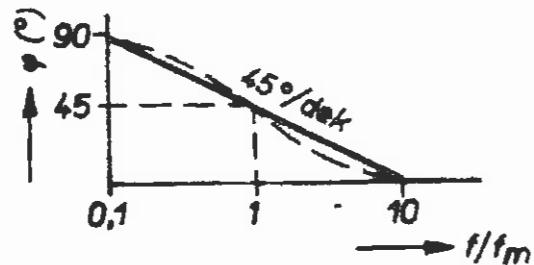
c) pro  $f \gg f_0$ :  $\varphi$  se blíží k  $0^\circ$ . Napěťový přenos je maximální.

$$\text{speciálně pro } \frac{f}{f_0} = 10; \quad a = 20 \log \frac{10}{\sqrt{1+10^2}} \text{ dB} \approx 0 \text{ dB}; \quad \varphi = \arctg 0,1 \approx 6^\circ.$$

Nyní již můžeme nakreslit přibližnou útlumovou charakteristiku (obr. č. 5.35) a fázovou charakteristiku (obr. č. 5.36).



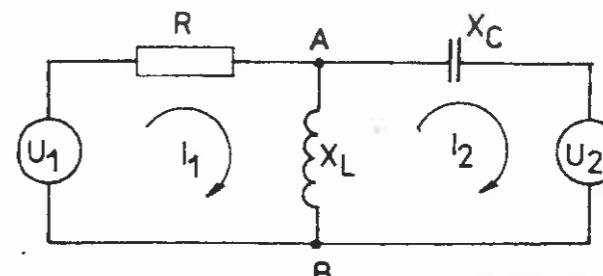
obr. č. 5.35



obr. č. 5.36.

### PŘÍKLAD 5.21:

Obvod nakreslený na obr. č. 5.37. je napájen dvěma zdroji s napětím  $10 \text{ V}$ . Napětí zdrojů jsou vůči sobě posunuta o  $90^\circ$ . Určete velikost a fázi napěti mezi body A a B, jsou-li dány parametry obvodu:  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $X_L = 15 \Omega$ ,  $X_C = 5 \Omega$ ,  $\hat{U}_2 = -j. 10 \text{ V}$ .



obr. č. 5.37

**Řešení:** Máme určit  $U_{AB}$  a  $\varphi_{AB}$ . Výpočet budeme provádět komplexní symbolickou metodou při použití metody smyčkových proudů.

Napětí  $\hat{U}_1$  položíme do reálné osy. Zvolíme směry proudů ve smyčkách (viz obr. č. 5.37) a pro smyčkové proudy  $I_1$  a  $I_2$  lze psát rovnice:

$$U_1 = R\hat{I}_1 + jX_L(\hat{I}_1 - \hat{I}_2),$$

$$-jU_2 = -jX_C\hat{I}_2 + jX_L(\hat{I}_2 - \hat{I}_1).$$

a po úpravě:

$$U_1 = (R + jX_L)\hat{I}_1 - jX_L\hat{I}_2,$$

$$-jU_2 = -jX_L\hat{I}_1 + (-jX_C + jX_L)\hat{I}_2.$$

po dosazení parametrů obvodu:

$$10 = (10 + j15)\hat{I}_1 - j15\hat{I}_2,$$

$$-j10 = -j15\hat{I}_1 + (-j5 + j15)\hat{I}_2.$$

Řešením této soustavy dostaneme  $\hat{I}_1$  a  $\hat{I}_2$ . Nejprve vypočteme determinant soustavy:

$$D_S = \begin{vmatrix} 10 + j15 & -j15 \\ -j15 & j10 \end{vmatrix} = (10 + j15)j10 - j^2 15^2 = 75 + j100.$$

Determinant pro  $\hat{I}_1$ :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -j15 \\ -j10 & j10 \end{vmatrix} = j100 - j^2 \cdot 10 \cdot 15 = 150 + j100.$$

Proud  $\hat{I}_1$ :  $\hat{I}_1 = \frac{D_1}{D_s} = \frac{150+j100}{75+j100} = \frac{21250-j7500}{15625} A = (1,36-j0,48) A$ .

v exponenciálním tvaru:

$$|\hat{I}_1| = \sqrt{1,36^2 + 0,48^2} A = 1,45 A,$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(-\frac{0,48}{1,36}\right) = -19^\circ 30',$$

$$\hat{I}_1 = 1,45 e^{-j19^\circ 30'} A.$$

Determinant pro  $\hat{I}_2$ :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10+j15 & 10 \\ -j15 & -j10 \end{vmatrix} = (10+j15)(-j10) + j15 \cdot 10 = 150+j50.$$

Proud  $\hat{I}_2$ :  $\hat{I}_2 = \frac{D_2}{D_s} = \frac{150+j50}{75+j100} A = (1,04-j0,72) A$ .

Po přepsání do exponenciálního tvaru:

$$|\hat{I}_2| = \sqrt{1,04^2 + 0,72^2} A = 1,26 A,$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(-\frac{0,72}{1,04}\right) = -34^\circ 45',$$

$$\hat{I}_2 = 1,26 e^{-j34^\circ 45'} A.$$

Napětí mezi body A a B:

$$\hat{U}_{AB} = j \cdot X_L \cdot (\hat{I}_1 - \hat{I}_2) = j \cdot 15 \cdot (1,36-j0,48 - (1,04-j0,72)) V = (-3,6+j4,8) V.$$

Velikost napětí  $U_{AB}$ :

$$U_{AB} = |\hat{U}_{AB}| = \sqrt{3,6^2 + 4,8^2} V = 6V.$$

Jeho fázový posun:

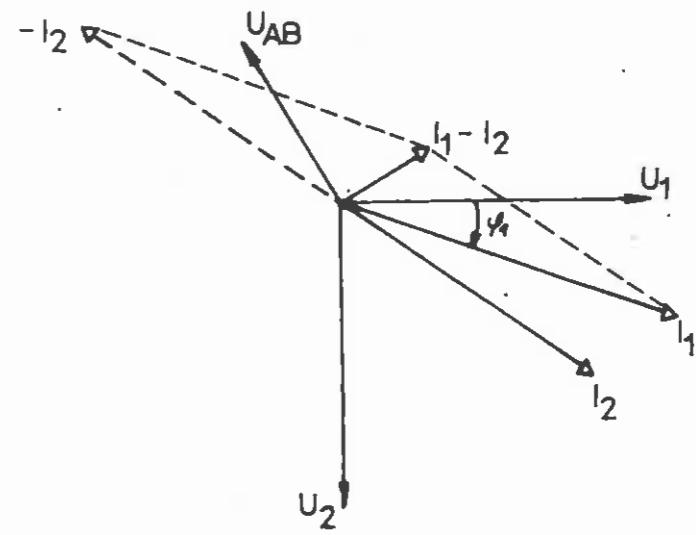
$$\varphi = \arctg\left(-\frac{4,8}{3,6}\right) = (180^\circ + 53^\circ 10') = 126^\circ 50'.$$

Napětí ještě zapíšeme v exponenciálním tvaru:

$$\hat{U}_{AB} = 6 \cdot e^{j126^\circ 50'} V.$$

Úplný fázový diagram je nakreslen na obr. č. 5.38.

Z diagramu vidíme, že napětí mezi body A a B předbíhá proud  $\hat{I}_1 - \hat{I}_2$  o  $90^\circ$ , což nám potvrzuje správnost výpočtu, protože mezi body A a B je zapojena indukčnost [9].



obr. č. 5.38

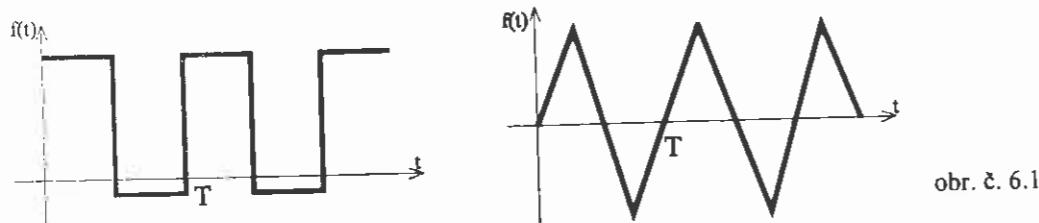
## 6. Fourierova harmonická analýza

### periodických signálů

Pro matematické vyjádření harmonických střídavých proudů (napětí) používáme vztahy:  $i = I_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ ,  $u = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ .

Místo funkce sinus lze použít též funkci kosinus. Časové průběhy mohou být i jiného typu, pokud jsou však periodické, lze je vyjádřit matematicky součtem harmonických funkcí [3].

Z matematické analýzy je známa definice periodické funkce:  $f(t)$  je periodická, se základní periodou  $T$ , jestliže pro libovolný čas  $t$  platí  $f(t) = f(t + kT)$ , kde  $k$  je libovolné celé číslo.  $T$  je nejmenší časový interval, splňující podmíinku periodicity. Má-li funkce základní periodu  $T$ , je periodou také  $k \cdot T$ . Příkladem periodických funkcí jsou již výše zmínované funkce sinus a kosinus. Mezi periodické funkce patří dle definice např. též funkce  $f(t)$  s průběhy vyznačenými na obr. č. 6.1.



Každou periodickou funkci lze nahradit součtem řady harmonických funkcí následovně:

$$f(t) = y = C_0 + C_1 \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + C_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t + \varphi_2) + C_3 \cdot \sin(3\omega \cdot t + \varphi_3) + \dots + C_K \cdot \sin(k\omega \cdot t + \varphi_K) \quad (48)$$

$C_0$  představuje neperiodickou (stejnosměrnou) složku, ostatní koeficienty  $C_i$ , kde i počíná jedničkou, jsou amplitudy harmonických složek.

Frekvence jednotlivých harmonických funkcí (tzv. výšší harmonické) jsou rovny celistvému násobku určité základní frekvence. Obecně je tato řada (Fourierův rozvoj) nekonečná. Amplitidy v řadě klesají; pro praxi tak stačí většinou pouze prvních několik členů. Řadu lze účelně rozdělit na složky sinové a kosinové následujícím postupem.

Na každý člen v (48), s výjimkou  $C_0$ , aplikujeme součtový vzorec (49):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (49)$$

Zápis funkce  $f(t)$  tak přejde do tvaru (50):

$$f(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega \cdot t) \cos(\varphi_1) + C_1 \sin(\varphi_1) \cos(\omega \cdot t) + C_2 \sin(2\omega \cdot t) \cos(\varphi_2) + C_2 \sin(\varphi_2) \cos(2\omega \cdot t) + C_3 \cdot \sin(3\omega \cdot t) \cos(\varphi_3) + C_3 \cdot \sin(\varphi_3) \cos(3\omega \cdot t) + \dots + C_K \cdot \sin(k\omega \cdot t) \cos(\varphi_K) + C_K \cdot \sin(\varphi_K) \cos(k\omega \cdot t) + \dots \quad (50)$$

V (50) označíme:

$$C_1 \cos(\varphi_1) = A_1,$$

$$C_1 \sin(\varphi_1) = B_1,$$

$$C_2 \cos(\varphi_2) = A_2,$$

$$C_2 \sin(\varphi_2) = B_2, \text{ atd.}$$

Rozvoj funkce  $f(t)$  z (50) tak přejde do konečného tvaru (51):

$$f(t) = C_0 + A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + B_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + A_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + B_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + A_3 \cdot \sin(3\omega \cdot t) + B_3 \cdot \cos(3\omega \cdot t) + \dots + A_K \cdot \sin(k\omega \cdot t) + B_K \cdot \cos(k\omega \cdot t) + \dots \quad (51)$$

Tato řada je opět nekonečná, u sinových složek má koeficienty  $A_1, A_2, \dots$  a u kosinových složek pak koeficienty  $B_1, B_2, \dots$ . Tyto koeficienty  $A_i$  a  $B_i$  opět se vzrůstajícím i klesají.

Pro periodické funkce se používá třídění na:

sudé:  $f(t) = f(-t)$  ..... např. obdélníkový, trojúhelníkový signál;

liché:  $f(t) = -f(-t)$  ..... např. pilový signál.

Graf sudé funkce je symetrický podle zvolené svislé osy, graf liché funkce je symetrický podle zvoleného počátku [3].

Provést harmonickou (Fourierovu) analýzu periodické funkce znamená nalézt koeficienty  $C_0, B_1, B_2, B_3, \dots, B_K, \dots$  pro složky sudé,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_K, \dots$  pro složky liché.

Postup odvození jednotlivých koeficientů si ukazovat nebudeme, lze jej nalézt v literatuře [3] a je i obsahem přednášek na VŠ.

Pro jednotlivé koeficienty  $C_0$ ,  $A_k$  a  $B_k$  nekonečné řady (51) platí:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt. \end{aligned} \quad (52)$$

$T$  je perioda,  $k$  je celé číslo, počínaje jedničkou.

Názorné použití harmonické Fourierovy analýzy bude v dalším předvedeno na příkladech.

POZN.: Znalost Fourierova rozvoje dává pochopit, jak spolu souvisí zkreslení signálu a vlastnosti dvojbranu (viz. kapitola č.5), kterým signál prochází. Ten může být ovlivněn např.:

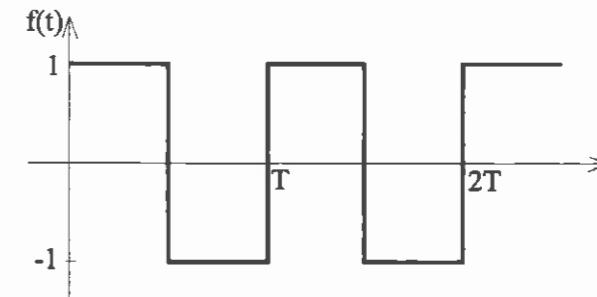
- 1) úzkou šírkou propustného pásma dvojbranu: u neharmonických periodických průběhů omezuje nižší i vyšší harmonické, čímž se změní tvar výstupního signálu, dojde tak k jeho zkreslení,
- 2) bude-li dvojbranu vykazovat v určité oblasti charakteristik nelinearitu, téměř vždy se to projeví zvýšením počtu harmonických frekvencí – tedy opět změnou tvaru výstupního signálu a tedy jeho zkreslení.

### PŘÍKLAD 6.1:

Proveďte Fourierův rozvoj obdélníkového průběhu funkce  $f(t)$  z obr. č. 6.2., kde  $f(t) = 1$  pro intervaly  $(0, \tau)$ ,  $(2\tau, 3\tau)$ , ...

$$f(t) = 0 \text{ pro } k\tau$$

$$f(t) = -1 \text{ pro intervaly } (\tau, 2\tau), (3\tau, 4\tau), \dots$$



obr. č. 6.2

Řešení: Provést Fourierův rozvoj fce  $f(t)$  znamená najít všechny koeficienty  $C_0$ ,  $A_k$  a  $B_k$ , kde  $k$  je celé číslo, počínaje jedničkou.

Nejprve určíme  $C_0$ :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^\tau 1 dt + \frac{1}{T} \int_\tau^{2\tau} (-1) dt = \frac{1}{T} (\tau + \tau - 2\tau) = 0.$$

Jelikož vychází  $C_0 = 0$ , bude výsledný graf symetrický podle osy x, což je v souladu s obr. č. 6.2.

Dále určíme koeficienty  $A_k$ :

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left( \int_0^\tau 1 \sin(k\omega t) dt + \int_\tau^{2\tau} (-1) \sin(k\omega t) dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left( \left[ -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^\tau - \left[ -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} \right]_{\tau}^{2\tau} \right) = \frac{2}{k\omega T} (\cos 2\tau k\omega - 2 \cos \tau k\omega + \cos 0). \end{aligned}$$

Jelikož  $\tau = \frac{T}{2}$ , lze  $A_k$  přepsat jako:

$$A_k = \frac{2}{k\omega T} \left( \cos k\omega T - 2 \cos \frac{T}{2} k\omega + 1 \right).$$

Dále již musíme uvažovat sudost či lichost  $k$ .

Pro liché  $k$ :

$$A_k = \frac{2}{k\omega T} (1 + 1 + 2) = \frac{8}{k\omega T}.$$

Pro sudé  $k$ :  $A_K = \frac{2}{k\omega T} (1+1-2) = 0$ .

Ještě určíme koeficienty  $B_K$ :

$$\begin{aligned} B_K &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left( \int_0^{\tau} 1 \cos(k\omega t) dt + \int_{\tau}^{2\tau} (-1) \cos(k\omega t) dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left( \left[ \frac{1}{k\omega} \sin(k\omega t) \right]_0^{\tau} + \left[ -\frac{1}{k\omega} \sin(k\omega t) \right]_{\tau}^{2\tau} \right) = \frac{2}{k\omega T} \left( \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \sin 0 - \sin\left(k \frac{2\pi}{T} T\right) + \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{2}{k\omega T} \cdot (0 - 0 - 0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Koeficienty  $B_K$  jsou tedy rovny nule pro jakékoli  $k$ .

Nyní již můžeme obdélníkové kmity nahradit Fourierovou řadou  $f(t)$ :

$$f(t) = 0 + 0 + \frac{8}{1\omega T} \sin(\omega t) + 0 + \frac{8}{3\omega T} \sin(3\omega t) + 0 + \frac{8}{5\omega T} \sin(5\omega t) + 0 + \frac{8}{7\omega T} \sin(7\omega t) + \dots$$

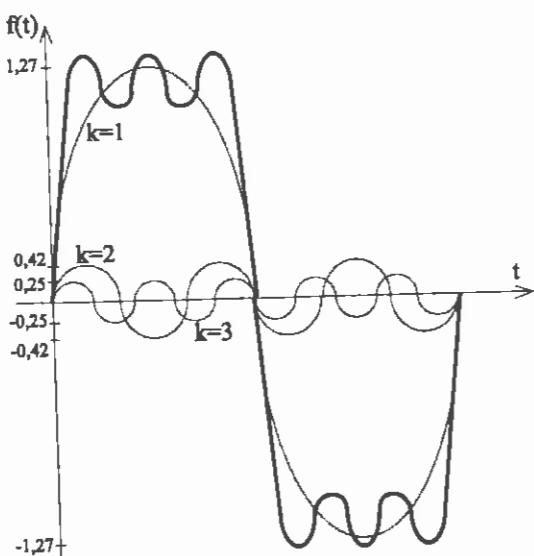
Po krátké úpravě lze fci  $f(t)$  zapsat pomocí sumičního vzorce:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\omega t).$$

Výraz  $(2k-1)$  v sumě vybírá pouze liché  $k$ - násobky.

Po číselném dosazení za  $k$  do prvních třech členů sumy nám pro  $f(t)$  vychází:  $f(t) = 1,27 \sin(\omega t) + 0,42 \sin(3\omega t) + 0,25 \sin(5\omega t) + \dots$

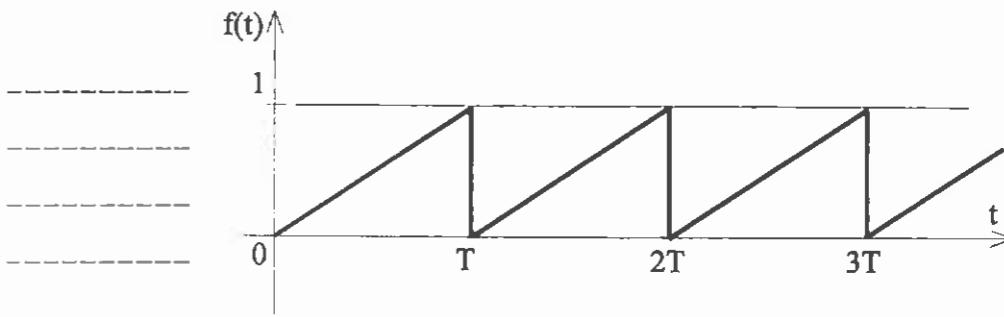
Grafické znázornění výsledné fce  $f(t)$ , získané složením prvních třech harmonických funkcí, je spolu s nimi na obr. č. 6.3.



obr. č. 6.3

### PŘÍKLAD 6.2:

Proveďte rozklad pilovitých kmitů s periodou  $T$ , znázorněných na obr. č. 6.4.



obr. č. 6.4

Řešení: Jde o provedení Fourierovy analýzy funkce  $f(t)$ , kterou lze vzhledem k obr. č. 6.4. vyjádřit v jednotlivých intervalech, kde je rostoucí, jako:  $f(t) = \frac{t}{T}$ , kde  $T$  je perioda. Protože jde o periodickou funkci, omezíme se pouze na interval od 0 do  $T$ , včetně hranic.

Provést Fourierův rozvoj fce  $f(t)$  znamená najít všechny koeficienty  $C_0$ ,  $A_K$  a  $B_K$ , kde  $k$  je celé číslo, počínaje jedničkou.

Nejprve určíme  $C_0$ :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{t}{T} dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{1}{T^2} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{1}{T^2} \cdot \left( \frac{T^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Dále určíme koeficienty  $A_K$ :

$$A_K = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T^2} \int_0^T t \sin(k\omega t) dt.$$

Uvedený integrál vypočteme metodou per partes, kdy:

$$f = t, \quad f' = 1,$$

$$g' = \sin(k\omega t), \quad g = -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T t \sin(k\omega t) dt &= \left[ t \cdot \left( -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} \right) \right]_0^T - \int_0^T -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} dt = \left[ t \cdot \left( -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} \right) \right]_0^T + \\ &+ \frac{1}{k^2 \omega^2} \left[ \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^T = \left( -T \cdot \frac{\cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \cdot \frac{\cos(k \cdot \omega \cdot 0)}{k\omega} \right) + \frac{1}{k^2 \omega^2} \cdot \left( \frac{\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k\omega} - \frac{\sin 0}{k\omega} \right) = \\ &= -\frac{T^2}{2k\pi} + 0 + \frac{1}{k^2 \omega^2} \cdot 0 = -\frac{T^2}{2k\pi} \end{aligned}$$

A tudíž:

$$A_K = \frac{2}{T^2} \cdot \left( -\frac{T^2}{2k\pi} \right) = -\frac{1}{k\pi}.$$

Ještě spočteme koeficienty  $B_K$ :

$$B_K = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T^2} \cdot \int_0^T t \cos(k\omega t) dt.$$

vyjádřený integrál vyřešíme opět metodou per partes.

$$f = t, \quad f' = 1,$$

$$g' = \cos(k\omega t), \quad g = \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T t \cos(k\omega t) dt &= \left[ t \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^T - \frac{1}{k\omega} \int_0^T \sin(k\omega t) dt = \left[ t \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^T + \frac{1}{k\omega} \left[ \frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^T = \\ &= \left( T \cdot \frac{\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k\omega} - 0 \cdot \frac{\sin 0}{k\omega} \right) + \frac{1}{k\omega} \left( \frac{\cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k\omega} - \frac{\cos 0}{k\omega} \right) = 0 + \frac{1}{k\omega} \left( \frac{1}{k\omega} - \frac{1}{k\omega} \right) = 0 \end{aligned}$$

Z čehož pro  $B_K$  vyplývá:

$$B_K = \frac{2}{T^2} \cdot 0 = 0.$$

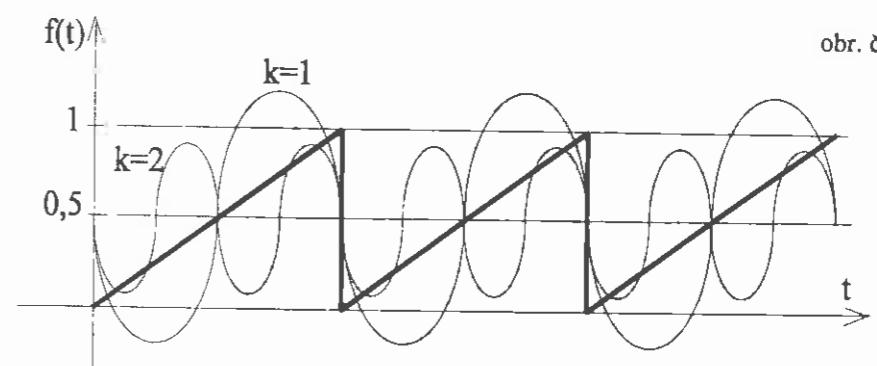
Nyní již můžeme vyjádřit fci  $f(t)$  ve formě nekonečné řady:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{1}{k\pi} \cdot \sin(k\omega t) \right) + 0 \cdot \cos(k\omega t) \right] = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k\pi}.$$

Po číselném dosazení za  $k$  do prvních třech členů sumy nám pro  $f(t)$

vychází: 
$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(\omega t)}{\pi} - \frac{\sin(2\omega t)}{\pi} - \frac{\sin(3\omega t)}{\pi} - \dots$$

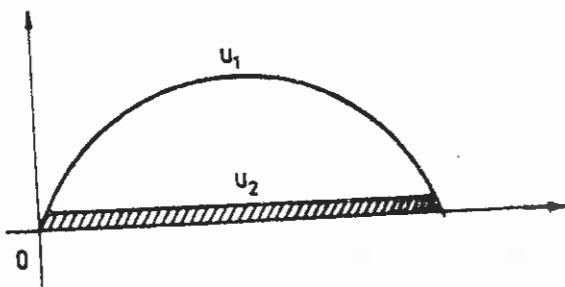
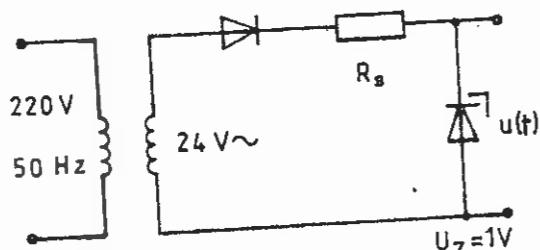
Grafické znázornění výsledné funkce  $f(t)$ , získané složením prvních třech harmonických funkcí, je spolu s nimi na obr. č. 6.5.



obr. č. 6.5.

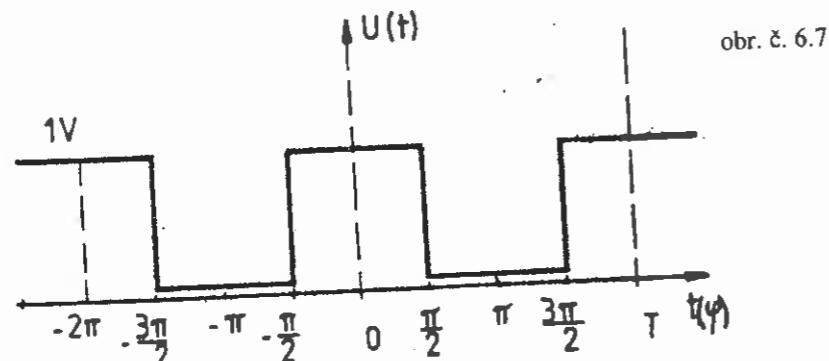
PŘÍKLAD 6.3:

Určete časový průběh napětí  $u(t)$  na výstupu usměrňovače se Zenerovou diodou z obr. č. 6.6, najděte amplitudy harmonických složek.



obr. č. 6.6.

Řešení: Průběh napětí z obr. č. 6.6. nahradíme obdélníkovým průběhem (viz obr. č. 6.7): počátek času umístíme doprostřed obdélníku.



Jelikož

$f = 50 \text{ Hz}$ , je perioda  $T = 0,02 \text{ s}$ . Nahradíme  $\Omega \cdot t = x$  a zjistíme, že funkce je sudá. Její rozvoj nebude tedy obsahovat sinové složky a bude mít tvar:

$$u(x) = U_0 + U_1 \cos x + U_2 \cos 2x + \dots$$

Nejdříve hledáme  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx$$

Integraci provedeme pro meze  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ; jinde je  $u(x)=0$ :

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}.$$

Ještě určíme  $n$ -té amplitudy  $U_n$  pro harmonickou funkci s frekvencí  $f_n = n \cdot 50 \text{ Hz}$ :

$$U_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ = \frac{1}{\pi n} \left( \sin n \frac{\pi}{2} - \sin(-n \frac{\pi}{2}) \right) = \frac{2}{\pi n} \sin(n \frac{\pi}{2})$$

Nyní již můžeme vypočítat amplitudy harmonických funkcí. Omezíme se na prvních deset z nich [3].

$$U_M = 1 \text{ V} \\ U_0 = 0,5 \text{ V} = 0,5 U_M$$

$$U_1 = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} V = 0,636 V$$

$$U_2 = \frac{2}{2\pi} \sin 2 \frac{\pi}{2} V = 0 V$$

$$U_3 = \frac{2}{3\pi} \sin 3 \frac{\pi}{2} V = -0,212 V$$

$$U_4 = \frac{2}{4\pi} \sin 4 \frac{\pi}{2} V = 0 V$$

$$U_5 = \frac{2}{5\pi} \sin 5 \frac{\pi}{2} V = 0,169 V$$

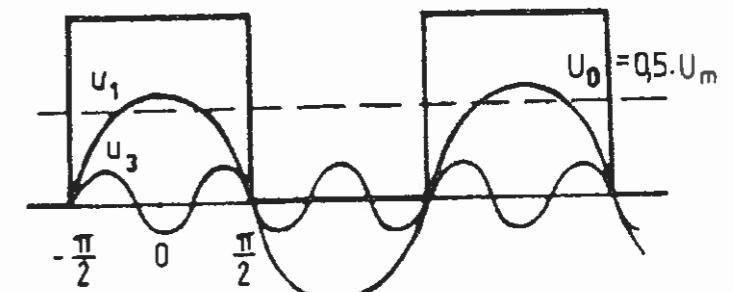
$$U_6 = \frac{2}{6\pi} \sin 6 \frac{\pi}{2} V = 0 V$$

$$U_7 = \frac{2}{7\pi} \sin 7 \frac{\pi}{2} V = -0,091 V$$

$$U_8 = \frac{2}{8\pi} \sin 8 \frac{\pi}{2} V = 0 V$$

$$U_9 = \frac{2}{9\pi} \sin 9 \frac{\pi}{2} V = -0,071 V$$

$$U_{10} = \frac{2}{10\pi} \sin 10 \frac{\pi}{2} V = 0 V$$

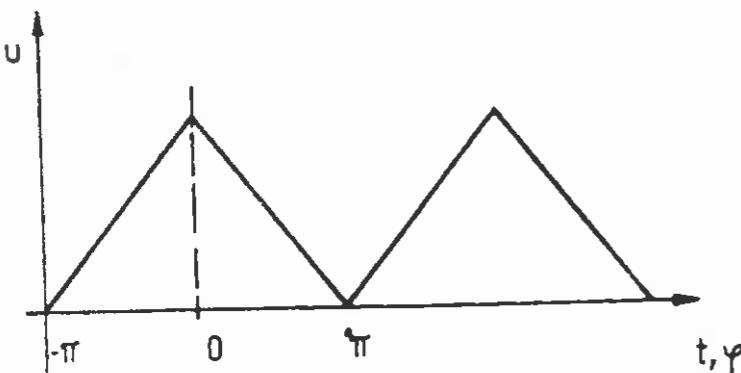


obr. č. 6.8.

Obdélníkový signál obsahuje pouze liché harmonické složky s frekvencemi  $f_1 = 50 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = (3 \cdot 50) \text{ Hz} = 150 \text{ Hz}$ ,  $f_5 = (5 \cdot 50) \text{ Hz} = 250 \text{ Hz}$  atd. Analýza obdélníkového signálu je provedena na obr. č. 6.8.

### PŘÍKLAD 6.4:

Určete prvních pět amplitud harmonického rozvoje funkce pro trojúhelníkový signál z obr. č. 6.9.



obr. č. 6.9

**Řešení:** Funkce je sudá, tudíž Fourierův rozvoj nebude obsahovat sinové složky, je periodická, s periodou  $T = 2\pi$ .

Použijeme tudíž rozvoj ve tvaru:

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\Omega t) + U_2 \cos(2\Omega t) + \dots$$

Pro  $x$  v intervalu od  $-\pi$  do  $0$  je  $u(x) = U_M + \frac{U_M}{\pi}x$ .

Pro  $x$  v intervalu od  $0$  do  $\pi$  je  $u(x) = U_M - \frac{U_M}{\pi}x$ .

Určíme  $U_0$ :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left( U_M + \frac{U_M}{\pi}x \right) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( U_M - \frac{U_M}{\pi}x \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{U_M}{2}\pi + \frac{U_M}{2}\pi \right) = \frac{U_M}{2} \end{aligned}$$

Dále určíme amplitudu  $n$ - té harmonické složky:

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left( U_M + \frac{U_M}{\pi}x \right) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( U_M - \frac{U_M}{\pi}x \right) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 U_M \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_M \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{U_M}{\pi}x \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_M}{\pi}x \cos nx dx = \\ &= \frac{U_M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \frac{U_M}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx - \frac{U_M}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \end{aligned}$$

Výpočet integrálů:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Neurčitý integrál vypočítáme metodou per partes:

$$f = x, \quad f' = 1,$$

$$g' = \cos nx, \quad g = \frac{\sin nx}{n},$$

$$\int x \cos nx dx = \frac{x}{n} \sin nx - \int \frac{1}{n} \sin nx dx = \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Výpočet určitých integrálů (dosazení mezí do integrálu neurčitého):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx &= \left[ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^0 = \frac{0}{n} \cdot \sin n \cdot 0 + \frac{1}{n^2} \cdot \cos n \cdot 0 - \frac{-\pi}{n} \cdot \sin(-\pi) n - \\ &- \frac{1}{n^2} \cos(-\pi) n = 0 + \frac{1}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n = \frac{1}{n^2} \cdot [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos nx dx &= \left[ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{n} \cdot \sin n \cdot \pi + \frac{1}{n^2} \cdot \cos n \cdot \pi - \frac{0}{n} \cdot \sin 0 \cdot n - \frac{1}{n^2} \cos 0 \cdot n = \\ &= 0 + \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - 0 - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Amplituda  $n$ - té harmonické složky pak bude vypadat následovně:

$$U_N = \frac{U_M}{n^2 \pi^2} \cdot [1 - (-1)^n - (-1)^n + 1] = \frac{2 \cdot U_M}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n].$$

Prvních pět amplitud (za  $n$  dosadíme od 1 až do 5) bude:

$$U_1 = \frac{2 \cdot U_M}{\pi^2} [1 - (-1)] = \frac{4 \cdot U_M}{\pi^2} = 0,405 U_M$$

$$U_2 = 0$$

$$U_3 = \frac{4 \cdot U_M}{9 \cdot \pi^2} = 0,045 U_M$$

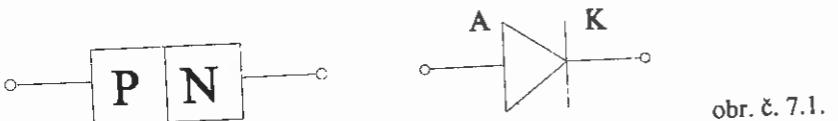
$$U_4 = 0$$

$$U_5 = \frac{4 \cdot U_M}{25 \cdot \pi^2} = 0,016 U_M$$

## 7. Základní el. polovodičové prvky

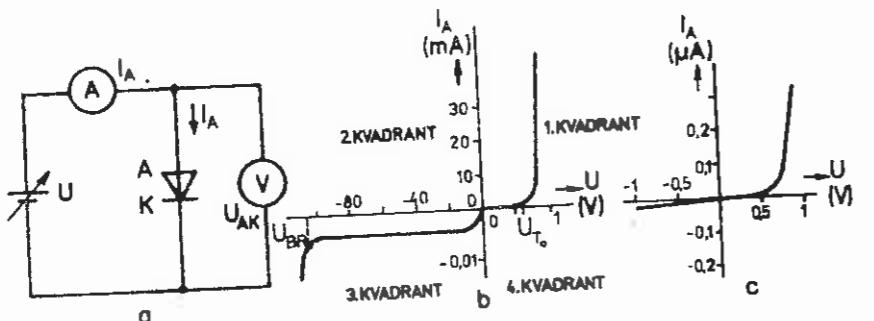
### Pоловодицова диода

Pоловодицова диода є двохполярна складова частина, яка використовується для своїх властивостей переходу PN. Її схематичний зображення на рис. 7.1.



obr. č. 7.1.

Електрод, позначений трохищем, називається анодом (A), інший електрод називається катодом (K). Підключення диоду до кола може реалізуватися в такому пропускному, чи зворотному напрямку. Вольт-амперна характеристика полівodiцової диоди в пропускному напрямку (1. квадрант) та в зворотному напрямку (3. квадрант) показана на рис. 7.2.b). На рис. 7.2.a) показано підключення, яке використовується для вимірювання цієї характеристики, а на рис. 7.2.c) показано детальний зображення поблизу початку.



obr. č. 7.2.

Прихідне напруження  $U_{T0}$  в 1. квадранті характеристики диоду відповідає дифузійному напруження на їх переході та залежить від матеріалу та температури. Вона може становити від декількох десятків мікроВольт.

В зворотному напрямку протікає по диоду дуже малий струм  $I_R$ . Якщо він дійде до певної величини  $U_{BR}$ , то відбувається різкий зростання струму та називається пріоритетом диоду.

Змінену характеристику можна замінити кривою з рівнянням:

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right), \quad (53)$$

де  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  та  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ .

У цьому рівнянні не враховано власний опір шляху переходу та проводів PN диоду, теоретична характеристика тоді не буде відповісти реальній і буде наблизитися.

На диоді відбувається переход PN до збиткам виконання. Тоді вводимо збитковий виконання як:

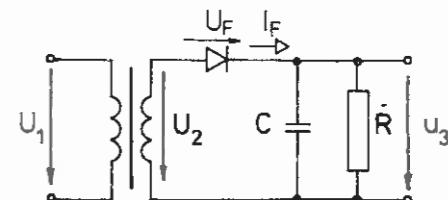
$$P_D = U_D \cdot I_D. \quad (54)$$

$U_D$  та  $I_D$  є напруженням та струмом на диоді в цьому випадку.

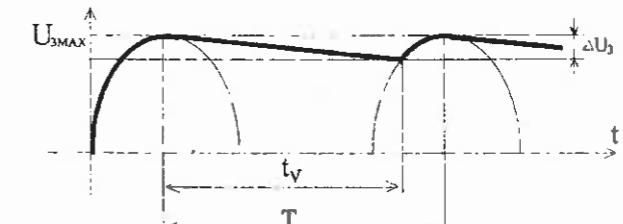
Половодицова диода має широке застосування в електроніці. З багатьох прикладів використання диодів виведемо лише кілька.

Диод на рис. 7.3 слугує як односторонній засувач. Стартове напруження на вході є на вихідному засуванням та його синусовий хід зміниться відповідно. Для видалення засування напруження використовують паралельно вихіду підключені фільтруючі конденсатори [12].

Характеристика ходу напруження на вихіді одностороннього засувача показана на рис. 7.4. Відмінна криві зображує хід напруження після видалення конденсатора. Невидалений хід представлюється лише двома піввlnами.



obr. č. 7.3.

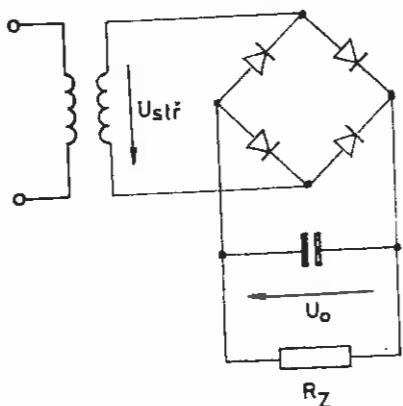


obr. č. 7.4.

T v obr. č. 7.4. představuje periodu,  $t_V$  je pak doba, za kterou napětí  $U_3$  klesne z maximální na minimální hodnotu. Rozdíl ( $\Delta U_3$ ) mezi maximálním a minimálním napětím se nazývá zvlnění. Zavádime ještě pojem činitel zvlnění  $\varphi$  jako poměr změny napětí výstupního ku změně napětí vstupního:  $\varphi = \frac{\Delta U_3}{\Delta U_2}$ . (55)

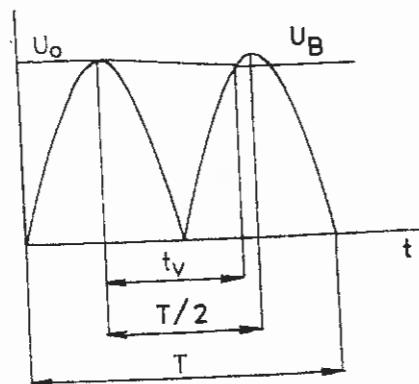
Lepšího usměrnění výstupního napětí dosáhneme pomocí čtyř diod, zapojených do tzv. Graetzova můstku dle obr. č. 7.5.

Jedná se o tzv. dvoucestný usměrňovač.



obr. č. 7.5.

Kondenzátor zapojený paralelně na výstup slouží opět k vyhlazení průběhu výstupního napětí. Průběh napětí při dvoucestném usměrnění je pak na obr. č. 7.6.



obr. č. 7.6.

Zvlnění výsledného signálu je při dvoucestném usměrnění menší než při jednocestném, tedy vyhlazení signálu je kvalitnější.

Vztahy platící mezi efektivním, středním a maximálním napětím:

$$\text{Napětí efektivní} \quad U_{ef} = \frac{U_{MAX}}{\sqrt{2}}. \quad (56)$$

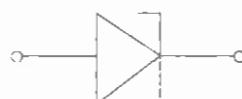
$$\text{Střední napětí při jednocestném usměrnění:} \quad U_{ST} = \frac{U_{MAX}}{\pi}. \quad (57)$$

$$\text{Střední napětí při dvoucestném usměrnění:} \quad U_{ST} = \frac{2 U_{MAX}}{\pi}. \quad (58)$$

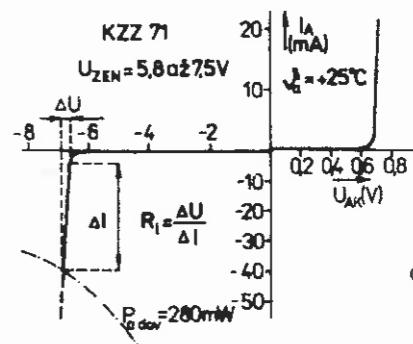
Diodu lze dále použít např. pro násobič střídavého napětí atd. Zvláště významné je použití tzv. **ZENEROVY DIODY** ke stabilizaci napětí.

Průběh napětí na Zenerově diodě je v propustném směru stejný jako u obyčejné usměrňovací diody. Ovšem v závěrném směru dochází (v tzv. oblasti stabilizace) k prudkému růstu zpětného proudu diody při téměř stále stejném napětí (nedestruktivní průraz přechodu P-N). Závěrný proud diodou přitom však nesmí překročit max. přípustnou mez. Popsaný děj se nazývá Zenerův jev.

Značka a voltampérová charakteristika Zenerovy diody jsou uvedeny v obr. č. 7.7. a obr. č. 7.8.



obr. č. 7.7.



obr. č. 7.8.

U Zenerovy diody se určuje tzv. diferenciální odpor  $R_{ZD}$ :

$$R_{ZD} = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (59)$$

Jeho velikost bývá řádově 1  $\Omega$ . Pro zjištění kvality stabilizace slouží tzv. stabilizační faktor (činitel stabilizace)  $S$ . Činitel stabilizace  $S$  je definován jako poměr relativní změny vstupního napětí k relativní

$$\text{změně napětí výstupního:} \quad S = \frac{\frac{\Delta U_1}{U_1}}{\frac{\Delta U_2}{U_2}}. \quad (60)$$

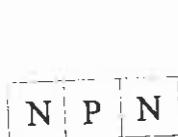
$U_1$  je napětí na vstupu stabilizátoru a  $U_2$  napětí na jeho výstupu.

Každou diodu lze nahradit náhradním zapojením, které představuje zdroj o určitém napětí  $U_0$  (většinou 0,6 - 0,9 V) se sériově připojeným odporem  $R_0$ , který představuje dynamický odpor diody. Tohoto náhradního zapojení diody se často využívá při výpočtech.

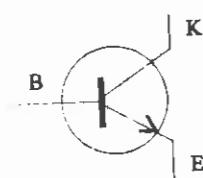
## TRANZISTOR

Dalším polovodičovým prvkem, mající široké uplatnění je bezesporu bipolární tranzistor. Složí většinou k zesilování, popř. spinání napětí a proudu. Skládá se ze dvou PN přechodů. Rozlišujeme 2 typy tranzistorů.

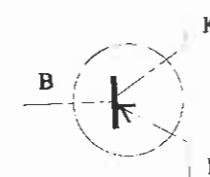
Na obr. č. 7.9. je tranzistor typu NPN a na obr. č. 7.10 je typ PNP.



obr. č. 7.9.

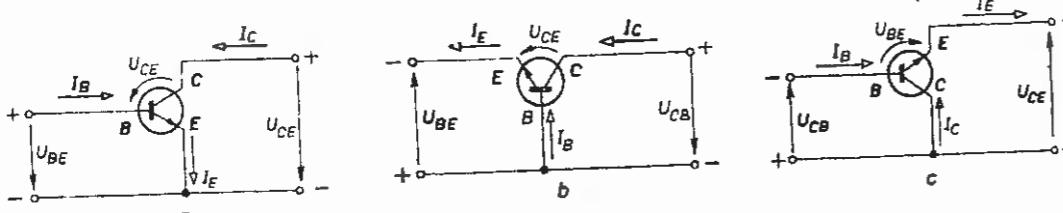


obr. č. 7.10.



B v obrázcích u tranzistorů znamená bázi, K kolektor, E pak emitor.

Zapojení tranzistoru je trojího typu. Na obr. č. 7.11.a) je zapojení tranzistoru se společným emitem, na obr. č. 7.11.b) pak zapojení se společnou bází a na obr. č. 7.11.c) pak zapojení se společným kolektorem [4].



obr. č. 7.11.

Pro konkrétní zapojení tranzistoru lze vynést několik typů charakteristik. Jejich průběhy si uvádět nebudeme, lze je nalézt v literatuře [12], resp. zjistit pro daný tranzistor měřením.

Pro ilustraci uvádíme přehled jednotlivých charakteristik pro zapojení se společným emitorem.

1) Vstupní charakteristika: udává závislost proudu bází ( $I_B$ ) na napětí přechodu báze - emitor ( $U_{BE}$ ). Z této charakteristiky lze určit stejnosměrný nebo diferenciální odpor tranzistoru.

Stejnosměrný vstupní odpor tranzistoru:

$$r_{vst} = \frac{U_{BE}}{I_B}. \quad (61)$$

Diferenciální (dynamický) odpor tranzistoru:

$$R_{vst} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}. \quad (62)$$

Přičemž platí, že  $r_{vst} > R_{vst}$ .

2) Výstupní charakteristika: udává závislost proudu kolektorem ( $I_C$ ) na napětí přechodu kolektor - emitor ( $U_{CE}$ ). Používáme ji většinou pro určení pracovního bodu tranzistoru. Pracovní bod tranzistoru je tak dán průsečkem zatěžovací přímky s výstupní charakteristikou tranzistoru.

3) Převodní charakteristika: udává závislost kolektorového proudu ( $I_C$ ) na proudu tekoucím bází ( $I_B$ ). Pomocí ní určujeme např. proudový zesilovací činitel  $h_{2IE} = \beta = \frac{I_C}{I_B}$ . (63)

a dynamický (diferenciální) zesilovací činitel  $h_{2le}$  tranzistoru:

$$h_{2le} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}. \quad (64)$$

Přičemž  $h_{2IE} > h_{2le}$ .

4) Závislost proudového zesílení na  $I_C$ .

5) Závislost proudu kolektoru jako funkce napětí na přechodu báze-emitor.

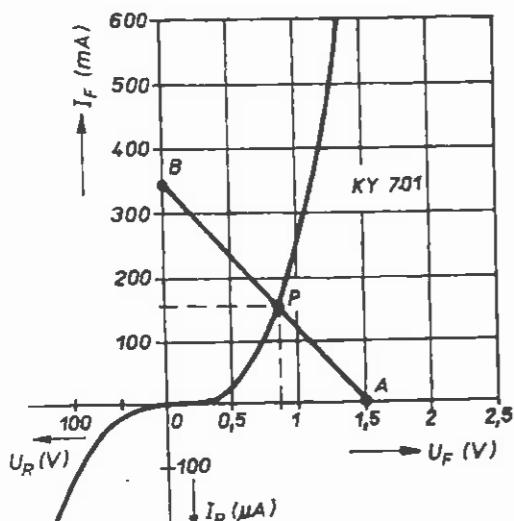
♦ Zapojení tranzistoru v obvodu může představovat tzv. zpětnou vazbu. Termín zpětná vazba obecně znamená, že veličiny výstupní ovlivňují veličiny vstupní. Rozeznáváme dvojí zpětnou vazbu:

a) kladná zpětná vazba - výstupní veličina vyvolává ve vstupních veličinách stejně změny, jí odpovídající

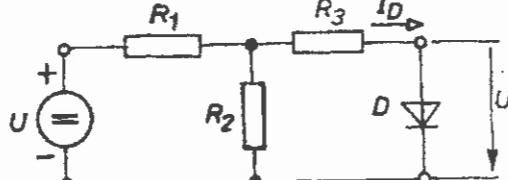
b) záporná zpětná vazba - výstupní veličiny ovlivňují vstupní veličiny opačným způsobem.

**PŘÍKLAD 7.1:**

Usměrňovací dioda KY701 (s voltampérovou charakteristikou na obr. č. 7.12.) je na obr. č. 7.13 připojena ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 2,5 \text{ V}$ . Určete klidovou polohu pracovního bodu P na voltampérové charakteristice diody.  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ .

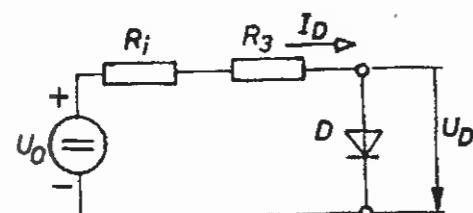


obr. č. 7.12.



obr. č. 7.13

**Řešení:** Použitím Theveninovy věty převedeme obvod z obr. č. 7.13 na náhradní zapojení na obr. č. 7.14.



obr. č. 7.14

$$U_0 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \left( 2,5 \cdot \frac{6}{4+6} \right) V = 1,5 V,$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 6}{4+6} \Omega = 2,4 \Omega.$$

Výsledný odpor v obvodu diody je:

$$R_i + R_3 = 2,4 \Omega + 2 \Omega = 4,4 \Omega.$$

Zatěžovací přímkou, odpovídající napětí  $U_0$  a odporu  $(R_i + R_3)$ , sestrojíme pomocí bodů A a B určených z rovnice obvodu:

$$U_0 = I_F \cdot (R_i + R_3) + U_D.$$

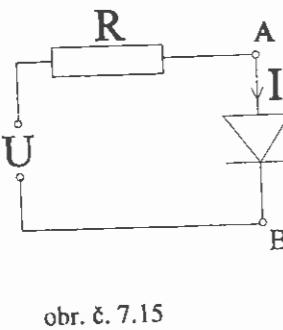
$$\text{Bod A: } I_F = 0 \Rightarrow U_F = U_0 = 1,5 \text{ V}.$$

$$\text{Bod B: } U_D = 0 \Rightarrow I_F = \frac{U_0}{R_i + R_3} = \frac{1,5}{4,4} A \doteq 0,34 A.$$

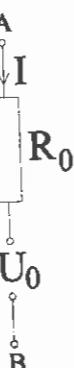
Průsečík zatěžovací přímky s voltampérovou charakteristikou diody určuje souřadnice bodu P ( $U_D = 0,9 \text{ V}$ ;  $I_D = 157 \text{ mA}$ ).

### PŘÍKLAD 7.2:

Dioda (v obvodu na obr. č. 7.15.) má být napájena přes sériový odpor  $R$  ze zdroje napětí  $U = 12,5$  V. Určete hodnotu odporu  $R$  tak, aby diodou tekly proud  $I = 10$  mA. Parametry náhradního obvodu diody na obr. č. 7.16 jsou  $U_0 = 0,7$  V;  $R_0 = 80 \Omega$ . Jaké napětí  $U_{AB}$  bude na diodě?



obr. č. 7.15



obr. č. 7.16

**Řešení:** Diodu, mající výstupní svorky A a B, lze nahradit náhradním obvodem, složeným z napětí  $U_0$  sériově spojeného s odporem  $R_0$  (viz obr. č. 7.16.). Jelikož napětí  $U_0$  náhradního obvodu diody působí proti napětí  $U$  připojeného k obvodu, lze pro proud  $I$ , tekoucí v obvodu, podle Ohmova zákona psát:

$$I = \frac{U - U_0}{R + R_0}.$$

Z vyjádřené rovnice pro proud lze zjistit velikost hledaného odporu  $R$ .

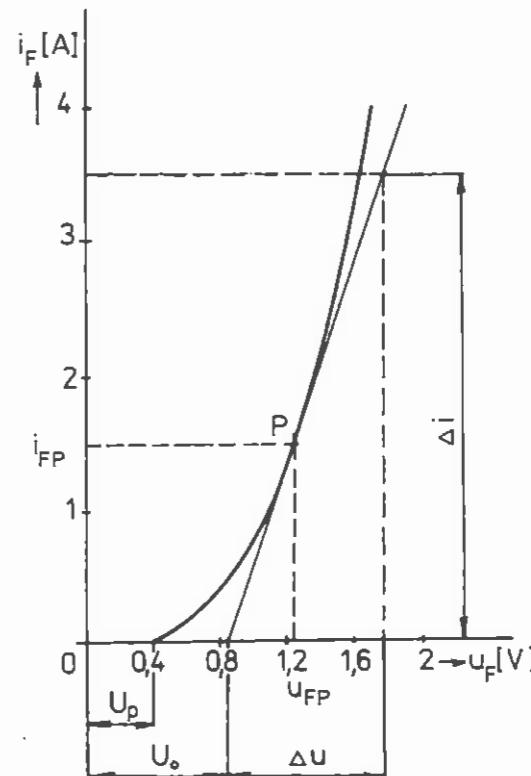
$$R = \frac{U - U_0}{I} - R_0 = \left( \frac{12,5 - 0,7}{0,01} - 80 \right) \Omega = 1100 \Omega$$

Napětí  $U_{AB}$  na diodě je pak rovno součtu napětí náhradního zapojení diody  $U_0$  a úbytku napětí na odporu  $R_0$ , jímž protéká proud  $I$ :

$$U_{AB} = U_{R0} + U_0 = I \cdot R_0 + U_0 = 0,8 \text{ V} + 0,7 \text{ V} = 1,5 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 7.3:

Křemíková dioda KY701 má voltampérovou charakteristiku v propustném směru vynesenou na obr. č. 7.17. Z charakteristiky odečtěte prahové napětí diody  $U_p$ . Určete stejnosměrný odpor  $R_{ss}$  diody v bodě P a parametry náhradního schéma diody  $U_0$  a  $R_d$  v bodě P.



obr. č. 7.17

**Řešení:** Velikost prahového napětí  $U_p$  a proud diodou v pracovním bodě P odečteme z charakteristiky:

$$U_p = 0,4 \text{ V} \quad \text{a} \quad i_{FP} = 1,5 \text{ A}.$$

Z charakteristiky odečteme ještě napětí odpovídající pracovnímu bodu P:

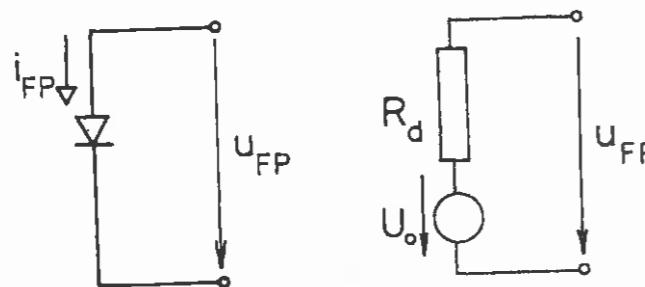
$$u_{FP} \doteq 1,25 \text{ V}.$$

Stejnosměrný odpor diody  $R_{ss}$  je pak definován jako:

$$R_{ss} = \frac{u_{FP}}{i_{FP}} \doteq \frac{1,25}{1,5} \Omega = 0,83 \Omega.$$

Chování diody v pracovním bodě P lze nahradit podle obr. č. 7.18, kde  $R_d$  je dynamický odpor diody, daný směrnicí tečny v bodě P.

$$R_d = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{1,78 - 0,85}{3,5} \Omega = 0,27 \Omega.$$

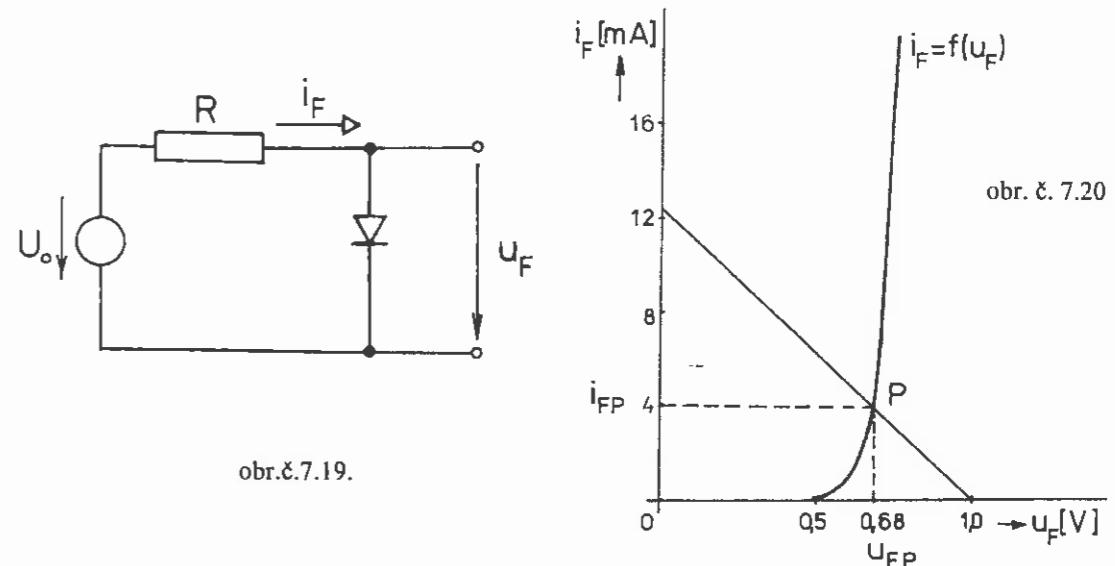


obr. č. 7.18

Velikost napětí  
 $U_0$  náhradního zdroje napětí odečteme z charakteristiky. Je dán  
 průsečíkem tečny v pracovním bodě P s osou  $u_F$ .  
 $U_0 = 0,85 \text{ V}$ .

#### PŘÍKLAD 7.4:

Na zdroj stejnosměrného napětí  $U_0 = 1 \text{ V}$  je přes odpor  $R = 80 \Omega$  pripojena křemíková dioda KA 228 (viz obr. č. 7.19), jejíž voltampérová charakteristika je na obr. č. 7.20. Určete pracovní bod P diody.



obr. č. 7.19.

obr. č. 7.20

**Řešení:** Našim úkolem je určit souřadnice  $u_{FP}$  a  $i_{FP}$  bodu P ve voltampérové charakteristice diody. Pro obvod na obr. č. 7.19 platí podle 2. Kirchhoffova zákona:

$$U_0 - R \cdot i_F - u_F = 0$$

kde  $U_0$  a  $R$  jsou pro daný obvod konstantní. Závislost upravíme tak, abyhom ji snadno mohli vynést do grafu charakteristiky diody:

$$i_F = -\frac{1}{R} \cdot u_F + \frac{U_0}{R}.$$

Jde o rovnici přímky se směrnicí  $-\frac{1}{R}$  a s úsekem na ose proudu

$$\frac{U_0}{R} = \frac{1}{80} \text{ A} = 12,5 \text{ mA}.$$

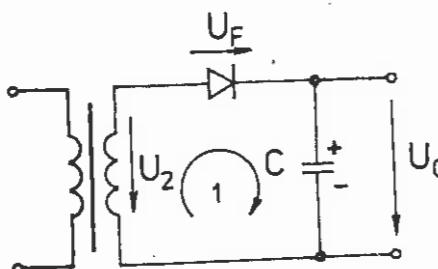
Přímku zakreslíme do voltampérové charakteristiky diody na obr. č. 7.20.

Průsečík zatěžovací přímky s charakteristikou  $i_F = f(u_F)$  je bod P, který vyhovuje obvodové rovnici a je bodem charakteristiky diody, je tedy řešením daného obvodu; pracovním bodem diody P:

$$i_{FP} = 4 \text{ mA}; u_{FP} = 0,68 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 7.5:

Určete efektivní hodnotu napětí  $U_2$  na sekundárním vinutí transformátoru, je-li napětí na výstupu nezatíženého jednocestného usměrňovače (zapojeného podle obr. č. 7.21)  $U_C = 12 \text{ V}$ . Na jaké závěrné napětí  $U_R$  (musí být dioda dimenzována? Úbytek napětí na diodě v propustném směru je  $U_F = 0,7 \text{ V}$ .



obr. č. 7.21

**Řešení:** Podle 2. Kirchhoffova zákona musí pro smyčku 1 v obvodu na obr. č. 7.21 platit:

$$U_2 - U_C - U_F = 0.$$

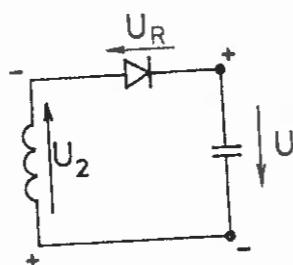
Protože kondenzátor se nabije na hodnotu  $U_C$ :

$$U_C = U_{2\max} - U_F,$$

je velikost  $U_2$  dána jako:

$$U_2 = \frac{U_C + U_F}{\sqrt{2}} = \frac{12 + 0,7}{\sqrt{2}} \text{ V} \doteq 9 \text{ V}.$$

Při průchodu kladné půlvlny napěti diodou se kondenzátor nabije na hodnotu napěti  $U_C$ . Není-li připojena zátěž na výstupu, udržuje se napěti na kapacitě konstantní.



obr. č. 7.22

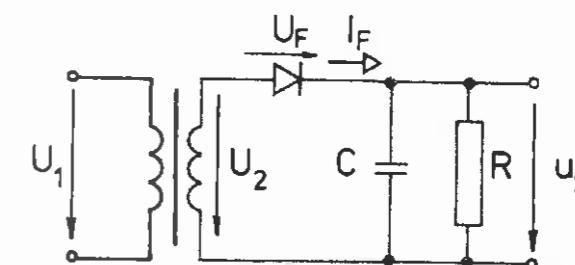
Při působení záporné půlvlny napěti bude dioda polarizována v závěrném směru a podle obr. č. 7.22 při průchodu maximem záporné půlvlny napěti bude dioda namáhána napětím  $U_R$ :

$$U_R = U_C + U_{2\max},$$

$$U_R = 2 U_{2\max} - U_F = 2\sqrt{2} U_2 - U_F = (2\sqrt{2} \cdot 9 - 0,7) \text{ V} \doteq 24,7 \text{ V}.$$

### PŘÍKLAD 7.6:

Určete, jak velké musí být napětí  $U_2$  na výstupu transformátoru v obr. č. 7.23. a jak velkou kapacitu  $C$  musíme zapojit na výstup usměrňovače, aby výstupní napěti v nezatíženém stavu bylo  $U_{3\max} = 25 \text{ V}$ . Při zatížení usměrňovače odporem  $R = 2,5 \text{ k}\Omega$  nesmí napětí na výstupu klesnout o více než  $p = 2 \%$ . Určete maximální hodnotu usměrněného proudu  $I_F$  diodou a závěrné napěti diody  $U_R$ , na které musí být dimenzována. Úbytek napětí na diodě v propustném směru je  $U_F = 0,7 \text{ V}$ . Frekvence zdroje  $U_1$  je  $f = 50 \text{ Hz}$ .



obr. č. 7.23

**Řešení:** Pro obvod na obr. č. 7.23. platí podle 2. Kirchhoffova zákona obvodová rovnice:

$$U_{2\max} - U_F - U_3 = 0.$$

Odtud pro maximální hodnotu napěti  $U_3$  platí:

$$U_{3\max} = U_{2\max} - U_F = \sqrt{2} U_2 - U_F.$$

A odtud pro napěti  $U_2$  vychází:

$$U_2 = \frac{U_{3\max} + U_F}{\sqrt{2}} = \frac{25 + 0,7}{\sqrt{2}} \text{ V} = 18,2 \text{ V}.$$

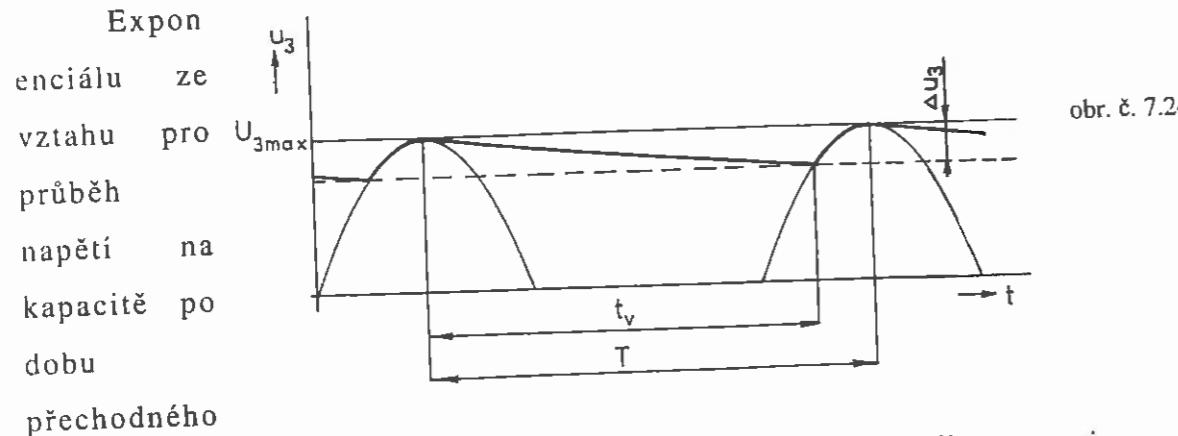
Při průchodu kladné půlvlny diodou se kondenzátor nabije na maximální hodnotu napěti  $U_{3\max}$ . V okamžiku, kdy napětí  $U_2$  po dosažení maxima začne klesat, bude dioda polarizována v závěrném směru a zdrojem proudu do zátěže  $R$  se po dobu uzavření diody stane kondenzátor  $C$ . Průběh napěti na kapacitě po dobu přechodného děje vybíjení je dán řešením diferenciální rovnice

$$U_3 = U_{3\max} \cdot e^{-\frac{t}{RC}},$$

kde  $RC = \tau$  je časová konstanta obvodu.

Průběh napětí  $u_3$  je na obr. č. 7.24. Doba  $t_v$ , po kterou probíhá vybíjení kondenzátoru, závisí na typu usměrňovače (jednocestný, dvojcestný) a na požadovaném zvlnění [10]. Pro malá zvlnění lze dobu vybíjení kondenzátoru  $t_v$  přibližně považovat za dobu periody  $T$  (pro jednocestný usměrňovač):

$$t_v \doteq T.$$



děje vybíjení lze pak nahradit prvními dvěma členy jejího rozvoje v mocninnou řadu podle

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

pak

$$u_3(t) = U_{3\max} \left(1 - \frac{t_v}{RC}\right) \quad t_v = T,$$

pak

$$\frac{T}{RC} = \frac{U_{3\max} - u_3}{U_{3\max}} = p.$$

Z tohoto vztahu vypočteme velikost kapacity pro požadované  $p$ :

$$C = \frac{T}{p \cdot R} = \frac{1}{f p R} = \frac{1}{50.2 \cdot 10^{-2} \cdot 2.5 \cdot 10^3} F = 400 \mu F.$$

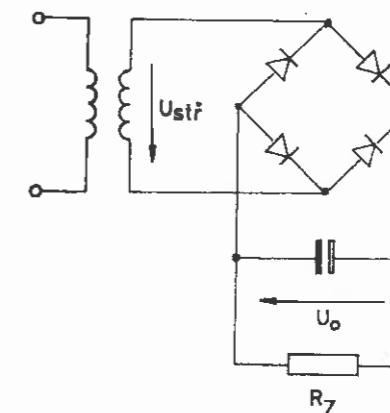
$$\text{Maximální proud diodou } I_F = \frac{U_{3\max}}{R} = \frac{25}{2.5 \cdot 10^3} A = 10 mA.$$

Požadované závěrné napětí na diodě  $U_R$

$$U_R = 2 \cdot U_{2\max} - U_F = 2\sqrt{2}U_2 - 0.7 V = 51 V.$$

### PŘÍKLAD 7.7:

Dvoucestný můstkový usměrňovač s křemíkovými diodami je zapojen podle obr. č. 7.25. a je připojen na střídavé napětí s  $f = 50$  Hz přes transformátor. Jak velké napětí  $U_{ST\bar{R}}$  musí být na sekundáru transformátoru, aby na kondenzátoru v nezatíženém stavu bylo  $U_0 = 20$  V. Jak velká kapacita  $C$  musí být připojena, aby napětí při zatížení odporem  $R_Z = 100 \Omega$  nekleslo o více než 2 % (tzn. že  $U = 0.98 U_0$ ) ?



obr. č. 7.25

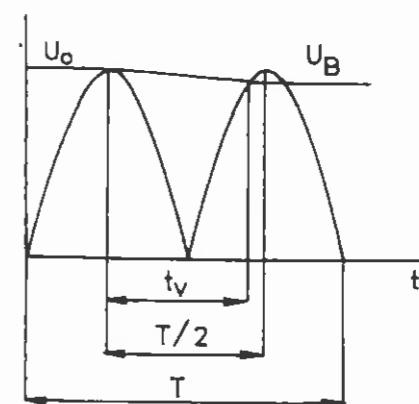
**Řešení:** V můstkovém zapojení jsou vždy dvě diody vodivé a dvě nevodivé. Napětí  $U_D$  na jedné diodě je přibližně 0,7 V. Potřebné napětí  $U_{ST\bar{R}}$  na transformátoru bude tedy:

$$U_{ST\bar{R}} = \frac{U_0 + 2U_D}{\sqrt{2}} = \frac{20 + 2 \cdot 0.7}{\sqrt{2}} V \doteq 15 V.$$

Napětí při zatížení klesá podle exponenciálky (viz obr. č. 7.26)

$$u = U_0 \cdot e^{-\frac{t_v}{RC}},$$

$t_v$  je doba, po kterou se kondenzátor vybíjí.



obr. č. 7.26

Protože se jedná opět o malé zvlnění, můžeme exponenciálu nahradit mocninnou řadou, kde použijeme pouze její první dva členy. Průběh usměrněného napětí je na obr.č.7.26. Napětí při poklesu je označeno  $U_B$ .

$$\text{Pro poměr napětí platí: } \frac{U_B}{U_0} = 1 - \frac{t_v}{RC}.$$

Z tohoto výrazu pak vypočteme potřebnou velikost kapacity:

$$C = \frac{t_v}{\left(1 - \frac{U_B}{U_0}\right)R}.$$

Ve vyjádřeném vztahu pro hledanou kapacitu kondenzátoru C je potřeba určit  $t_v$ . Poněvadž se jedná o malé zatížení, dopustíme se malé chyby, jestliže položíme  $t_v$  rovno polovině periody střídavého napětí (jelikož jde o dvoucestné usměrnění).

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} s = 20 ms \quad t_v = \frac{T}{2} = 10 ms.$$

Po dosazení určeného  $t_v$  do vztahu pro C dostáváme:

$$C = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{(1-0,98) \cdot 100} F = 5000 \mu F.$$

### PŘÍKLAD 7.8:

Stabilizovaný obvod dává při vstupním napětí  $U_1 = 12$  V výstupní napětí  $U_2 = 4$  V. Změna vstupního napětí  $U_1$  o 1,2 V odpovídá změna výstupního napětí  $U_2$  o 0,05 V. Vypočtěte činitel stabilizace obvodu.

---

**Řešení:** Činitel stabilizace S je definován podílem poměrné změny napájecího napětí a poměrné změny výstupního napětí. Pro náš případ je:

$$S = \frac{\frac{\Delta U_1}{U_1}}{\frac{\Delta U_2}{U_2}} = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{1,2 \cdot 4}{0,05 \cdot 12} = 8.$$

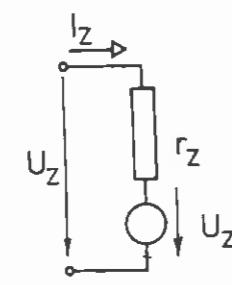
Činitel stabilizace daného stabilizovaného obvodu je  $S = 8$ .

**PŘÍKLAD 7.9:**

Zenerova dioda 2NZ70 má charakteristiku v závěrném směru danou na obr. č. 7.27. Dovolený ztrátový výkon diody je podle katalogu  $P_{d1} = 1,25 \text{ W}$  bez chladiče,  $P_{d2} = 5 \text{ W}$  s chladicí plochou daných rozměrů. Určete parametry náhradního schéma Zenerovy diody podle obr. č. 7.28, tj. velikost náhradního zdroje  $U_{Z0}$  a dynamický odpor  $r_z$  v linearizované části charakteristiky. Vymezte oblast pohybu pracovního bodu Zenerovy diody při správné funkci stabilizátoru. Určete maximální proud  $I_{\max}$ , který je možno odebírat do zátěže.



obr. č. 7.28



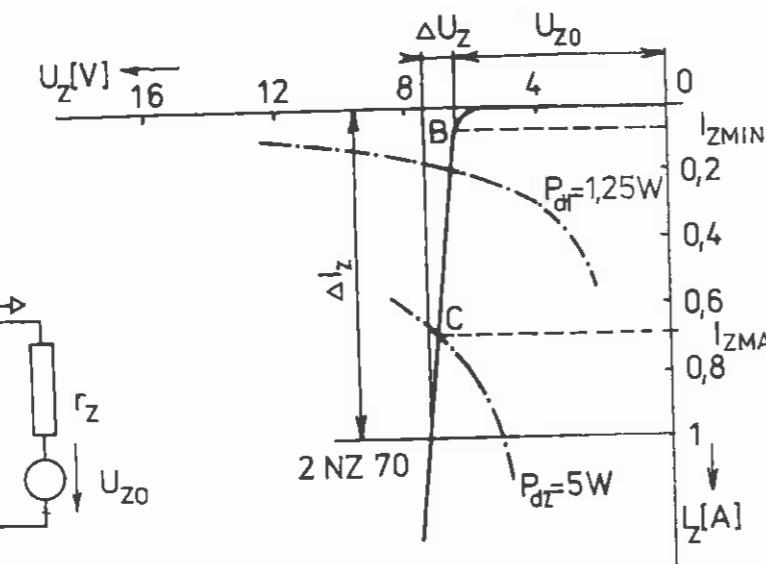
obr. č. 7.27

**Řešení:** Oblast charakteristiky, kde značným změnám proudu diodou odpovídá nepatrná změna napětí, lze approximovat přímkou (na obr. č. 7.27 danou body B, C) a Zenerovu diodu nahradit sériovou kombinací ideálního zdroje napětí  $U_{Z0}$ , jehož velikost odečteme z charakteristiky, a dynamického odporu  $r_z$ , kde

$$r_z = \frac{\Delta U_z}{\Delta I_z} = \frac{1}{1} \Omega = 1 \Omega.$$

Hodnotu  $U_{Z0}$  odečteme z obr. č. 7.27:

$$U_{Z0} = 6,5 \text{ V}.$$



Maximální proud Zenerovou diodou  $I_{z\max}$  je omezen dovoleným ztrátovým výkonem. Platí:  $I_{z\max} = \frac{P_d}{U_z}$ .

Průsečík charakteristiky ZD a křivky  $P_d$  bod C udává maximální proud Zenerovou diodou  $I_{z\max}$  s chladicí plochou.

Z grafu odečteme:  $I_{z\max} = 0,69 \text{ A}$ .

Aby dioda stabilizovala, musí jí protékat alespoň minimální proud  $I_{z\min}$ , jinak klesne napětí  $U_z$  pod hodnotu  $U_{Z0}$ . Z charakteristiky odečteme  $I_{z\min}$

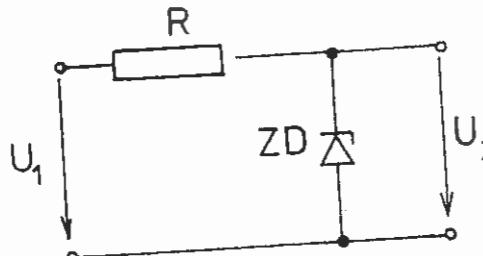
$$I_{z\min} = 0,065 \text{ A}.$$

Maximální proud, který může tato dioda dodávat do zátěže odpovídá rozdílu:  $I_{\max} = I_{z\max} - I_{z\min} = 0,69 \text{ A} - 0,065 \text{ A} = 0,625 \text{ A}$ .

Je přitom ovšem nutné použít chladiče s rozměry dle katalogu!

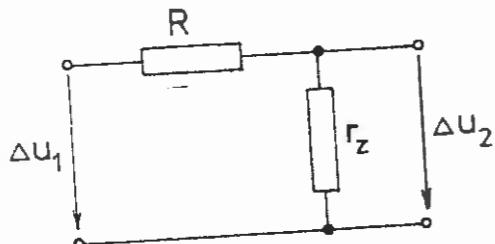
### PŘÍKLAD 7.10:

Na vstupu stabilizátoru z obr. č. 7.29 je napětí  $U_1 = 10 \text{ V}$ , které kolísá o  $\Delta u_1 = 1 \text{ V}$ . Napětí, které požadujeme na výstupu, je  $U_2 = 6 \text{ V}$ . Použitá Zenerova dioda má dynamický odpor  $r_z = 1 \Omega$  a napětí  $U_{Z0} = 6 \text{ V}$ . Velikost srážecího odporu je  $R = 18 \Omega$ . Vypočtěte činitel zvlnění  $\varphi_f$ , zvlnění výstupního napětí  $\Delta u_2$  a činitel stabilizace  $S$ .



obr. č. 7.29

Řešení: Obvod stabilizátoru podle obr. č. 7.29. lze pro malé změny napětí nahradit obvodem podle obr. č. 7.30.



obr. č. 7.30

Činitel zvlnění  $\varphi_f$  je definován:

$$\varphi_f = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_z}{R+r_z} = \frac{1\Omega}{18\Omega+1\Omega} = 0,0526.$$

Zvlnění výstupního napětí  $\Delta u_2$  pak vypočteme:

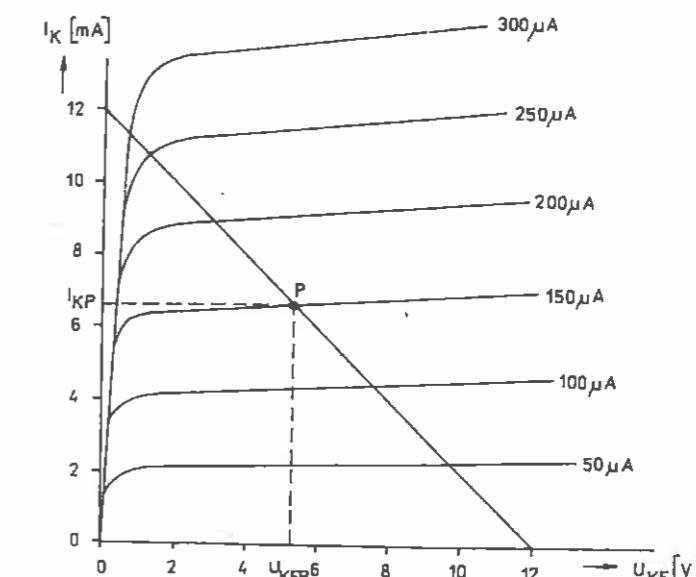
$$\Delta u_2 = \Delta u_1 \cdot \varphi_f = 1V \cdot 0,0526 = 0,0526V.$$

Činitel stabilizace  $S$  je definován jako poměr relativní změny vstupního napětí k relativní změně napětí výstupního:

$$S = \frac{\frac{\Delta u_1}{U_1}}{\frac{\Delta u_2}{U_2}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{R+r_z}{r_z} \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{(18+1)\Omega}{1\Omega} \cdot \frac{6V}{10V} = 11,4.$$

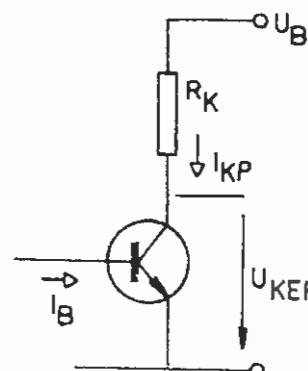
### PŘÍKLAD 7.11:

Jsou dány výstupní charakteristiky tranzistoru NPN v zapojení se společným emitorem (viz obr. č. 7.31). V kolektoru tranzistoru je zapojen odpor  $R_K = 1 \text{ k}\Omega$  a napájecí napětí je  $U_B = 12 \text{ V}$ . Určete pracovní bod tranzistoru, přivedeme-li do báze proud  $I_b = 150 \mu\text{A}$ . Určete, zda nebude překročena dovolená kolektorová ztráta  $P_K = 100 \text{ mW}$ .



obr. č. 7.31

Řešení: Schéma zapojení je na obr. č. 7.32.



obr. č. 7.32

Nejprve nakreslíme zatěžovací přímku, pro kterou platí:

$$U_B = R_K I_K + U_{KE}.$$

Nalezneme průsečíky s osami:

$$I_K = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{KE} = U_B = 12 \text{ V}.$$

$$U_{KE} = 0 \Rightarrow I_K = \frac{U_B}{R_K} = \frac{12}{1.10^3} A = 12 mA.$$

Zatěžovací přímka je zakreslena v obr. č. 7.31. Její průsečík s charakteristikou pro  $I_b = 150 \mu A$  je hledaným pracovním bodem P.

Z charakteristik určíme souřadnice pracovního bodu:

$$I_{KP} = 6,6 \text{ mA}, \quad U_{KEP} = 5,3 \text{ V}.$$

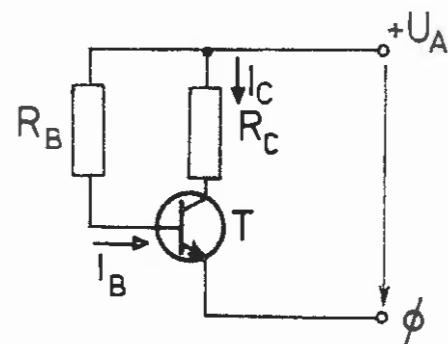
Kolektorovou ztrátu v pracovním bodě P vypočteme jako:

$$P_{KP} = I_{KP} \cdot U_{KEP} = 6,6 \cdot 10^{-3} A \cdot 5,3 V = 34,98 \cdot 10^{-3} W.$$

Povolená kolektorová ztráta nebude překročena.

### PŘÍKLAD 7.12:

V zapojení podle obr. č. 7.33 byl změněn proud kolektorem  $I_C = 20 \text{ mA}$  a proud báze  $I_B = 0,17 \text{ mA}$ . Určete velikost stejnosměrného proudového zesilovacího činitele  $\beta$  pro daný tranzistor.



obr. č. 7.33

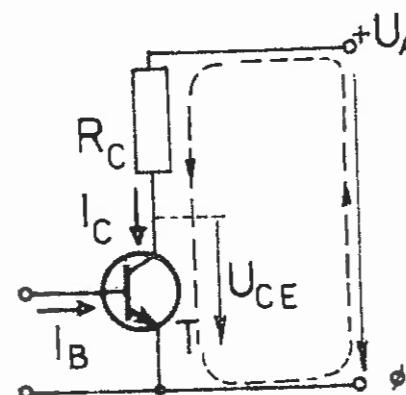
**Řešení:** Řešení je triviální. Stačí pouze dosadit do vztahu pro proudový zesilovací činitel.

Proudový zesilovací činitel je definován jako:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{20 \cdot 10^{-3} A}{0,17 \cdot 10^{-3} A} = 118.$$

### PŘÍKLAD 7.13:

Určete pro tranzistorový stupeň v zapojení SE (společný emitor) podle obr. č. 7.34 velikost proudu báze  $I_B$  tak, aby napětí na kolektoru  $U_{CE}$  bylo rovné polovině napájecího napětí  $U_A = 12$  V. Odpor zapojený v kolektoru je  $R_C = 2,2 \text{ k}\Omega$  a proudový zesilovací činitel tranzistoru je  $\beta = 150$ .



obr. č. 7.34

Řešení: Pro čárkování naznačenou smyčku podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$$- U_A + R_C I_C + U_{CE} = 0.$$

Proud kolektoru je:

$$I_C = \beta \cdot I_B .$$

Dále víme, že

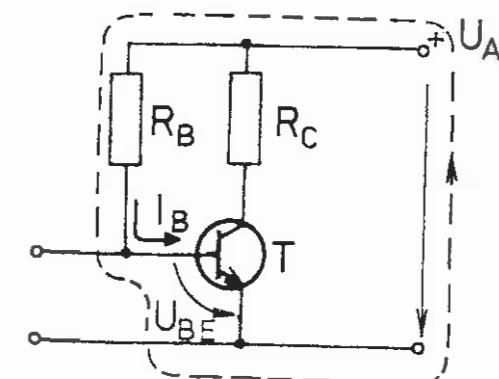
$$U_{CE} = \frac{1}{2} U_A .$$

Po dosazení je proud bází:

$$I_B = \frac{U_A - U_{CE}}{\beta \cdot R_C} = \frac{U_A}{2\beta R_C} = \frac{12}{2 \cdot 150 \cdot 2200} A = 19 \mu A .$$

### PŘÍKLAD 7.14:

Pro tranzistorový stupeň se společným emitorem podle obr. č. 7.35 vypočtěte velikost odporu  $R_B$  tak, aby bází tekł proud  $I_B = 0,2 \text{ mA}$ . Obvod je připojen na napětí  $U_A = 15 \text{ V}$ .



obr. č. 7.35

Řešení: Pro čárkování naznačenou smyčku podle 2. Kirchhoffova zákona můžeme psát:

$$- U_A + R_B I_B + U_{BE} = 0 .$$

Napětí  $U_{BE}$  přechodu báze - emitor v otevřeném stavu považujeme za rovné 0,7 V (křemíková dioda v propustném směru, tj. přechod báze - emitor má prahové napětí cca 0,7 V).

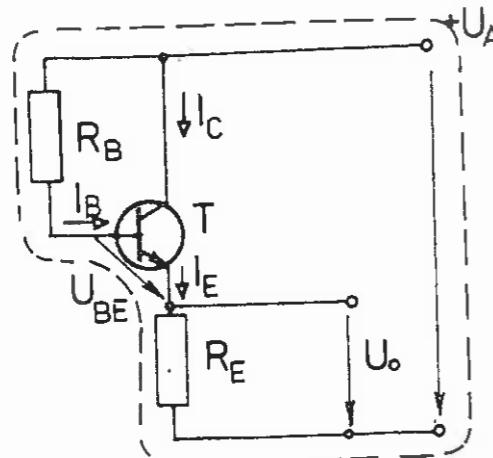
Vyjádříme  $R_B$ :

$$R_B = \frac{U_A - U_{BE}}{I_B} = \frac{15 - 0,7}{2 \cdot 10^{-4}} \Omega = 7,15 \cdot 10^4 \Omega .$$

K takto vypočtenému odporu bychom našli nejbližší ve vyráběné řadě odporů.

### PŘÍKLAD 7.15:

Obvod na obr. č. 7.36 ukazuje zapojení se společným kolektorem. Určete velikost odporu  $R_B$  v bázi tranzistoru tak, aby výstupní napětí bylo  $U_0 = 6$  V. Napájecí napětí je  $U_A = 12$  V, odpor v emitoru  $R_E = 370 \Omega$  a daný tranzistor má proudový zesilovací činitel  $\beta = 130$ .



obr. č. 7.36

**Řešení:** Pro smyčku vyznačenou na obr. č. 7.36 můžeme podle 2. Kirchhoffova zákona psát:

$$-U_A + R_B I_B + U_{BE} + R_E I_E = 0.$$

Pro proud tekoucí emitem platí:

$$I_E = I_B + I_C = I_B + \beta \cdot I_B = I_B \cdot (1 + \beta).$$

Pro napětí  $U_0$  platí:

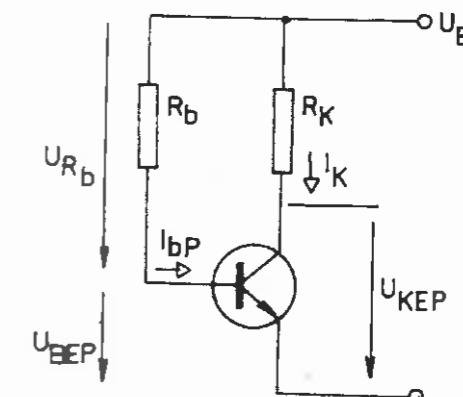
$$U_0 = R_E I_E.$$

Máme soustavu 3 rovnic. Po dosazení z 2. a 3. rovnice do prvej rovnice a dosazení za  $U_{BE} = 0,7$  V dostaneme pro velikost odporu  $R_B$ :

$$R_B = \frac{(U_A - U_{BE} - U_0) \cdot R_E \cdot (1 + \beta)}{6} = \frac{(12 - 0,7 - 6) \cdot 370 \cdot (1 + 130)}{6} \Omega = 42,8 \text{ k}\Omega.$$

### PŘÍKLAD 7.16:

Křemíkový tranzistor je připojen přes zatěžovací odpor  $R_K = 1 \text{ k}\Omega$  na napětí  $U_B = 12$  V (viz obr. č. 7.37.). Jak velký odpor  $R_b$  musíme zapojit do báze, aby napětí na kolektoru tranzistoru  $U_{KEP} = 6$  V? Proudový zesilovací činitel tranzistoru je  $\beta = 120$ .



obr. č. 7.37

**Řešení:** Nejprve musíme určit velikost kolektorového proudu  $I_K$  z rovnice  $U_B = R_K I_K + U_{KEP}$ . Z této rovnice vypočteme  $I_K$ :

$$I_K = \frac{U_B - U_{KEP}}{R_K} = \frac{12 - 6}{1 \cdot 10^{-3}} A = 6 \text{ mA}.$$

Poněvadž známe proudový zesilovací činitel, můžeme vypočítat potřebný proud do báze  $I_{bP}$ :

$$I_{bP} = \frac{I_K}{\beta} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{120} A = 50 \mu\text{A}.$$

Napětí na odporu báze  $R_b$  je dán:

$$U_{Rb} = U_B - U_{BEP}$$

Napětí  $U_{BEP}$  můžeme u křemíkového tranzistoru považovat za rovné 0,7 V. Pak  $U_{Rb} = (12 - 0,7)V = 11,3 V$ .

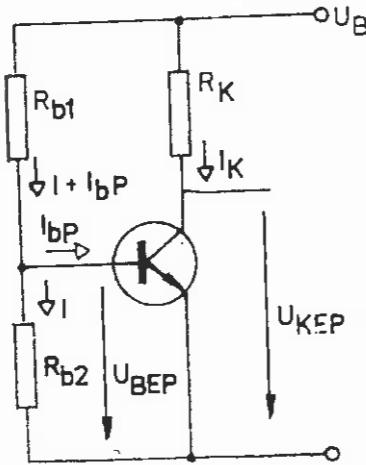
Nyní již můžeme vypočítat velikost odporu  $R_b$ :

$$R_b = \frac{U_{Rb}}{I_{bP}} = \frac{11,3}{50 \cdot 10^{-6}} \Omega = 226 \text{ k}\Omega.$$

Vezmeme nejbližší odpor ve standardně vyráběné řadě (M22).

### PŘÍKLAD 7.17:

Tranzistor z předchozího příkladu má mít stejný pracovní bod při stejném napájení. Řešte nastavení pracovního bodu děličem napětí v bázi (viz obr. č. 7.38).



obr. č. 7.38

Řešení: Z předchozího příkladu známe tyto údaje:

Napájecí napětí  $U_B = 12 \text{ V}$ , proud báze  $I_{bP} = 50 \mu\text{A}$  a napětí mezi bází a emitorem  $U_{BEP} = 0,7 \text{ V}$ .

Máme určit hodnoty odporů  $R_{b1}$  a  $R_{b2}$  napěťového děliče v bázi tranzistoru na obr. č. 7.38.

Proud děličem volíme desetkrát větší než proud tekoucí do báze:

$$I = 10 \cdot I_{bP}.$$

Pro napětí  $U_{BEP}$  platí:

$$U_{BEP} = R_{b2} I = R_{b2} 10 I_{bP}.$$

Z toho

$$R_{b2} = \frac{U_{BEP}}{10 I_{bP}} = \frac{0,7}{10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \Omega = 1,4 \text{ k}\Omega.$$

Pro napětí na odporu  $R_{b1}$  platí:

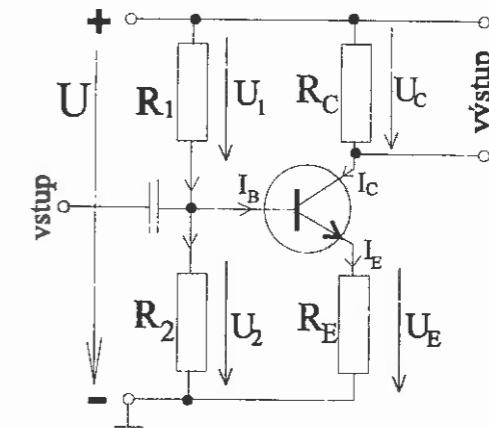
$$R_{b1} \cdot (I + I_{bP}) = U_B - U_{BEP}.$$

A odtud vypočítáme  $R_{b1}$ :

$$R_{b1} = \frac{U_B - U_{BEP}}{I + I_{bP}} = \frac{12 - 0,7}{550 \cdot 10^{-6}} \Omega = 20,5 \text{ k}\Omega.$$

### PŘÍKLAD 7.18:

Spočtěte pracovní bod tranzistoru v zapojení na obr. č. 7.39 tak, aby byly splněny příslušné podmínky:  $U = 12 \text{ V}$ ,  $U_E = 2 \text{ V}$ ,  $I_C = 1 \text{ mA}$ ,  $U_{CE} = 5 \text{ V}$ ,  $h_{2IE} = \beta = 250$ .



obr. č. 7.39

Řešení: Naším úkolem je vlastně zjistit hodnoty rezistorů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_C$  a  $R_E$  tak, abychom na výstupu obdrželi nezkreslený harmonický signál.

Podmínka pro nezkreslený výstupní signál je, že amplituda převáděného signálu musí být menší než stejnosměrné napětí na vstupu tranzistorového zesilovače.

Ze vztahu pro proudový zesilovací činitel odvodíme proud  $I_B$  tekoucí bází tranzistoru:

$$h_{2IE} = \frac{I_C}{I_B} \Rightarrow I_B = \frac{I_C}{h_{2IE}} = \frac{1}{250} \text{ A} = 4 \mu\text{A}.$$

$U_{CE}$  je napětí přechodu kolektor - emitor,  $U_E$  představuje úbytek napětí na odporu  $R_E$ .

Pokud označíme úbytek napětí na odporu  $R_C$  v kolektoru tranzistoru jako  $U_C$ , platí:

$$U = U_{CE} + U_E + U_C.$$

Z čehož pro napětí  $U_C$  na odporu  $R_C$ :

$$U_C = U - U_{CE} - U_E = (12 - 5 - 2) \text{ V} = 5 \text{ V}.$$

Proud  $I_E$  tekoucí emitorem je roven součtu proudů tekoucích bází a kolektorem tranzistoru:  $I_E = I_B + I_C$ .

Nyní již můžeme vyjádřit velikosti odporů zapojených v kolektoru a emitoru tranzistoru.

$$R_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{5}{0,001} \Omega = 5 k\Omega,$$

$$R_E = \frac{U_E}{I_E} = \frac{U_E}{I_B + I_C} = \frac{2}{0,001004} \Omega \approx 2 k\Omega.$$

Ještě nám zbývá určit potřebné velikosti odporů  $R_1$  a  $R_2$ . Do báze tranzistoru teče proud  $I_B$ , pak předpokládáme, že odporem  $R_1$  teče proud  $10 I_B$ . Samotným odporem  $R_2$  tudíž protéká proud  $I$ :

$$I = 10 \cdot I_B - 1 \cdot I_B = 9 I_B.$$

Napětí  $U_2$  na odporu  $R_2$  je rovno součtu napětí  $U_{BE}$  a  $U_E$ :

$$U_2 = U_{BE} + U_E.$$

Napětí  $U_{BE}$  je napětí na přechodu báze - emitor a většinou bývá 0,7 V.

Napětí na odporu  $R_1$  označíme  $U_1$ . Jelikož napětí  $U$  je dáno součtem napětí na obou odporech  $R_1$  a  $R_2$ , platí:

$$U = U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 = U - U_2 = U - U_{BE} - U_E.$$

Nyní již můžeme přistoupit k určení velikostí odporů  $R_1$  a  $R_2$ :

$$R_1 = \frac{U_1}{10 I_B} = \frac{U - U_{BE} - U_E}{10 I_B} = \frac{12 - 0,7 - 2}{10 \cdot 0,004} \Omega = \frac{9,3}{0,04} \Omega = 232 k\Omega.$$

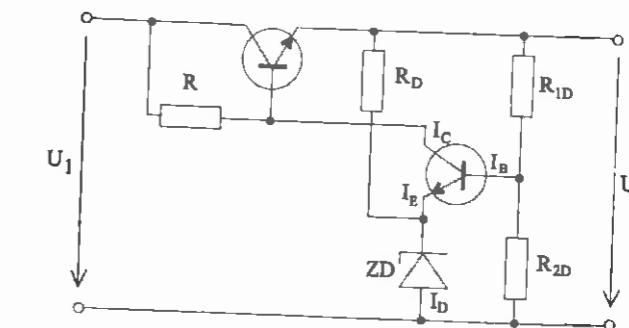
$$R_2 = \frac{U_2}{9 I_B} = \frac{U_{BE} + U_E}{9 I_B} = \frac{0,7 + 2}{9 \cdot 0,004} \Omega = \frac{2,7}{0,036} \Omega = 75 k\Omega$$

Jestliže tedy chceme nastavit pracovní bod tranzistoru tak, aby výstupní signál nebyl zkreslený, použijeme hodnoty odporů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_E$  a  $R_C$  o vypočítaných hodnotách. Jelikož vyráběné odpory mají pouze určité velikosti, vybereme tři odpory, které se svou velikostí blíží našim vypočteným a čtvrtý odpor nahradíme např. trimrem, jímž jemně nastavíme pracovní bod tranzistoru.

Pozn.: Zapojení tranzistoru na obr. č. 7.39 představuje tzv. zapojení se zápornou zpětnou proudovou vazbou. Při zvýšení proudu  $I_E$  se zvýší zároveň úbytek napětí na odporu  $R_E$ , přičemž napětí  $U_E$  se přiblíží k hodnotě  $U_B$ , tzn. že dojde k uzavírání tranzistoru, klesne napětí a proud.

### PŘÍKLAD 7.19:

U stabilizátoru se Zenerovou diodou na obr. č. 7.40 je třeba stabilizovat výstupní napětí jak vzhledem k měnícímu se vstupnímu napětí  $U_1$ , tak i k měnící se zátěži. Vypočtěte potřebné hodnoty odporů  $R_{RD}$ ,  $R_{2D}$  a  $R_D$ , jestliže známe parametry obvodu:  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 8 \text{ V}$ ,  $R = 1 k\Omega$ ,  $U_{ZD} = 5 \text{ V}$ ,  $I_C = 1 \text{ mA}$ ,  $h_{21E} = 100$ .



obr. č. 7.40

Řešení: Napětí na Zenerově diodě je  $U_{ZD}$ . Napětí na odporu  $R_D$  označíme jako  $U_{RD}$ . Pro obvod na obr. č. 7.40. pak platí:

$$U_2 = U_{RD} + U_{ZD} \Rightarrow U_{RD} = U_2 - U_{ZD} = (8 - 5) \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Pracovní proud Zenerovou diodou volíme obvykle ve velikosti čtvrtiny proudu  $I_{max}$ , který najdeme pro příslušnou Zenerovu diodu v katalogu. Pro  $I_{max} = 200 \text{ mA}$  necháme tedy Zenerovou diodou protékat proud

$$I_D = (0,25 \cdot 200) \text{ mA} = 50 \text{ mA}.$$

Pro odpor  $R_D$ :

$$R_D = \frac{U_{RD}}{I_D} = \frac{3}{0,05} \text{ V} = 60 \text{ V}.$$

Proud  $I_B$  bázi tranzistoru vypočteme ze vztahu pro proud. zesil. činitel:

$$h_{21E} = \frac{I_C}{I_B} \Rightarrow I_B = \frac{I_C}{h_{21E}} = \frac{0,001}{100} \text{ A} = 10 \mu\text{A}.$$

Napětí na přechodu báze - emitor tranzistoru je většinou  $U_{BE} = 0,7 \text{ V}$ .

Pro obvod na obr. č. 7.40. platí:

$$U_{RD2} = U_{BE} + U_{ZD} = (0,7 + 5) \text{ V} = 5,7 \text{ V},$$

$$U_{RD1} = U_2 - U_{RD2} = (8 - 5,7) \text{ V} = 2,3 \text{ V}.$$

V souladu s předešlým příkladem, je proud tekoucí odporem  $R_{RD}$   $I_1 = 10 I_B$  a proud tekoucí odporem  $R_{2D}$  pak  $I_2 = 9 I_B$ . Pak vychází

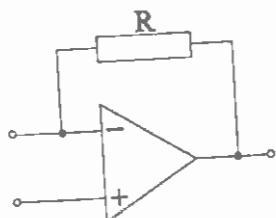
$$R_{RD} = \frac{U_{RD}}{10 I_B} = \frac{2,3}{10 \cdot 0,00001} \Omega = 23 k\Omega, \quad R_{2D} = \frac{U_{RD}}{9 I_B} = \frac{5,7}{9 \cdot 0,00001} \Omega = 63 k\Omega.$$

## 8. Operační zesilovače

Operační zesilovače (OZ) se dříve používaly převážně v analogových počítačích, kde sloužily pro základní aritmetické operace sčítání, odečítání, násobení, dělení a rovněž pro integraci analogových signálů [7]. Dnes se používají i v řadě elektronických obvodů jako jsou například stejnosměrné i střídavé zesilovače, komparátory, klopné obvody, aktivní filtry, převodníky z analogového signálu na digitální a naopak.

Operační zesilovač je v podstatě širokopásmový zesilovač se stejnosměrným vstupem. Ideální operační zesilovač má napěťové zesílení nekonečně velké, vstupní odpor nekonečně velký a výstupní odpor nulový. Skutečný operační zesilovač se k těmto hodnotám pouze přibližuje. Jeho maximální napěťové zesílení je  $10^5$ , vstupní odpor je  $10^4$  až  $10^5 \Omega$  a výstupní odpor je větší než  $100 \Omega$ .

Operační zesilovač má dva vstupní obvody: invertující (-) a neinvertující (+). Při zavedení signálu na invertující vstup se na výstupu operačního zesilovače objeví signál v opačné fázi, zatímco při přivedení signálu na neinvertující vstup je signál na vstupu a výstupu operačního zesilovače ve fázi [7].



obr. č. 8.1

Schématická značka operačního zesilovače je na obr. č. 8.1.

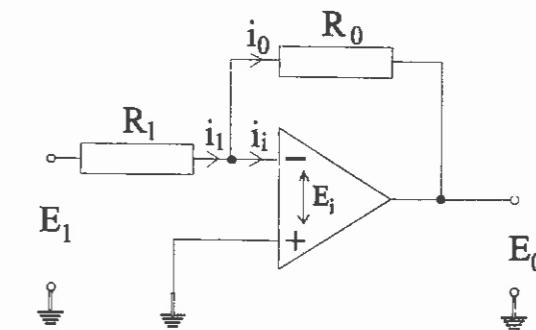
Odpor R zařazený mezi invertujícím vstupem a výstupem operačního zesilovače představuje zápornou zpětnou vazbu. Ta se v operačním zesilovači zavádí vždy. Bez zpětné vazby by byl zesilovač nestabilní (zejména při kolísání napájecího napětí a změnách teploty) a jeho zesílení by bylo závislé na zatížení.

Napěťové zesílení A oper. zesilovače je dáno poměrem napětí  $E_0$  na výstupu ku napětí  $E_1$  na vstupu operačního zesilovače (65).

$$A = \frac{E_0}{E_1} \quad (65)$$

Zapojení operačního zesilovače v el. obvodech je možno provést několikerým způsobem. Uvedeme si ta nejdůležitější [7] [12].

### 1) Zapojení OZ s invertujícím vstupem: (obr. č. 8.2)



obr. č. 8.2

$E_1$  je vstupní napětí,  $E_0$  je napětí na výstupu OZ,  $E_i$  je napětí mezi invertujícím a neinvertujícím vstupem OZ.

Pomocí Kirchhoffova zákona můžeme psát následující rovnice:

$$E_1 - E_i = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E_1 - E_i}{R_1},$$

$$E_0 - E_i = -i_0 R_0 \Rightarrow i_0 = \frac{E_i - E_0}{R_0},$$

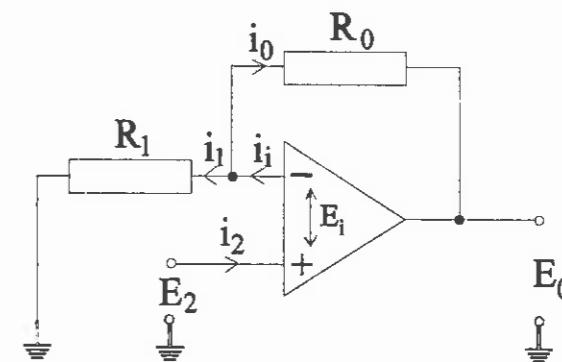
$$i_1 = i_i + i_0.$$

Využitím (65) a podmínek pro ideální OZ ( $i_i = 0$  a  $A \Rightarrow \infty$ ) obdržíme řešením třech výše uvedených rovnic vztah pro napětí  $E_0$  na výstupu:

$$E_0 = \frac{-R_0}{R_1} \cdot E_1, \quad (66)$$

kde znaménko (-) značí, že napětí  $E_0$  na výstupu má opačnou fázi než  $E_1$ .

### 2) Zapojení OZ s neinvertujícím vstupem: (obr. č. 8.3)



obr. č. 8.3

Pro obvod z obr. č. 8.3 podle Kirchhof. zákona plyne:

$$E_2 - E_i = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E_2 - E_i}{R_1},$$

$$E_2 - E_i - E_0 = i_0 R_0 \Rightarrow i_0 = \frac{E_2 - E_i - E_0}{R_0},$$

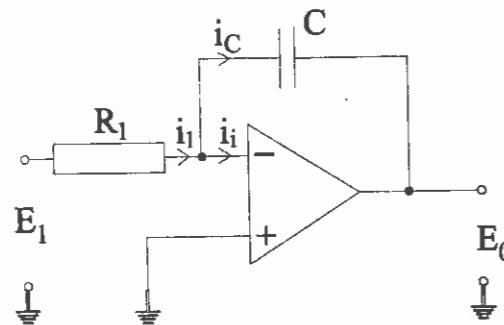
$$i_1 = i_i - i_0.$$

Opět jsme obdrželi soustavu 3 rovnic. Pro ideální OZ ( $i_i = E_i = 0$ ) nám jejím řešením vychází  $E_0$ :

$$E_0 = E_2 \cdot \left( \frac{R_0}{R_1} + 1 \right). \quad (67)$$

Poměr výstupního a vstupního napětí je u OZ v zapojení s neinvertujícím vstupem o jedničku větší než je tomu u stejného OZ v zapojení s invertujícím vstupem.

### 3) Zapojení OZ jako integrátoru: (obr. č. 8.4)



obr. č. 8.4

U ideálního OZ je  $i_i = 0$ . Pro obvod na obr. č. 8.4 lze tedy psát soustavu rovnic:

$$i_1 = i_C,$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1},$$

$$i_C = -\frac{d}{dt}(C \cdot E_0).$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme vztah pro  $E_0$ :

$$E_0 = -\frac{1}{R_1 C} \int E_1 \cdot dt. \quad (68)$$

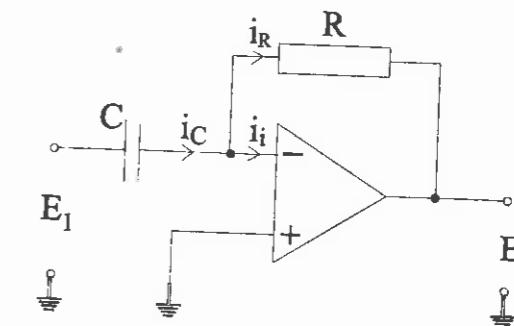
Pokud napětí  $E_1$  bude speciálně mít sinusový průběh:

$$E_1 = U_M \cdot \sin(\omega t), \quad (69)$$

pak po dosazení do (68) a zintegrování nám vychází pro  $E_{m0}$  - hodnotu napětí na výstupu:

$$E_{m0} = -\frac{T}{2\pi} \cdot \frac{U_m}{R_1 C} \quad (70)$$

### 4) Zapojení OZ jako derivátoru: (obr. č. 8.5)



obr. č. 8.5

U ideálního OZ je  $i_i = 0$ . Pro obvod na obr. č. 8.5 lze tedy psát soustavu rovnic:

$$i_R = i_C,$$

$$i_R = -\frac{E_0}{R},$$

$$i_C = \frac{dQ_C}{dt}.$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme vztah pro  $E_0$ :

$$E_0 = -RC \cdot \frac{dE_1}{dt}. \quad (71)$$

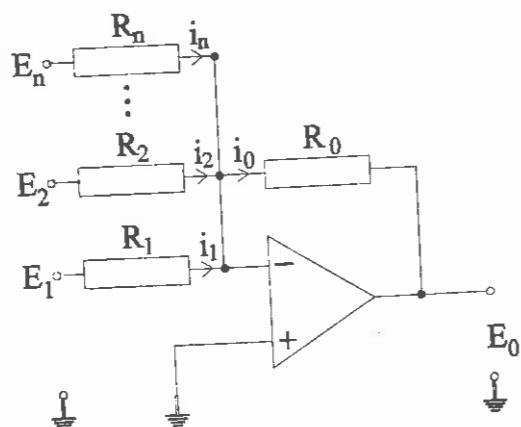
Napětí  $E_0$  na výstupu OZ tak bude mít opačnou fázi než napětí  $E_1$  na vstupu OZ.

Pokud speciálně napětí  $E_1$  bude mít sinusový průběh (69), pro hodnotu napětí  $E_{m0}$  na výstupu OZ získáme vztah

$$E_{m0} = \frac{2\pi}{T} \cdot RC \cdot U_m. \quad (72)$$

### 5) Zapojení OZ pro analogové sčítání a odčítání: (obr. č. 8.6)

Obvod je realizován zapojením na obr. č. 8.6. Na invertující vstup OZ jsou přes rezistory  $R_1, R_2, \dots, R_n$  přivedena napětí  $E_1, E_2$  až  $E_n$ . Napětí, která chceme sečíst, zapojíme se stejnou polaritou, napětí, která chceme odečítat, zapojíme s polaritou opačnou.



obr. č. 8.6

Z 1. Kirchhoffova zákona lze psát:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = i_0. \quad (73)$$

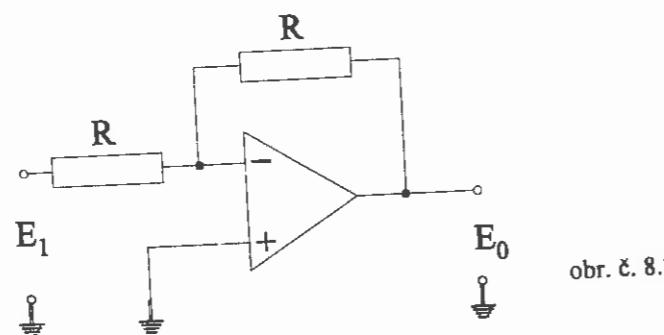
Vyjádříme jednotlivé proudy:

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1}; i_2 = \frac{E_2}{R_2}; \dots; i_n = \frac{E_n}{R_n}; i_0 = \frac{-E_0}{R_0}. \quad (74)$$

Dosazením (74) do (73) a následnou sumací obdržíme vztah mezi výstupním napětím  $E_0$  a jednotlivými  $E_1$  až  $E_n$ :

$$\sum_{j=1}^n E_j = -\frac{R}{R_0} \cdot E_0. \quad (75)$$

#### 6) Zapojení OZ jako negátoru (invertoru): (obr. č. 8.7)



obr. č. 8.7

Jde vlastně o zapojení OZ s invertujícím vstupem, kdy  $R_1 = R_0 = R$ .

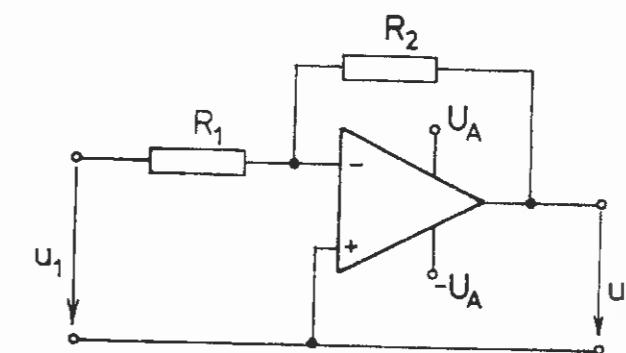
Vztah (66) pro výsledné napětí  $E_0$  pak přejde do tvaru

$$E_0 = -E_1. \quad (76)$$

To znamená, že na výstupu bude stejné napětí jako na vstupu, ale s opačnou polaritou.

#### PŘÍKLAD 8.1:

Určete velikost odporu  $R_1$  v zapojení s operačním zesilovačem podle obr. č. 8.8 jako invertující zesilovač tak, aby zesiloval lineárně vstupní napětí  $u_1$  v rozsahu  $|u_1| \leq U_{1m}$ . Operační zesilovač je napájen ze symetrického zdroje napětí  $\pm U_A$ . Za maximální hodnoty výstupního napětí považujte  $\pm U_{2m} = |U_A| - 1$ . Nakreslete převodní charakteristiku zesilovače  $u_2 = f(u_1)$ . Jaké napěťové zesílení  $A$  bude mít toto zapojení? Jsou dány parametry:  $R_2 = 22 \text{ k}\Omega$ ,  $U_A = \pm 15 \text{ V}$ ,  $U_{1m} = 1,4 \text{ V}$ ,  $U_{2m} = U_A - 1 = 14 \text{ V}$ .



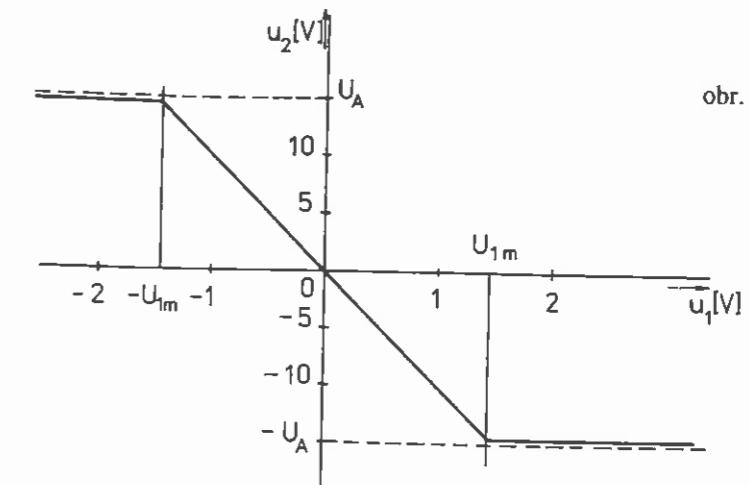
obr. č. 8.8

**Řešení:** Pro invertující zesilovač platí:

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_1,$$

tj. rovnice přímky se směnicí  $k = -\frac{R_2}{R_1}$ .

Směrnici přímky určíme z obr. č. 8.9, kdy napětí  $u_1 = -U_{1m}$  má odpovídat napětí na výstupu  $U_{2m} = U_A - 1$ .



obr. č. 8.9

Směrnice k:

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{U_A - 1}{-U_{1m}} = \frac{15 - 1}{-1,4} = -10.$$

Pro velikost odporu  $R_1$  pak platí:

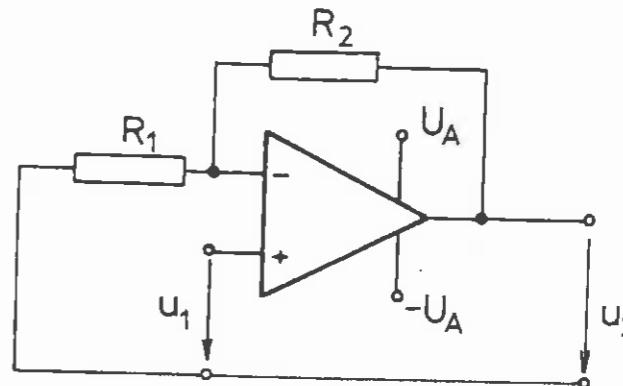
$$R_1 = -\frac{R_2}{k} = \left( -\frac{22 \cdot 10^3}{-10} \right) \Omega = 2,2 \text{ k}\Omega.$$

Napěťové zesílení A operačního zesilovače:

$$A = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{22 \cdot 10^3 \Omega}{2,2 \cdot 10^3 \Omega} = -10.$$

### PŘÍKLAD 8.2:

Při návrhu neinvertujícího operačního zesilovače bylo použito zapojení operačního zesilovače podle obr. č. 8.10. Napájecí napětí zesilovače je  $\pm U_A = \pm 15V$ . Zpětnovazební odpor má hodnotu  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ . Určete velikost odporu  $R_1$  pro požadovaná napěťová zesílení  $A = 100; 10; 1$ .



obr. č. 8.10

**Řešení:** Pro výstupní napětí neinvertujícího zesilovače platí:

$$u_2 = \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \cdot u_1,$$

tj. pro požadované napěťové zesílení:

$$A = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_2}{A-1}.$$

a) Pro velké hodnoty zesílení, kdy  $A \gg 1$ , lze psát:

$$R_1 = \frac{R_2}{A-1} \doteq \frac{R_2}{A},$$

$$\text{pro } A = 100 \text{ bude } R_1 = \frac{100 \cdot 10^3}{100} \Omega = 10^3 \Omega = 1 \text{ k}\Omega.$$

b) Pokud je hodnota napěťového zesílení srovnatelná s jedničkou, vypočteme velikost odporu  $R_1$  podle klasického odvozeného vzorce:

$$\text{pro } A = 10 \text{ je } R_1 = \frac{R_2}{A-1} = \frac{10^5}{10-1} \Omega = \frac{10^5}{9} \Omega = 11 \text{ k}\Omega.$$

Směrnice k:

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{U_A - 1}{-U_{lm}} = \frac{15 - 1}{-1,4} = -10.$$

Pro velikost odporu  $R_1$  pak platí:

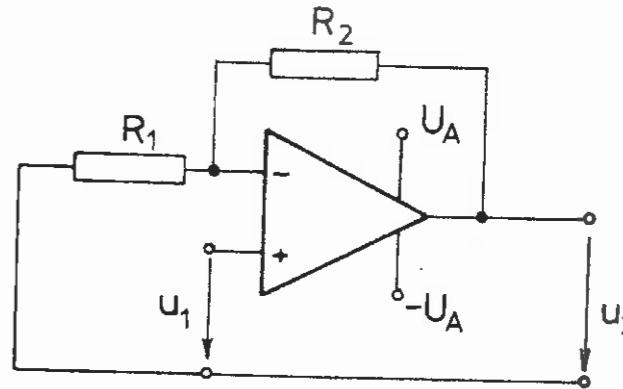
$$R_1 = \frac{R_2}{k} = \left( -\frac{22 \cdot 10^3}{-10} \right) \Omega = 2,2 \text{ k}\Omega.$$

Napěťové zesílení A operačního zesilovače:

$$A = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{22 \cdot 10^3 \Omega}{2,2 \cdot 10^3 \Omega} = -10.$$

### PŘÍKLAD 8.2:

Při návrhu neinvertujícího operačního zesilovače bylo použito zapojení operačního zesilovače podle obr. č. 8.10. Napájecí napětí zesilovače je  $\pm U_A = \pm 15V$ . Zpětnovazební odpor má hodnotu  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ . Určete velikost odporu  $R_1$  pro požadovaná napěťová zesílení  $A = 100; 10; 1$ .



obr. č. 8.10

**Řešení:** Pro výstupní napětí neinvertujícího zesilovače platí:

$$u_2 = \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \cdot u_1,$$

tj. pro požadované napěťové zesílení:

$$A = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_2}{A-1}.$$

a) Pro velké hodnoty zesílení, kdy  $A \gg 1$ , lze psát:

$$R_1 = \frac{R_2}{A-1} \doteq \frac{R_2}{A},$$

$$\text{pro } A = 100 \text{ bude } R_1 = \frac{100 \cdot 10^3}{100} \Omega = 10^3 \Omega = 1 \text{ k}\Omega.$$

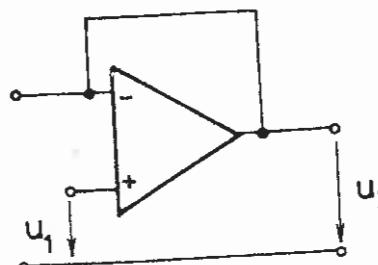
b) Pokud je hodnota napěťového zesílení srovnatelná s jedničkou, vypočteme velikost odporu  $R_1$  podle klasického odvozeného vzorce:

$$\text{pro } A = 10 \text{ je } R_1 = \frac{R_2}{A-1} = \frac{10^5}{10-1} \Omega = \frac{10^5}{9} \Omega = 11 \text{ k}\Omega.$$

c) V případě, kdy napěťové zesílení A je blízké jedné, tzn. výstupní napětí  $u_2$  je přibližně rovno vstupnímu napětí  $u_1$ :

$$A = \frac{u_2}{u_1} = 1 \Rightarrow R_1 \rightarrow \infty; R_2 \rightarrow 0.$$

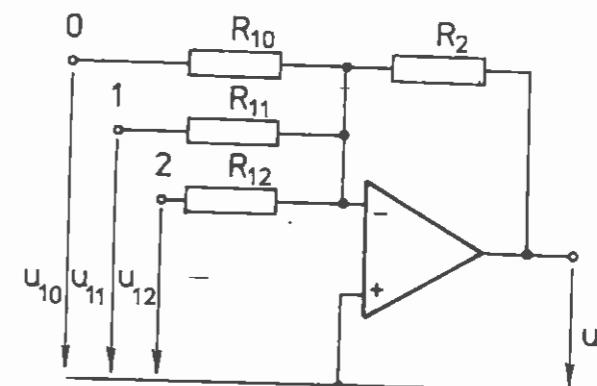
Takové vlastnosti obvodu lze realizovat zapojením podle obr. č. 8.11, označovaným jako napěťový sledovač, neboť výstupní napětí  $u_2$  sleduje vstupní napětí  $u_1$ .



obr. č. 8.11

### PŘÍKLAD 8.3:

Určete hodnoty odporů rezistorů  $R_{10}$ ,  $R_{11}$  a  $R_{12}$  součtového invertujícího zesilovače zapojeného podle obr. č. 8.12 tak, aby napětí  $u_{10}$  na vstupu 0 bylo na výstupu zesíleno jednou; napětí  $u_{11}$  dvakrát a napětí  $u_{12}$  čtyřikrát. Odpor ve zpětné vazbě má hodnotu  $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$ . Určete velikost výstupního napětí  $u_2$ , jestliže na vstupy 0, 1, 2 je přivedeno napětí 0 V nebo 1 V. (jejich všechny možné kombinace).



obr. č. 8.12

**Řešení:** Pro výstupní napětí součtového invertujícího zesilovače platí:

$$u_2 = - \left( \frac{R_2}{R_{10}} u_{10} + \frac{R_2}{R_{11}} u_{11} + \frac{R_2}{R_{12}} u_{12} \right).$$

Podle zadání požadujeme, aby pro výstupní napětí  $u_2$  platilo:

$$u_2 = - (1 \cdot u_{10} + 2 \cdot u_{11} + 4 \cdot u_{12}). \quad (77)$$

Z rovnosti koeficientů u odpovídajících si vstupních napětí určíme hodnoty jednotlivých odporů:

$$\frac{R_2}{R_{10}} = 1 \quad \text{tj. } R_{10} = R_2 = 40 \text{ k}\Omega,$$

$$\frac{R_2}{R_{11}} = 2 \quad \text{tj. } R_{11} = \frac{R_2}{2} = 20 \text{ k}\Omega,$$

$$\frac{R_2}{R_{12}} = 4 \quad \text{tj. } R_{12} = \frac{R_2}{4} = 10 \text{ k}\Omega.$$

Napětí na libovolném vstupu může nabývat hodnoty buď 0 V nebo 1 V. Možnosti nastavení vstupů uspořádány do tabulky č. 1.

Výstupní napětí  $u_2$  pro danou kombinaci vstupních napětí  $u_{10}$ ,  $u_{11}$  a  $u_{12}$  je určeno podle vztahu (77).

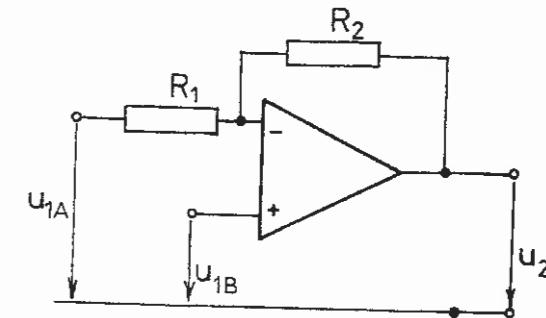
$u_{12}$ (V)	$u_{11}$ (V)	$u_{10}$ (V)	$u_2$ (V)
0	0	0	0
0	0	1	-1
0	1	0	-2
0	1	1	-3
1	0	0	-4
1	0	1	-5
1	1	0	-6
1	1	1	-7

tabulka č. 1

Pozn.: Tento obvod lze použít jako číslicově-analogový převodník.

#### PŘÍKLAD 8.4:

Operační zesilovač je zapojen podle obr. č. 8.13. Na invertující vstup je připojen zdroj napětí  $u_{1A} = 5$  V, na neinvertující vstup napětí  $u_{1B} = 2$  V. Určete velikost výstupního napětí  $u_2$  při současném působení obou zdrojů.  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ .



obr. č. 8.13

Řešení: Budeme postupovat na základě principu superpozice. Nejprve určíme jednotlivá příspěvková napětí na výstupu  $u_{2A}$  a  $u_{2B}$  od každého zdroje zvlášť a výsledné napětí  $u_2$  bude potom dánou jejich součtem.

1.  $u_{1A} \neq 0; u_{1B} = 0$ , tj. zapojení invertujícího operačního zesilovače:

$$u_{2A} = -\frac{R_2}{R_1} u_{1A}.$$

2.  $u_{1A} = 0; u_{1B} \neq 0$ , tj. zapojení neinvertujícího operačního zesilovače:

$$u_{2B} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_{1B} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u_{1B}.$$

Pro výsledné napětí  $u_2$  pak platí:

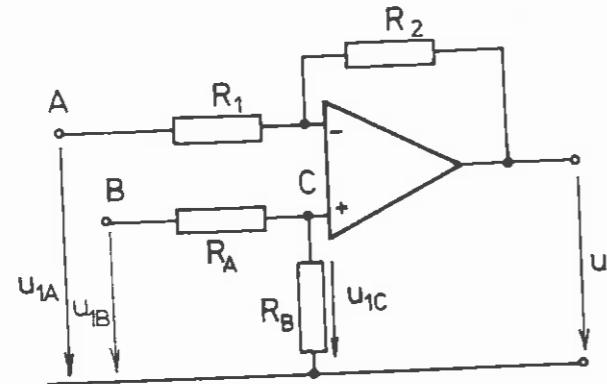
$$u_2 = u_{2A} + u_{2B} = -\frac{R_2}{R_1} u_{1A} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} u_{1B}.$$

Po číselném dosazení:

$$u_2 = \left( -\frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} \cdot 5 + \frac{10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} \cdot 2 \right) V = (-5 + 4) V = -1 V.$$

**PŘÍKLAD 8.5:**

Určete, jaké musí být odpory  $R_A$  a  $R_B$  ve schématu podle obr. č. 8.14, aby výstupní napětí  $u_2$  operačního zesilovače bylo úměrné rozdílu vstupních napětí  $u_{1A} = 5 \text{ V}$  a  $u_{1B} = 2 \text{ V}$ , jestliže jsou dány velikosti odporů rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ :  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ .



obr. č. 8.14

**Řešení:** Výstupní napětí  $u_2$  zesilovače podle obr. č. 8.14, který má na vstup A připojeno napětí  $u_{1A}$  a na vstup C připojeno napětí  $u_{1C}$  je dán vztahem:

$$u_2 = u_{2A} + u_{2C} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_{1A} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot u_{1C}.$$

Pro dělič napětí na vstupu B platí:

$$u_{1C} = \frac{R_B}{R_A + R_B} \cdot u_{1B}.$$

Vyjádřené  $u_{1C}$  dosadíme do vztahu pro výstupní napětí  $u_2$ :

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_{1A} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} \cdot u_{1B}.$$

Aby výstupní napětí  $u_2$  bylo úměrné rozdílu vstupních napětí  $u_{1A}$  a  $u_{1B}$ , je třeba, aby platila rovnost koeficientů u obou složek napětí  $u_{1A}$  a  $u_{1B}$ , tedy:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B}.$$

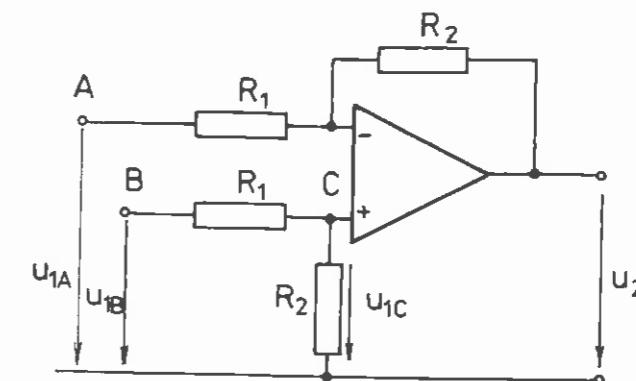
Odtud vyplývá, že dělič na vstupu B musí mít hodnoty odporů:

$$R_A = R_1 \quad \text{a} \quad R_B = R_2.$$

Obvod z obr. č. 8.14 tak bude prakticky možné nahradit obvodem z obr. č. 8.15, který je stejného tvaru, ale kde se vyskytuje již pouze rezistory  $R_1$  a  $R_2$ .

Výstupní napětí  $u_2$  bude v tomto případě dán vztahem:

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1} \cdot (u_{1B} - u_{1A}) = \frac{20 \cdot 10^3 \Omega}{10 \cdot 10^3 \Omega} \cdot (2 - 5) \text{ V} = 2 \cdot (-3) \text{ V} = -6 \text{ V}.$$

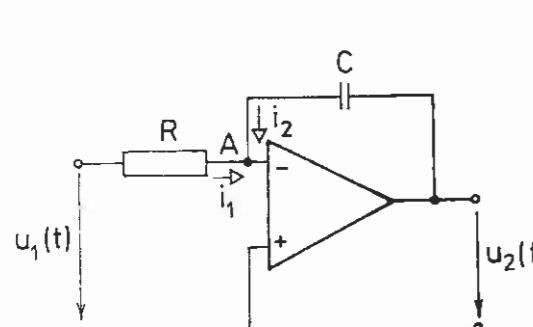


obr. č. 8.15

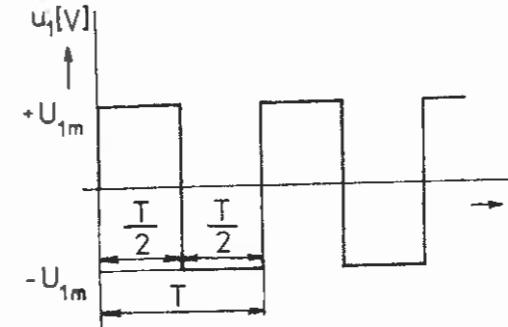
**Pozn.:** Takové zapojení pracuje jako diferenční obvod, výstupní napětí je úměrné pouze rozdílu napětí na obou vstupech násobenému poměrem  $\frac{R_2}{R_1}$ .

**PŘÍKLAD 8.6:**

Operační zesilovač je zapojen jako integrátor podle obr. č. 8.16 se zadanými hodnotami odporu  $R = 10 \text{ k}\Omega$  a kapacity  $C = 100 \text{ nF}$ . Na vstup operačního zesilovače jsou přivedeny obdélníkové impulsy podle obr. č. 8.17. Stanovte průběh výstupního napětí  $u_2(t)$ .  $U_{1m} = 1 \text{ V}$ ,  $T = 20 \text{ ms}$ ,  $u_C(0) = 0 \text{ V}$  - kondenzátor v okamžiku  $t = 0$  je bez náboje.



obr. č. 8.16



obr. č. 8.17

Výstupní napětí  $u_2(t)$  určíme podle:

$$u_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^T u_1 \cdot dt + u_2(0) = -\frac{1}{RC} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} U_{1m} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-U_{1m}) \cdot dt \right] + u_2(0).$$

Z počátečních podmínek plyne  $u_2(0) = 0$ .

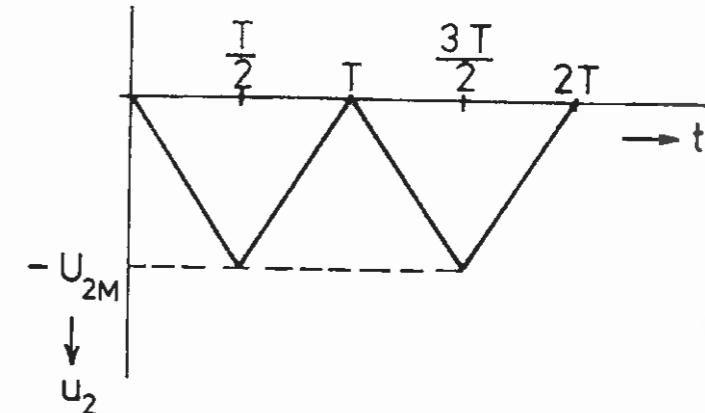
Průběh napětí lze vyjádřit pro

$$0 < t < \frac{T}{2} \quad u_2(t) = -\frac{U_{1m}}{RC} t = \left( -\frac{1}{10^4 \cdot 10^{-7}} t \right) \frac{V}{s} = (-10^3 \cdot t) \frac{V}{s},$$

$$\frac{T}{2} < t < T \quad u_2(t) = -\frac{U_{1m}}{RC} \cdot \frac{T}{2} + \frac{(+U_{1m})}{RC} \cdot \left( t - \frac{T}{2} \right) = \frac{U_{1m}}{RC} (t - T).$$

Závislost  $u_2(t)$  je vynesena na obr. č. 8.18, kde

$$U_{2m} = u_2 \cdot \frac{T}{2} = \left( -\frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \right) V = -10 V.$$



obr. č. 8.18

**Řešení:** Pro ideální operační zesilovač musí pro uzel A platit:

$$i_1 + i_2 = 0, \quad (78)$$

kde  $i_1 = \frac{u_1}{R}$  ;  $i_2 = C \cdot \frac{du_2}{dt}$ .

Dosazením  $i_1$  a  $i_2$  do rovnice (78) dostaneme:

$$\frac{u_1}{R} + C \cdot \frac{du_2}{dt} = 0 \Rightarrow du_2 = -\frac{1}{RC} \cdot u_1 \cdot dt.$$

Rovnici zintegrujeme:

$$u_2 = -\frac{1}{RC} \int u_1 \cdot dt + u_2(0).$$

Vstupní signál  $u_1(t)$  je periodický s periodou  $T$ , lze jej vyjádřit

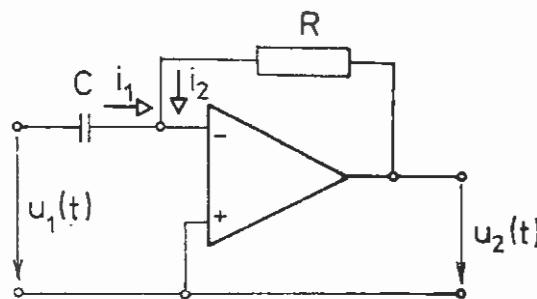
(viz obr. č. 8.17) jako:

$$u_1(t) = U_{1m} \text{ pro } 0 < t < \frac{T}{2} + kT \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo,}$$

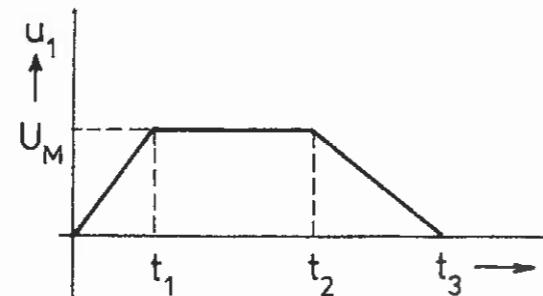
$$u_1(t) = -U_{1m} \text{ pro } \frac{T}{2} < t < T + kT \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo.}$$

### PŘÍKLAD 8.7:

Na obr. č. 8.19 je nakresleno zapojení derivačního zesilovače s operačním zesilovačem. Určete závislost výstupního napětí  $u_2(t)$  na časové změně napětí na vstupu  $u_1(t)$  obecně. Pro zadaný průběh vstupního signálu dle obr. č. 8.20 určete průběh výstupního napětí.



obr. č. 8.19



obr. č. 8.20

**Řešení:** Při časové změně napětí  $u_1$  protéká kondenzátorem  $C$  proud  $i_1$ , který je úměrný velikosti kapacity  $C$  a rychlosti změny napětí  $u_1$ :

$$i_1 = C \cdot \frac{du_1}{dt}. \quad (79)$$

U ideálního OZ bude:  $i_1 + i_2 = 0,$   $(80)$

a dále:  $u_2 = R \cdot i_2.$   $(81)$

Po dosazení (79) a (81) do (80) dostaneme obecný vzorec pro  $u_2$ :

$$u_2 = -RC \cdot \frac{du_1}{dt}. \quad (82)$$

Pro určení časové závislosti výstupního napětí je nutné určit časovou závislost vstupního napětí  $u_1(t)$  zadaného podle obr. č. 8.20.

V čase  $0 \leq t < t_1$  má vstupní signál  $u_1$  tvar přímky se směrnicí  $\frac{U_M}{t_1}$

a procházející počátkem:  $u_1(t) = \frac{U_M}{t_1} t.$

V čase  $t_1 \leq t < t_2$  má vstupní signál  $u_1$  konstantní hodnotu  $U_M$ :

$$u_1(t) = U_M.$$

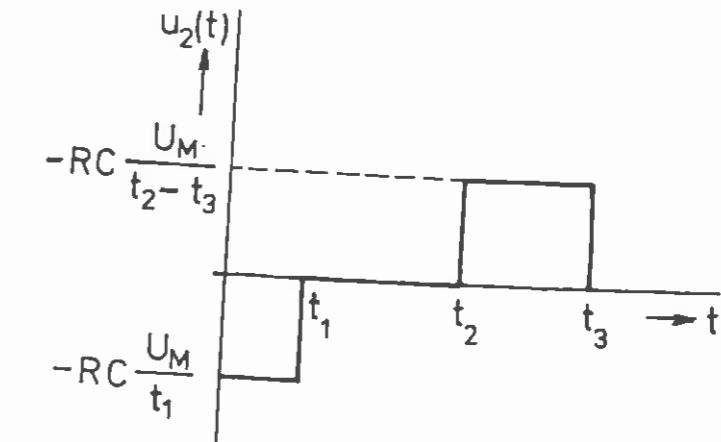
V čase  $t_2 \leq t \leq t_3$  má vstupní signál tvar přímky se směrnicí  $\frac{U_M}{t_2 - t_3}$  a v čase  $t = t_3$  nabývá nulové hodnoty:

$$u_1(t) = \frac{U_M}{t_2 - t_3} \cdot (t - t_3).$$

Průběh výstupního napětí pak dostaneme podle (82) derivací vstupního signálu v příslušném časovém intervalu [10].

Pro $t < t_1$	$u_1 = \frac{U_M}{t_1} \cdot t,$	$u_2 = -RC \cdot \frac{U_M}{t_1} = \text{konst.},$
Pro $t_1 \leq t < t_2$	$u_1 = U_M,$	$u_2 = 0.$
Pro $t_2 \leq t \leq t_3$	$u_1 = \frac{U_M}{t_2 - t_3} (t - t_3),$	$u_2 = -RC \cdot \frac{U_M}{t_2 - t_3}.$

Průběh výstupního signálu  $u_2(t)$  je pak zakreslen v obr. č. 8.21.

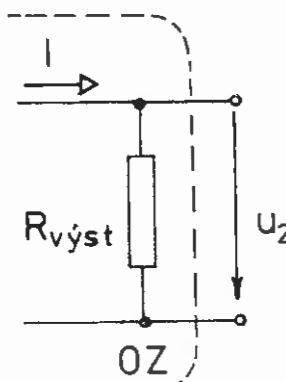


obr. č. 8.21

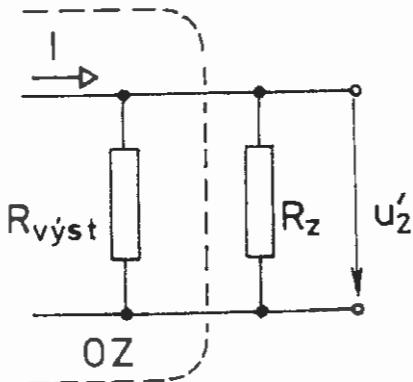
### PŘÍKLAD 8.8:

Na výstupních svorkách operačního zesilovače bez zátěže je napětí  $u_2 = 7,5$  V. Zatížme-li výstup operačního zesilovače odporem  $R_Z = 400 \Omega$ , klesne výstupní napětí na hodnotu  $u'_2 = 5$  V. Určete výstupní odpor  $R_{VYST}$  operačního zesilovače. Jaké bude výstupní napětí  $u''_2$ , bude-li zatěžovací odpor roven velikosti  $R_{VYST}$ ?

**Řešení:** Při řešení vyjdeme z obvodu na obr. č. 8.22 pro nezatížený výstup OZ a z obr. č. 8.23 pro zatížení OZ.



obr. č. 8.22



obr. č. 8.23

Výstupní proud  $I$  operačního zesilovače je v obou případech stejný.

Pro nezatížený výstup platí:  $u_2 = R_{VYST} \cdot I$ .

Pro zatížený výstup platí:  $u'_2 = \frac{R_Z \cdot R_{VYST}}{R_Z + R_{VYST}} \cdot I$ .

Pak z poměru:

$$\frac{u_2}{u'_2} = \frac{R_Z + R_{VYST}}{R_Z} \Rightarrow R_{VYST} = R_Z \cdot \left( \frac{u_2}{u'_2} - 1 \right) = 400 \Omega \cdot \left( \frac{7,5 \text{ V}}{5 \text{ V}} - 1 \right) = 200 \Omega.$$

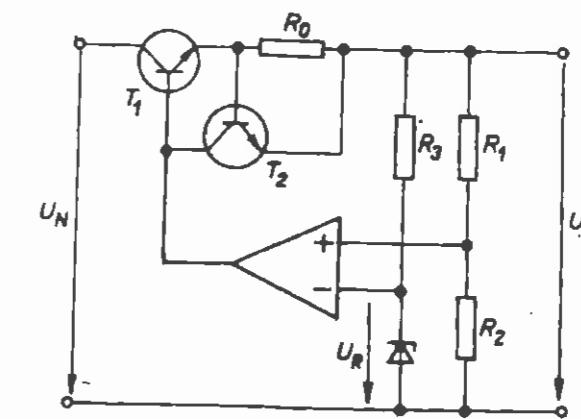
Pro  $R_Z = R_{VYST}$ :

$$\frac{u_2}{u''_2} = \frac{2 \cdot R_{VYST}}{R_{VYST}} = 2 \quad t.j. \quad u''_2 = \frac{1}{2} u_2 = \frac{7,5}{2} \text{ V} = 3,75 \text{ V}.$$

Výstupní napětí klesne právě na polovinu.

### PŘÍKLAD 8.9:

Určete velikost odporů rezistorů  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  pro stabilizátor se zpětnou vazbou na obr. č. 8.24 tak, aby výstupní napětí bylo  $U_S = 12I_S = 1,2 \text{ A}$ . Stabilizační dioda má Zenerovo napětí  $U_R = 6 \text{ V}$  při proudu  $I_R = 5 \text{ mA}$ .



obr. č. 8.24

**Řešení:** Rezistorem  $R_3$  prochází proud stabilizační diody, odběr výstupního obvodu zesilovače lze zanedbat. Napětí na rezistoru  $R_3$  je dáno rozdílem stabilizovaného napětí  $U_S$  a referenčního napětí  $U_R$ .

$$R_3 = \frac{U_S - U_R}{I_R} = \frac{12 - 6}{5 \cdot 10^{-3}} \Omega = 1200 \Omega.$$

Výstupní dělič odporů  $R_1$  a  $R_2$  má rozdělit výstupní napětí stabilizátoru tak, aby v ustáleném stavu bylo také na invertujícím vstupu zesilovače napětí rovnající se referenčnímu napětí. V našem případě je:

$$U_{R1} = U_{R2} = 6 \text{ V}$$

Proud procházející děličem volíme  $I_D = 200 \text{ mA}$ . Vzhledem k tomuto proudu lze zanedbat odpor výstupního obvodu zesilovače. Potom:

$$R_1 = R_2 = \frac{U_{R1}}{I_D} = \frac{6}{2 \cdot 10^{-3}} \Omega = 3000 \Omega$$

Při dosažení maximálního povoleného odběru proudu ze stabilizátoru má být na vstupu tranzistoru  $T_2$  napětí  $U_{BE} = 0,7 \text{ V}$ , které je potřebné pro činnost proudové pojistky. Toto napětí vzniká na odporu  $R_0$  průchodem výstupního proudu  $I_S$  stabilizátoru. Odpor  $R_0$  tak vypočteme ze vztahu:

$$R_0 = \frac{U_{BE}}{I_S} = \frac{0,7}{1,2} \Omega \doteq 0,58 \Omega$$

## 9. Logické obvody

Logické obvody jsou stavebními prvky číslicových obvodů. Pracují s diskrétními časovými signály - signály nabývají konečného počtu hodnot, nejčastěji pouze dvou [1].

Základem číslicových obvodů je tudíž binární (dvojková) soustava. Libovolné číslo zapsané v binárním zápisu obsahuje pouze jedničky nebo nuly. Jednička na  $(n+1)$ . místě od konce binárního čísla vyjadřuje obsazenost jeho  $(n+1)$ . bitu, resp. že totéž číslo zapsané v decimálním (desítkovém) zápisu obsahuje  $n$ -tou mocninu dvojky ( $1 \cdot 2^n$ ).

Převod čísla z binárního do desítkového zápisu a naopak si budeme demonstrovat na příkladu:

$$\text{bin. } 1101101 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 109 \text{ dec.}$$

$$\text{dec. } 154 = 128 + 16 + 8 + 2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = 10011010 \text{ bin.}$$

V binární soustavě provádíme též stejné aritmetické operace jako v soustavě desítkové. Základní operací je součet.

Součet v bin. soustavě: - klasický jako v desítkové soustavě + navíc platí tato základní pravidla pro součet:  $0 + 0 = 0; 1 + 0 = 0 + 1 = 1;$

$1 + 1 = 10$  - přechod do vyššího bitu

Př.:	dec.	bin.	
	45	=	101101
	<u>+37</u>	=	<u>+100101</u>
	82	=	1010010

Sčítání využíváme i v operacích násobení, dělení, umocňování a odmocňování.

Ještě uvedeme základní pravidla pro součin v bin. soustavě:

$$0 \times 0 = 0; 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0; 1 \times 1 = 1$$

Binární rozdíl je opět založen na bin. sčítání. K danému binárnímu číslu B (zapsanému pomocí 1 a 0), jež chceme odečist od bin. čísla A, vytvoříme bin. číslo C, tzv. doplněk do dvojky (zinvertujeme všechny byty čísla B a k číslu, jenž tímto získáme, přičteme jednotku). Výsledek rozdílu dvou bin. čísel (A - B) najdeme jako bin. součet čísel (A + C), přičemž se omezíme jen na počet bitů, jež mělo bin. číslo A.

Názornější bude opět příklad:

Př.:	dec. $8 - 5 = 3 \Rightarrow A = 8 \text{ dec.} = 1000 \text{ bin.} - \text{ má 4 byty}$
	$B = 5 \text{ dec.} = 0101 \text{ bin.}$
	$\text{inv.} B = 1010 \text{ bin.}$
	$C = (\text{inv.} B + 0001) \text{ bin.} = 1011 \text{ bin.}$
	$A - B = A + C = 1000 \text{ bin.} + 1011 \text{ bin.}$
	$= 10011 \text{ bin.}$

Výsledek rozdílu A - B je číslo 10011 bin. omezené pouze na 4 byty (tolik jich má právě číslo A). Výsledkem rozdílu bin. čísel A - B bude tedy číslo 0011 bin., které je v desítkové soustavě rovno třem.

Jak již bylo uvedeno logické obvody pracují s diskrétními signály, které nabývají obvykle hodnot logické 1 nebo logické 0. Ty jsou představovány určitou napěťovou úrovní. V pozitivní logice má logická 1 napěťovou úroveň vyšší (cca 2,5 - 4 V) než logická 0 (0,4 - 0,8 V). U negativní logiky je tomu právě naopak.

Mezi logické obvody patří např. různá hradla, invertory, klopné obvody apod. [1] Logické obvody rozdělujeme obecně na kombinační a sekvenční. U kombinačních logických obvodů je stav na jejich výstupu určen pouze aktuálním stavem na jejich vstupech, kdežto u sekvenčních logických obvodů výstupní stav nezávisí jen na okamžitém stavu vstupů, ale i na jejich stavech předchozích. Příkladem kombinačních logických obvodů jsou např. jednotlivá hradla OR, AND, NOR, NAND, invertor, EXCLUSIVE OR (NOR), jednobitová sčítáčka složená z hradel NAND atd. Mezi sekvenční logické obvody patří např. klopné obvody (R-S, R-S-T, MASTER SLAVE), posuvné registry, čítače apod. [5] [12].

## Booleova algebra

Pro jednotlivé logické obvody sestavujeme jejich pravdivostní tabulky, obsahující různé kombinace stavů vstupních a výsledné výstupní stavů jim odpovídající. Svým způsobem lze na stav na výstupu nahlížet jako na funkční hodnotu logické funkce F, mající proměnné dané

vstupními stavy. Při práci s logickými funkcemi používáme obvykle základní pojmy a relace Booleovy algebry.

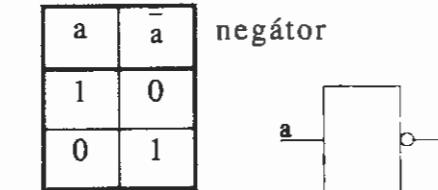
Logickou funkci  $F$  lze tak zapsat např. funkčním zápisem:

$$F = F(a, b, c, \dots), \quad (83)$$

kde  $a, b, c, \dots$  jsou logické proměnné, reprezentované napěťovými úrovněmi daných vstupů.

Dále následuje přehled jednotlivých logických operací u nichž je vždy uveden jejich zápis, pravdivostní tabulka a označení a značka hradla, jenž danou operaci zastupuje.

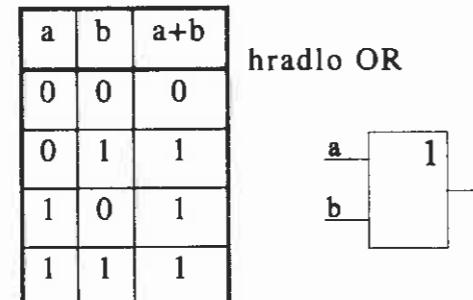
#### 1) Negace: $f = \bar{a}$



- je roven jedné, když proměnná nabývá hodnoty 0 a naopak

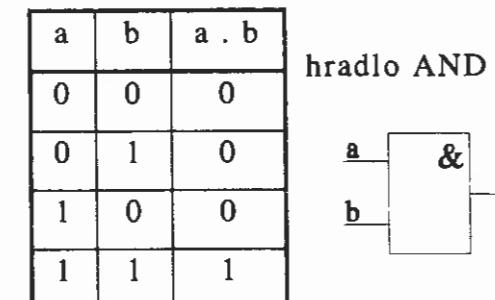
#### 2) Logický součet: $f = a + b$

- je roven jedné, když alespoň jedna z proměnných nabývá hodnoty 1



#### 3) Logický součin: $f = a \cdot b$

- je roven jedné, když obě vstupní proměnné mají hodnotu 1

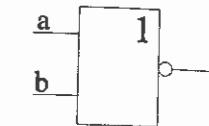


#### 4) Negovaný součet: $f = \overline{a+b}$

- je roven jedné, když obě vstupní proměnné mají hodnotu 0

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

hradlo NOR



#### 5) Negovaný součin: $f = \overline{a \cdot b}$

- je roven jedné, když alespoň jedna vstupní proměnná nemá hodnotu 1

a	b	$\overline{a \cdot b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

hradlo NAND



#### Základní vztahy Booleovy algebry

(84)

- |                    |                      |                          |
|--------------------|----------------------|--------------------------|
| 1) $a = a$         | 2) $a + 0 = a$       | 3) $a + a = a$           |
| 4) $a + 1 = 1$     | 5) $a + \bar{a} = 1$ | 6) $a \cdot 1 = a$       |
| 7) $a \cdot 0 = 0$ | 8) $a \cdot a = a$   | 9) $a \cdot \bar{a} = 0$ |

De Morganovy vztahy: - dají se zobecnit na libovolný počet proměnných

$$\begin{aligned} a) \overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b} \\ b) \overline{a+b} &= \overline{a} \cdot \overline{b} \end{aligned} \quad (85)$$

Pro úplnost je třeba se zmínit, že v Booleově algebře platí tytéž zákony jako v klasické algebře matematické (zákon komutativní, asociativní a distributivní).

#### Komutativní zákon:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \quad (86)$$

#### Asociativní zákon:

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(87)

Distributivní zákon:

$$a.(b+c) = (a.b) + (a.c) \quad (88)$$

$$a+(b.c) = (a+b).(a+c) \quad (89)$$

Rovnost (89) platí pouze v Booleově algebře. V klasické algebře ji nelze obecně použít.

Logická funkce  $F$  nemusí vždy být definována pouze zápisem (83) nebo pravdivostní tabulkou. K zápisu funkce  $F$  slouží též tzv. Karnaughova mapa. Představuje jí tabulka, která má  $2^n$  políček, kde  $n$  je počet logických proměnných ( $a, b, c, \dots$ ). Jde vlastně o grafickou metodu vyjádření stavů na výstupech (fce  $F$ ) v závislosti na kombinaci jednotlivých vstupů. Na obr. č. 9.1 je ukázka Karnaughovy mapy pro 3 logické proměnné ( $a, b, c$ ), přičemž funkce  $F$  je dána následujícím zápisem:

$$F = a.b.\bar{c}$$

Jedničky jsou přitom na místech odpovídajících funkci  $a$ , funkci  $b$  a negaci funkce  $c$ .

	$\bar{c}, \bar{b}$	$\bar{c}, b$	$b, c$	$\bar{b}, c$
$\bar{a}$	0	0	0	0
$a$	0	1	0	0

obr. č. 9.1

Tvar Karnaughovy mapy obecné funkce 4 logických proměnných ( $a, b, c, d$ ) může být jako na obr. č. 9.2.

	$\bar{a}, \bar{b}$	$\bar{a}, b$	$a, b$	$a, \bar{b}$
$\bar{c}, \bar{d}$				
$\bar{c}, d$				
$c, \bar{d}$				
$c, d$				

obr. č. 9.2

### PŘÍKLAD 9.1:

Převeďte z desítkové soustavy do dvojkové soustavy čísla 1038; 67; 19; 7.

Řešení: Číslo  $(1038)_{10}$  se převádí do dvojkové soustavy takto:

Postupně dělíme dvěma a zapisujeme zbytky dělení.

1038 : 2 = 519	Zbytek	0
519 : 2 = 259		1
259 : 2 = 129		1
129 : 2 = 64		1
64 : 2 = 32		0
32 : 2 = 16		0
16 : 2 = 8		0
8 : 2 = 4		0
4 : 2 = 2		0
2 : 2 = 1		0
1 : 2 = 0		1

Zbytky dělení čtené zdola nahoru udávají dvojkový zápis našeho čísla.

Platí tedy:  $(1038)_{10} = (10000001110)_2$

Správnost výpočtu lze ověřit vyčíslením jednotlivých dvojkových řádů a jejich sečtením.

$$\begin{array}{r}
 1 \times 1024 = 1024 \\
 0 \times 512 = 0 \\
 0 \times 256 = 0 \\
 0 \times 128 = 0 \\
 0 \times 64 = 0 \\
 0 \times 32 = 0 \\
 0 \times 16 = 0 \\
 1 \times 8 = 8 \\
 1 \times 4 = 4 \\
 1 \times 2 = 2 \\
 0 \times 1 = 0 \\
 \\ 
 1038
 \end{array}$$

Převod byl tedy správný. Připomínáme, že čísla ve druhém sloupci kontrolního výpočtu (1024, 512, 256, 128, ...) jsou mocniny čísla 2 a tvoří hodnoty jednotlivých míst ve dvojkové soustavě.

Podobně převedeme číslo  $(67)_{10}$  do dvojkové soustavy:

$67 : 2 = 33$	Zbytek	1	Kontrola:	64
$33 : 2 = 16$		1		2
$16 : 2 = 8$		0		<u>1</u>
$8 : 2 = 4$		0		67
$4 : 2 = 2$		0		
$2 : 2 = 1$		0		
$1 : 2 = 0$		1		

Tedy:  $(67)_{10} = (1000011)_2$

Zápis výpočtu jsme při kontrole zkrátili tím, že jsme vynechali ty členy z dvojkové soustavy, které mají nulovou hodnotu.

Dále převedeme číslo  $(19)_{10}$ :

$19 : 2 = 9$	Zbytek	1
$9 : 2 = 4$		1
$4 : 2 = 2$		0
$2 : 2 = 1$		0
$1 : 2 = 0$		1

Kontrola:  $16 + 2 + 1 = 19$

Tedy:  $(19)_{10} = (10011)_2$

Podobně lze odvodit i převod čísla 7:

$(7)_{10} = (111)_2$       Kontrola:  $4 + 2 + 1 = 7$

### PŘÍKLAD 9.2:

Ve dvojkové soustavě provedte tyto početní úkony:

$$1038 + 67 + 19 + 7; \quad 67 - 19; \quad 19 \times 7; \quad 67 \times 7.$$

Výsledky výpočtů převeďte zpět do desítkové soustavy a ověřte správnost výpočtů.

**Řešení:** Připomeňme si několik základních pravidel pro sčítání ve dvojkové soustavě:

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1; \quad 1 + 1 = 10; \quad 1 + 1 + 1 = 11; \quad 1 + 1 + 1 + 1 = 100$$

Nyní již můžeme přikročit ke čítání čísel ze zadání:

$1038$	$10000001110$
$67$	$1000011$
$19$	$10011$
<u>7</u>	<u>111</u>
$1131$	$10001101011$

Kontrola:  $1024 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 1131$

Nyní přistoupíme k rozdílu  $67 - 19$ :

$67$	$1000011$
<u>- 19</u>	<u>- 0010011</u>
48	?

Číslo  $(1000011)_2$  označíme jako A, číslo  $(0010011)_2$  pak jako B. Nyní vytvoříme doplněk C čísla B do dvojky:

$$C = \text{inv.}B + 1 = (1101100 + 0000001)_2 = (1101101)_2$$

Z teorie víme, že rozdíl  $(A - B)_2$  je roven součtu  $(A+C)_2$  omezenému na počet bitů čísla A:

$1000011$	
<u>+ 1101101</u>	
$(1)\underline{0110000}$	kontrola: $32+16=48$ .

Výsledkem rozdílu  $(67 - 19)_{10}$  je binární číslo  $(110000)_2$ .

Před výpočtem posledních dvou výrazů si znova zopakujeme základní pravidla pro násobení ve dvojkové soustavě:

$$0 \times 0 = 0; \quad 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0; \quad 1 \times 1 = 1$$

A tak:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 7 \\ \hline 469 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000011 \\ \underline{\times 111} \\ 1000011 \\ 1000011 \\ \hline 1000011 \\ 111010101 \end{array}$$

$$\text{Kontrola: } 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 1 = 469.$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \underline{\times 111} \\ 10011 \\ 10011 \\ \hline 10011 \\ 10000101 \end{array}$$

$$\text{Kontrola: } 128 + 4 + 1 = 133.$$

### PŘÍKLAD 9.3:

Realizujte invertor pomocí a) dvouvstupového hradla NAND.  
b) dvouvstupového hradla NOR.

**Řešení:** a) invertor lze pomocí hradla NAND realizovat dvěma způsoby:

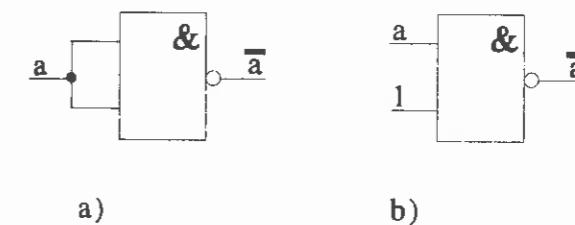
1) Spojíme - li vstupy hradla NAND nakrátko (zkratujeme- li je), bude platit, že  $\overline{a \cdot a} = \overline{a} + \overline{a} = \overline{a}$

Hradlo bude tedy zapojeno podle obr. č. 9.3 a).

2) Připojíme- li na jeden vstup signálovou úroveň 1, bude platit, že  $\overline{a \cdot 1} = \overline{a} + \overline{1} = \overline{a} + 0 = \overline{a}$ .

Hradlo bude nyní zapojeno podle obr. č. 9.3 b).

Výše uvedené výpočty jsou přímým důsledkem De- Morganových vztahů a zákl. vztahů Booleovy algebry [12].



obr. č. 9.3

b) Invertor lze pomocí hradla NOR realizovat opět dvěma způsoby, při výpočtech využijeme zákl. vztahů Booleovy algebry

1) Zkratujeme- li vstupní svorky hradla NOR, bude platit, že:

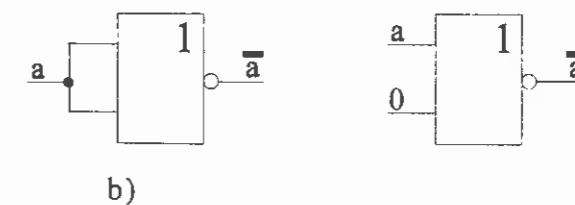
$$\overline{a + a} = \overline{a}$$

Hradlo bude zapojeno podle obr. č. 9.4 a).

2) Připojíme- li na jeden vstup hradla NOR nulu, bude platit vztah:

$$\overline{a + 0} = \overline{a}$$

Zapojení tohoto invertoru je na obr. č. 9.4. b)



obr. č. 9.4

### PŘÍKLAD 9.4:

Invertujete tyto funkce:

$$a) a \cdot [\bar{b} + c\bar{d} + \bar{e}\bar{f}], \quad b) [(\bar{a}\bar{b} + cd)e + f] \cdot (\bar{g} + \bar{h}), \quad c) \bar{a} + \bar{b}c[(\bar{d}\bar{e} + fg\bar{h}) \cdot (\bar{k} + \bar{l})]$$

Řešení: Při výpočtech použijeme De Morganova pravidla:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}.$$

$$\begin{aligned} a) a \cdot [\bar{b} + c\bar{d} + \bar{e}\bar{f}] &= \bar{a} + (\bar{b} + c\bar{d} + \bar{e}\bar{f}) = \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot \bar{e} \cdot \bar{f} = \bar{a} + b \cdot (\bar{c} + \bar{d}) \cdot (\bar{e} + \bar{f}) = \\ &= \bar{a} + b \cdot (\bar{c} + \bar{d}) \cdot (\bar{e} + \bar{f}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) [(\bar{a}\bar{b} + cd)e + f] \cdot (\bar{g} + \bar{h}) &= [(\bar{a}\bar{b} + cd)e + f] + \bar{g} + \bar{h} = (\bar{a}\bar{b} + cd)e \cdot \bar{f} + \bar{g} \cdot \bar{h} = \\ &= ((\bar{a}\bar{b} + cd) + \bar{e}) \cdot \bar{f} + \bar{g} \cdot \bar{h} = (\bar{a}\bar{b} \cdot \bar{c} \bar{d} + \bar{e}) \cdot \bar{f} + \bar{g} \cdot \bar{h} = \\ &= [(\bar{a} + b) \cdot (\bar{c} + \bar{d}) + \bar{e}] \cdot \bar{f} + \bar{g} \cdot \bar{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \bar{a} + \bar{b}c[(\bar{d}\bar{e} + fg\bar{h}) \cdot (\bar{k} + \bar{l})] &= \bar{a} \cdot \bar{b}c[(\bar{d}\bar{e} + fg\bar{h}) \cdot (\bar{k} + \bar{l})] = \\ &= \bar{a} \cdot [\bar{b}c + (\bar{d}\bar{e} + fg\bar{h}) \cdot (\bar{k} + \bar{l})] = \bar{a} \cdot [\bar{b} + \bar{c} + \bar{d}\bar{e} + fg\bar{h} + \bar{k} + \bar{l}] = \\ &= \bar{a} \cdot [(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{d}\bar{e} \cdot fg\bar{h} + \bar{k} \cdot \bar{l}] = \bar{a} \cdot [(\bar{b} + \bar{c}) + (\bar{d} + \bar{e}) \cdot (\bar{f} + \bar{g} + \bar{h}) + \bar{k} \cdot \bar{l}] = \\ &= \bar{a} \cdot [(\bar{b} + \bar{c}) + (\bar{d} + \bar{e}) \cdot (\bar{f} + \bar{g} + \bar{h}) + \bar{k} \cdot \bar{l}]. \end{aligned}$$

### PŘÍKLAD 9.5:

Dané logické funkce převeďte do tvaru, v němž se vyskytuje pouze logické funkce „součin a negace“.

$$a) F(a, b, c) = \bar{a} \bar{b} c + a \bar{b} \bar{c} + abc + \bar{a} \bar{b} \bar{c}$$

$$b) F(a, b, c) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{c} + a) \cdot (c + b)$$

$$c) F(a, b, c) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} + abcd + abc d$$

Řešení:

a) Nejjednodušší je použít dvojité negace funkce F a De Morganova pravidla

$$F(a, b, c) = \bar{\bar{F}}(a, b, c) = \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}} + a \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}} + \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}} + \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}} \cdot \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \bar{\bar{c}}$$

V tomto výrazu se vyskytuje jenom součiny a negace proměnných, výraz však není v jednoduchém tvaru.

b) Výraz se pokusíme povolenou úpravou rovněž zjednodušit. Po roznásobení závorek je:

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= \bar{a} \bar{c} c + \bar{b} a b + \bar{a} \bar{c} b + \bar{a} a b + \bar{a} a c + \bar{b} \bar{c} c + \bar{b} a c + \bar{b} c b = \\ &= 0 + 0 + \bar{a} c b + 0 + 0 + 0 + 0 + \bar{b} a c + 0 = \bar{a} \bar{b} \bar{c} + a b c = b \cdot (\bar{a} \bar{c} + a c) = \\ &= b \cdot (\bar{\bar{a}} \bar{\bar{c}} \cdot \bar{\bar{a}} c). \end{aligned}$$

c) Podobně upravíme i tento příklad:

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= a \cdot [\bar{b} \bar{c} d + \bar{b} c \bar{d} + b c d] = a \cdot [\bar{b} d (\bar{c} + c) + b c d] = \\ &= a \cdot [\bar{b} d \cdot 1 + b c d] = a \cdot [\bar{\bar{b}} \bar{\bar{d}} \cdot \bar{\bar{b}} d]. \end{aligned}$$

### PŘÍKLAD 9.6:

Převeďte následující funkce na jednodušší algebraický tvar:

a)  $(a+b)c + (\bar{a}\bar{b}+c).(a+c) + (a+b+\bar{a}\bar{b}+ab)c$ ,

b)  $ab+a\bar{b}c+a\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+a\bar{c}$ ,

c)  $abd+a\bar{b}\bar{c}+abc+b\bar{c}+ad+bd+abcd$ .

### Řešení:

a)  $(a+b)c + (\bar{a}\bar{b}+c).(a+c) + (a+b+\bar{a}\bar{b}+ab)c = ac+bc+a\bar{a}\bar{b}+a\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+c\bar{c} + (a+b+1).c = ac+bc+0+a.(1-c)+\bar{a}\bar{b}c+0+c = ac+bc+a-ac+\bar{a}\bar{b}c+c = a+c.(b+\bar{a}\bar{b}+1)=a+c.(b+1)=a+c.1=a+c$

b)  $ab+a\bar{b}c+a\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+a\bar{c}=ab+a\bar{b}.(c+\bar{c})+\bar{b}\bar{c}+a\bar{c}=ab+a\bar{b}.1+a\bar{c}+\bar{b}\bar{c}=a.(b+\bar{b}+\bar{c})+\bar{b}\bar{c}=a.(1+\bar{c})+\bar{b}\bar{c}=a+\bar{b}\bar{c}$

c)  $abd+a\bar{b}\bar{c}+abc+b\bar{c}+ad+bd+abcd=abd.(1+c)+ab.(c+\bar{c})+bc+ad+bd=abd+ab.1+bc+ad+bd=ab(d+1)+bc+ad+bd=ab+ad+bc+bd$ .

### PŘÍKLAD 9.7:

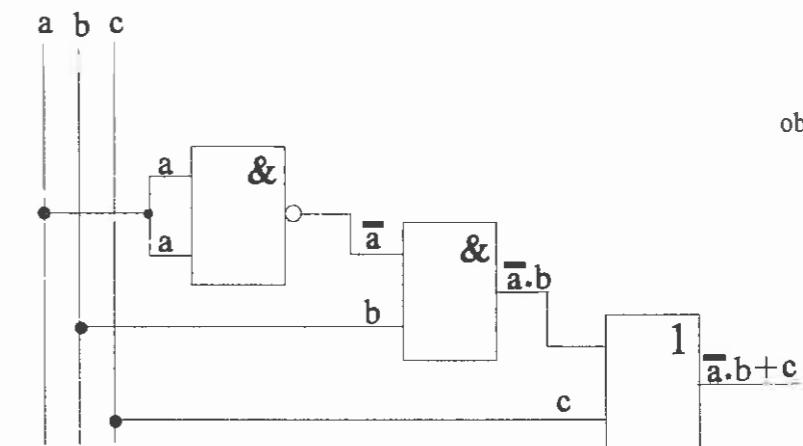
Minimalizujte algebraickou funkci F a nakreslete její logický obvod pomocí hradel. Funkce F má tvar:

$$F = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + abc.$$

**Řešení:** Danou funkci F nejprve upravíme do jednoduššího tvaru následujícím postupem:

$$\begin{aligned} F &= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + abc = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + c.[\bar{a}.(b+\bar{b}) + a.(b+\bar{b})] = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + c = \\ &= \bar{a}.b.(1-c) + c = \bar{a}b + c - \bar{a}bc = \bar{a}b + c(1-\bar{a}b) = \bar{a}b + c.1 = \bar{a}b + c. \end{aligned}$$

Logický obvod této zjednodušené funkce je na obr. č. 9.5. Je složen ze tří hradel, a to z jednoho invertoru (realizován pomocí hradla NAND), jednoho součinového AND a jednoho součtového hradla OR.



obr. č. 9.5

### PŘÍKLAD 9.8:

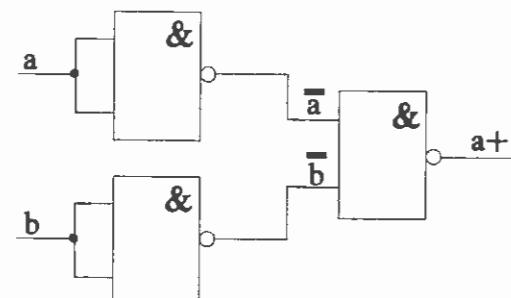
Sestavte pomocí hradel NAND logický obvod pro dvě proměnné, kterým lze realizovat logickou funkci součet a součin.

**Řešení:** Nejprve sestavíme logický obvod pro logickou funkci součet, následně pak pro logickou funkci součin.

- a) Výraz pro součet upravíme dvojím negováním a použitím De Morganova pravidla na tvar:

$$F = a + b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = \overline{a} / \overline{b}.$$

Jeho realizace pomocí dvouvstupových hradel NAND je pak na obr. č. 9.6.

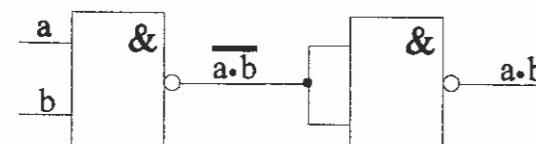


obr. č. 9.6

- b) Výraz pro součin upravíme dvojím negováním na tvar:

$$F = a \cdot b = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a/b}.$$

Jeho realizace pomocí hradel NAND je pak na obr. č. 9.7.



obr. č. 9.7

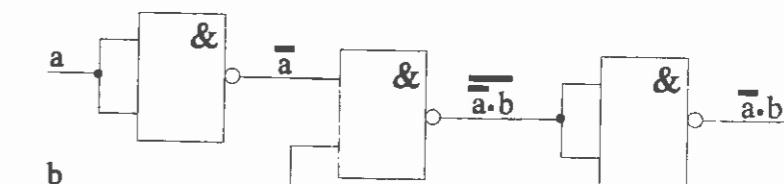
### PŘÍKLAD 9.9:

Pomocí hradel NAND realizujte funkci  $F = \overline{\overline{a}} \cdot b + c$ .

**Řešení:** Řešení tohoto příkladu budeme provádět ve dvou krocích [8]. Nejdříve upravíme následující výraz:

$$G = \overline{\overline{a}} \cdot b = \overline{a} \cdot \overline{b}.$$
(90)

Realizací funkce G z výrazu (90) je logický obvod na obr. č. 9.8.

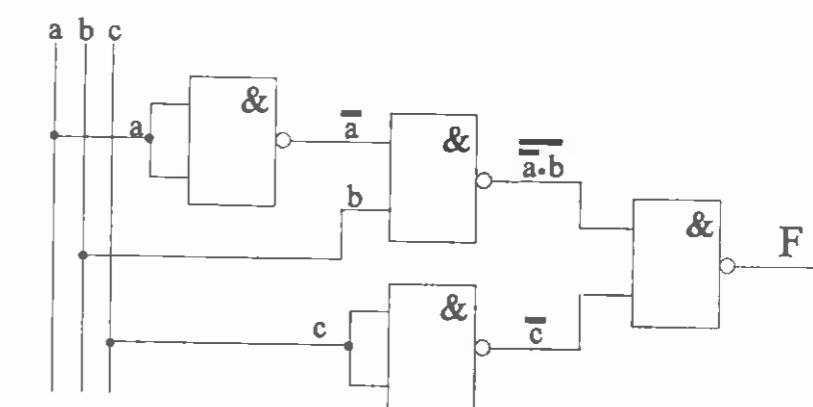


obr. č. 9.8

Dále upravíme původní funkci F následujícím způsobem:

$$F = \overline{\overline{a}} \cdot b + c = \overline{\overline{a}} \cdot \overline{b} + c = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} \cdot \overline{c} = \overline{G} \cdot \overline{c}.$$
(91)

Vidíme, že ve funkci F se vyskytují proměnné  $G$ ,  $c$ . Realizaci fce G pomocí hradel NAND již známe, lze tedy určit i realizaci celého obvodu (viz obr. č. 9.9) pro funkci F z jejího vyjádření (91).



obr. č. 9.9

### PŘÍKLAD 9.10:

Logická funkce F tří proměnných je dána následující tabulkou. Určete algebraický výraz dané funkce v úplné disjunktní formě.

Stav	a	b	c	F
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	1	1	0	0
5	0	0	1	1
6	1	0	1	1
7	0	1	1	1
8	1	1	1	1

Řešení: Funkce F bude rovna jedné, bude-li platit, že (stav 3)  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=1$  nebo (stav 5)  $\bar{a}\bar{b}c=1$  nebo (stav 6)  $a\bar{b}c=1$  nebo (stav 7)  $\bar{a}b\bar{c}=1$  nebo (stav 8)  $a\bar{b}c=1$ .

Tedy: 
$$F = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c + \bar{a}bc + ab\bar{c}. \quad (92)$$

Vyjádření (92) je algebraickým výrazem funkce F, dané výše uvedenou tabulkou. Dosadíme-li jednotlivé hodnoty proměnné všech stavů, přesvědčíme se o platnosti rovnice [8].

### PŘÍKLAD 9.11:

Funkce F dvou proměnných je zadána následující tabulkou.

Stav	a	b	F
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	0
4	1	1	1

Určete algebraický výraz dané funkce, co nejvíce jej zjednodušte a danou funkci F zapište do Karnaughovy mapy a realizujte ji pomocí hradel NAND

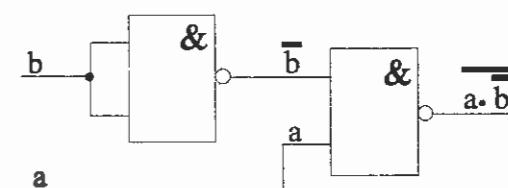
Řešení: Funkci F vyjádříme jako součet součinů proměnných a,b ve kterých nabývá fce F hodnoty 1. Tedy:

$$F = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b}. \quad (93)$$

Fci F vyjádřenou v (93) dále zjednodušíme:

$$\begin{aligned} F &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} = \bar{a}(\bar{b} + b) + a\bar{b} = \bar{a}\cdot 1 + a\bar{b} = \bar{a} + a\bar{b} = \bar{a} + \bar{a}\bar{b} = a\bar{a}b = \\ &= a\cdot(\bar{a} + \bar{b}) = a\cdot\bar{a} + a\cdot\bar{b} = \bar{a}\bar{b}. \end{aligned} \quad (94)$$

Funkci F vyjádřenou zjednodušeným zápisem (94) lze pomocí hradel NAND realizovat např. podle obr. č. 9.10.



obr. č. 9.10

Ještě funkci F přepíšeme do Karnaughovy mapy (obr. č. 9.11):

$$\bar{b} \quad b$$

	1	1
	0	1

obr. č. 9.11

Uvedená Karnaughova mapa nám umožňuje přepsat funkci F z (93) do jednoduššího tvaru:  $F = \bar{a} + ab = b + \bar{a}\bar{b}$ .

### PŘÍKLAD 9.12:

Logická funkce F tří proměnných je definována následují tabulkou:

Stav	a	b	c	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Zapište tuto funkci do Karnaughovy mapy.

**Řešení:** U Karnaughovy mapy se při přechodu z jednoho polička na druhé ve vodorovném i svislém směru mění vždy hodnota pouze jedné proměnné.

Karnaughova mapa funkce F, jejíž jednotlivé údaje značí čísla stavů ze zadání je na obr. č. 9.12. Vlastní Karnaughova mapa funkce F je pak na obr. č. 9.13.

1	3	4	2
5	7	8	6

obr. č. 9.12 - mapa stavů

$\bar{c}, \bar{b}$     $\bar{c}, b$     $b, c$     $\bar{b}, c$

$\bar{a}$	1	1	0	0
a	1	0	0	1

obr. č. 9.13 - Karnaughova mapa fce F

Uvedená Karnaughova mapa nám umožnuje funkci F ze zadání vyjádřit v následujícím tvaru:  $F = \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$ .

### PŘÍKLAD 9.13:

Do Karnaughovy mapy zapište logickou funkci F čtyř proměnných danou následujícím zápisem:  $F(a,b,c,d) = a\bar{b} + a\bar{c} + b.d$ . (95)

**Řešení:** Jelikož jde o funkci 4 proměnných, Karnaughova mapa bude mít tentokrát  $2^4 = 16$  poliček. Jedničky budou v poličkách, kde se v souladu se zadáním funkce (95) protínají  $a$  s  $\bar{b}$ , dále  $a$  s  $\bar{c}$  a též  $b$  s  $d$ . V ostatních poličkách jsou nuly.

Hledaná Karnaughova mapa dané funkce F je vyznačena na obr. č. 9.14.

$\bar{a}, \bar{b}$     $\bar{a}, b$     $a, b$     $a, \bar{b}$

$\bar{c}, \bar{d}$	0	0	1	1
$\bar{c}, d$	0	1	1	1
$c, d$	0	1	1	1
$c, \bar{d}$	0	0	0	1

obr. č. 9.14

## Seznam použité literatury

- [1] Matásek K., Rauner K.: **Základy elektroniky**, PF Plzeň, 1978
- [2] Maťátko J., Foitová E.: **Elektronika - učebnice pro 3. ročník SPŠE**, Alfa Bratislava, 1983
- [3] Hubeňák J.: **Elektronika - učební text pro III. ročník studia učitelství fyziky**, Gaudeamus Hradec Králové, 1991
- [4] Maťátko J.: **Elektronika**, Idea Servis Praha, 1995
- [5] Frisch H.: **Základy elektroniky a elektronických obvodů**, SNTL Praha, 1987
- [6] Vaníček F., Novák V., Hudec L.: **Řešené příklady z elektroniky I**, ČVUT Praha, 1971
- [7] Šícha M., Tichý M.: **Elektronické obvody II (Metody zpracování signálu)**, SPN Praha, 1982
- [8] Pelikán L., Škoda J., Foit J.: **Základy elektroniky - řešené příklady**, ČVUT Praha, 1977
- [9] Jakubcová H.: **Příklady z elektrotechniky a elektroniky**, ČVUT Praha, 1982
- [10] kolektiv: **Příklady z elektrotechniky a elektroniky**, ČVUT Praha, 1996
- [11] Meluzin H., Dvořáček J., Hrebík A.: **Elektrotechnická praxe v příkladech**, SNTL Praha, 1986
- [12] Přednášky a cvičení z elektroniky, III. ročník studia fyziky PF Č.B.