

OTEVŘENÉ A POLYVALENTNÍ ÚLOHY ANEB „MÁME TU NĚKOHO, KDO TO ŘEŠIL JINAK?“

Libuše Samková

Abstrakt

Príspevek predstavuje tzv. otvorený prístup k matematickému vzdelávaniu a z neĥ vycházejúce pojmy otvorená úloha, polyvalentná úloha. Shrnúje súvisujúci pedagogický výskum, včeteň empirického šetrení o systematickém uplatňovaní otvoreného prístupu v profesní príprave učitelú prvého stupne základní školy. Otvorené a polyvalentné úlohy mívajú ve výuce zpravidla podobu úloh slovních nebo úloh vyžadujúcich hledání vlastností matematických objektů a jejich zobecňování, příspěvek představuje i další možnou podobu: úlohy Concept Cartoons.

1 ÚVOD

Mezi nejčastější mylné představy o matematice patří názory, že každá matematická úloha má právě jedno řešení a že ke každé matematické úloze existuje jen jeden správný postup řešení [26]. Otvřené a polyvalentní úlohy jsou matematické úlohy, které tyto mylné názory vyvracejí, neboť mají více různých řešení nebo více různých správných postupů řešení. Jedna z možností, jak je začlenit do výuky, spočívá ve sdílení těchto různých řešení a postupů řešení, například formou jejich postupného vypisování na tabuli a vzájemného porovnávání. Zahraníční výzkumy ukazují, že taková sdílení a porovnávání mají pozitivní vliv na porozumění žáků [1,9]. Aktuální český výzkum [23] se věnuje důsledkům systematického uplatňování takového přístupu v profesní přípravě učitelů prvního stupně základní školy a nabízí výsledky, které jsou přenositelné do výuky matematiky na základních a středních školách.

V tomto příspěvku si představíme teoretický přístup k problematice otevřených a polyvalentních úloh a jejich uplatňování ve výuce, související výzkumy, a také prostředí Concept Cartoons, které je jednou z možností, jak otevřené a polyvalentní úlohy do výuky zařazovat.

2 TEORETICKÝ RÁMEC

2.1 OTEVŘENÉ A POLYVALENTNÍ ÚLOHY

Otevřený přístup k matematickému vzdělávání je didaktický rámec, který vznikl v 70. letech 20. století v Japonsku [2] a v letech následujících byl rozvíjen [14, 15]. V Asii a Austrálii bývá často využíván v dalším vzdělávání učitelů matematiky, obvykle jako součást tzv. *lesson study*, intenzivní formy spolupráce učitelů, která má v Japonsku více než stoletou tradici [17, 29].

Tento rámec přistupuje k matematickému vzdělávání prostřednictvím učebních úloh, které nazývá *otevřené*. Otevřené úlohy splňují aspoň jednu z následujících charakteristik:

- mají otevřenou vstupní situaci, tj. existuje více způsobů, jak úlohu uchopit;
- mají otevřený postup řešení, tj. existuje více způsobů, jako úlohu řešit;
- mají otevřenou výslednou situaci, tj. existuje více řešení (výsledků) úlohy;
- mají otevřenou další cestu, tj. existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou;

a tyto charakteristiky bývají při výuce akcentovány.

Otevřenost vstupní situace může být způsobena nejednoznačností zadání úlohy nebo nejasnou důležitostí jevů klíčových pro správné vyřešení úlohy. Otevřenost výsledné situace může být způsobena otevřeností vstupní situace, ale i existencí více řešení k jednoznačně zadané úloze [22]. U úloh s otevřenou výslednou situací řešitel často obdrží různá řešení úlohy, jejichž klasifikace může být nejasná, neproveditelná nebo subjektivní; tímto aspektem otevřených úloh se zabýval Koman a Tichá [10]. Otevřenost vstupní situace a otevřenost výsledné situace se často objevují u úloh založených na praktických problémech.

Speciálním typem otevřených úloh jsou úlohy *polyvalentní*, což jsou úlohy, které mají více různě obtížných postupů řešení nebo více různě obtížných řešení (výsledků). Při řešení vhodně sestavené polyvalentní úlohy si tak každý žák může najít „své“ řešení odpovídající jeho schopnostem a znalostem [8, 19, 22].

Při hodnocení v rámci otevřeného přístupu mohou být žakovská řešení úloh hodnocena nejen na základě správnosti předložených řešení, ale také podle toho, kolik různých postupů řešení nebo řešení je žák schopen předložit, kolik různých myšlenek při řešení použil nebo objevil, do jaké míry jsou předložená řešení originální, do jaké míry je žakovo myšlení elegantní [14]. Bulková a Čerťková [3] využívají otevřené úlohy v matematických soutěžích, kde při hodnocení zdůrazňují spíše analytické a praktické aspekty, a tak žakovská řešení hodnotí podle správnosti závěrů (jejich přesnosti, srozumitelnosti, relevance), aplikovatelnosti závěrů a použitého postupu (do jaké míry mohou být zobecněny a použity ve stejném, podobném nebo odlišném kontextu) a originality.

2.2 POROVNÁVÁNÍ STRATEGIÍ ŘEŠENÍ

Otevřené a polyvalentní úlohy jsou vhodnými úlohami pro realizaci výuky zahrnující prezentaci různých strategií řešení matematických úloh a jejich vzájemné porovnávání (poukazování na shody a rozdíly). Taková výuka má potenciál vést k výuce matematiky s porozuměním [9,28]. Přístup využívající porovnávání strategií řešení se teoreticky opírá o výsledky psychologického výzkumu, které opakovaně naznačují, že proces porovnávání má schopnost podpořit proces učení se v různých oblastech vědění [1], například díky tomu, že pomáhá rozpoznávat obecnější, abstraktnější vztahy mezi porovnávanými objekty. Při porovnávání se využívají analogie, tedy podobnosti uvažované ve vztahu ke konceptům [16], což znamená, že analogie nevnímají jen vnější projevy podobnosti, ale i jejich hlubší podstatu. Při tzv. analogickém kódování žák porovnává příklady strategií, mezi kterými existuje analogie, a díky tomu dokáže porozumět myšlenkovým strukturám, které mají tyto příklady společné. Ukazuje se, žákovi se při takové činnosti zviditelňují a vyjasňují koncepty, a to i v případě, že je dříve neznal nebo jim rozuměl jen částečně [7]. Je doporučováno, aby porovnávané příklady strategií byly na očích během celého procesu porovnávání [18] a aby porovnávání probíhalo formou poukazování na shody [1].

Systematický výzkum na téma vzájemného porovnávání různých strategií řešení různých matematických úloh realizovali Durkinová, Star a Rittle-Johnsonová [6], v jejich studiích nejlepší vliv na znalosti žáků (na jejich procedurální flexibilitu a konceptuální porozumění) vykazalo simultánní porovnávání dvojic různých postupů řešení stejné úlohy, kdy jeden postup byl správný a jeden nesprávný. Loiblová a Leuders [11] proces porovnávání sledovali z jiného pohledu, v jejich studiích bylo pro žáky nejpřínosnější porovnávání dvou správných a dvou nesprávných postupů řešení, kdy žáci byli k porovnávání vyzýváni explicitně učitelem. Ukázalo se, že když žáci porovnávali vlastní chybný postup s analogickým správným postupem, bylo pravděpodobnější, že postřehnou rozdíly mezi oběma postupy a budou je reflektovat, srov. [27].

3 REALIZOVANÉ EMPIRICKÉ ŠETŘENÍ

V akademickém roce 2014/2015 jsme Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích upravili dvousemestrální povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy tak, aby byl v souladu se zásadami badatelsky orientované výuky [20,24], a zrealizovali kvalitativní empirické šetření zaměřené na vliv kurzu na znalosti jeho účastníků a na podobu jejich pedagogické praxe [25]. Badatelské úlohy pro tento kurz byly připravovány, zadávány a řešeny

na základě otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání, a tak vznikla také empirická studie zkoumající podobu kurzu a znalosti jeho účastníků z perspektivy otevřeného přístupu [23]; nyní uvedeme nejdůležitější poznatky této studie.

V první polovině kurzu byly účastníkům otevřené úlohy předkládány ve formě slovních úloh obsahově úzce svázaných s kurikulem matematiky pro první stupeň základní školy, tedy s tím matematickým obsahem, který účastníci kurzu budou v budoucnu sami učit. Při řešení nebylo povoleno využívat aparát mimo toto kurikulum (tj. neznámé, rovnice, nerovnice). Otevřený přístup jsme nejprve představili při řešení slovních úloh s otevřeným postupem řešení, ale s jednoznačně uchopitelnou vstupní situací a jediným řešením. U každé úlohy byli účastníci vyzýváni k hledání různých postupů řešení a zaznamenávání všech nalezených postupů na tabuli. Asi po dvou měsících jsme začali zařazovat i slovní úlohy s otevřenou vstupní situací, s otevřenou výslednou situací nebo s otevřenou cestou; v druhé polovině kurzu pak i otevřené aplikační úlohy (například s požadavkem využití známých pojmů k objevení nového postupu řešení) a úlohy, jež od řešitelů vyžadovaly hledání vlastností matematických objektů a jejich zobecňování. Tyto více otevřené úlohy účastníci nejprve řešili samostatně nebo v malých skupinách, a poté všichni společně na tabuli představovali své postupy a nalezená řešení, diskutovali a obsahovali je, hledali mezi nimi souvislosti. Účastníci kurzu tak opakovaně zažívali proces simultánního představování a porovnávání strategií řešení matematických úloh, správných i chybných, s důrazem na hledání souvislostí, tedy shod mezi porovnávanými strategiemi.

Během kurzu jsme uskutečnili výzkumné šetření hledající odpovědi na výzkumnou otázku „Jak se do způsobu, jakým učitelé prvního stupně základní školy řeší matematické úlohy, promítlo dvousemestrální systematické uplatňování otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání realizované během jejich povinného univerzitního kurzu aritmetiky?“; výzkumnými daty byly záznamy písemných řešení otevřených matematických úloh z celého průběhu kurzu a písemné reflexe kurzu sepsané účastníky na konci kurzu. Jako zjednodušenou odpověď na výzkumnou otázku je možné konstatovat, že většina účastníků (18 z 24) se během kurzu posunula směrem k otevřenému přístupu: akceptují více zápisů jednoho řešení (14 z 24 účastníků), hledají více řešení dané úlohy (12 z 24), řešení už nehledají nahodile, ale systematicky (5 z 24). Jak ukázaly písemné reflexe, mnozí účastníci pozitivně hodnotili zapisování různých postupů řešení na tabuli a jejich diskutování. Někteří ocenili možnost vybírat si z postupů uvedených na tabuli ty, které jim osobně nejvíce vyhovují, jiní přivítali možnost seznamovat se s jinými než vlastními postupy a pohlížet na ně ve vztahu k jejich budoucí pedagogické praxi (rozmanitosti žákovských postupů, se kterými se ve výuce budou setkávat). Klíčovým hlediskem se ukázala obvyklost postupů, které účastníci kurzu používali při řešení otevřených úloh. Z účastníků, kteří byli zvyklí používat

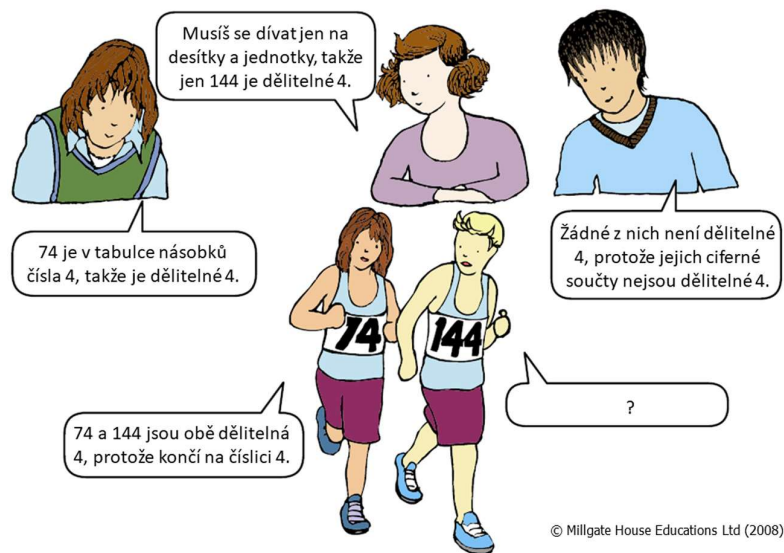
spíše méně obvyklé postupy řešení, se více než dvě třetiny (7 z 10) během kurzu zlepšily v počtu hledaných řešení nebo ve způsobu jejich hledání z nahodilého na systematický. U ostatních účastníků nebylo zlepšení tak výrazné (5 z 14).

4 CONCEPT CARTOONS

Během výše popsaného badatelsky orientovaného kurzu jsme simultánní porovnávání strategií realizovali prostřednictvím řešení rozličných typů matematických úloh a vypisování různých postupů jejich řešení na tabuli. Alternativním prostředím, které dokáže zprostředkovat realizaci simultánního porovnávání různých správných a nesprávných strategií řešení matematických úloh, se ukazuje být prostředí úloh *Concept Cartoons* [21]. Každá úloha Concept Cartoon má podobu obrázku znázorňujícího situaci více či méně se vztahující k vybranému učivu a několik dětí, které prostřednictvím bublinového rozhovoru vyjadřují své názory na tuto situaci. Názory uvedené v bublinách mohou být správné, nesprávné, s nejasnou nebo podmíněnou správností. Concept Cartoons se mohou vztahovat k početním příkladům, aplikačním úlohám (vč. slovních úloh; obr. 1) i matematickým tvrzením (obr. 2); v jednotlivých bublinách mohou být uvedeny



Obr. 1: Concept Cartoon *Kuličky*; obrázky prázdných bublin a dětí převzaty z [5, č. 2.10], obrázek sáčku s kuličkami převzat z [4]

Obr. 2: Concept Cartoon *Běžci*; převzato z [5, č. 1.9], vlastní překlad

různé postupy řešení, výsledky, postupy řešení s výsledky, tvrzení o konkrétních případech, tvrzení o existenci, nebo obecná tvrzení.

Ve výuce jsou Concept Cartoons obvykle nabízeny žákům s otázkami „Co si myslíš ty?“, „Které děti na obrázku mají pravdu?“, „Proč?“ a žáci diskutují o odpovědích na tyto otázky. Výsledky výzkumných šetření [12, 13] ukazují, že taková diskuse může být bohatá a že se jí často zúčastňují i žáci, kteří se jinak zdráhají mluvit nebo projevit svůj názor. Pravděpodobně i proto, že rozdíl od běžné výuky, kdy bývají žáci posuzováni učitelem (a mohou mít obavy z případného selhání), při odpovědích na otázky „Které děti na obrázku mají pravdu?“ a „Proč?“ žáci sami posuzují názor někoho jiného (dítěte na obrázku) a odpovědnost za případnou chybu je možné svést na něj. Nesoulad v názorech, který panuje mezi dětmi na obrázku, zase povzbuzuje k odpovědi na otázku „Co si myslíš ty?“ a k vyjádření vlastního názoru.

5 ZÁVĚR

V tomto příspěvku jsme představili otevřený přístup k matematickému vzdělávání, otevřené úlohy a polyvalentní úlohy, a také způsob, jak je možné tyto úlohy

pravidelně zařazovat do výuky. Ukázali jsme, že je možné otevřené úlohy využít pro porovnávání strategií řešení a že takové využití má potenciál rozvíjet porozumění žáků matematice. Stručně jsme uvedli i empirické výzkumné šetření, během kterého jsme do povinného kurzu aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy systematicky zařazovali otevřené úlohy, a popsali, jak takový kurz probíhal (účastníci kurzu sami psali různé postupy řešení otevřených úloh na tabuli, a pak je společně diskutovali a porovnávali) a jak na něj jeho účastníci reagovali (sami se zlepšili se v otevřeném přístupu, oceňovali možnost vybírat si z nabídky více možných postupů řešení vypsanych na tabuli). Takové poznatky jsou z profesní přípravy učitelů přenositelné do výuky matematiky na základní i střední škole. Jako alternativní prostředí pro realizaci porovnávání strategií řešení matematických úloh jsme představili prostředí Concept Cartoons.

Konkrétní příklady otevřených a polyvalentních úloh v českém jazyce nabízí publikace [10, 19, 20, 22–24] a zdroje v nich uvedené. Typologii úloh Concept Cartoons s konkrétními příklady a návodem k tvorbě nových Concept Cartoons představuje kniha [21].

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl financován z prostředků programu Erasmus+, projekt 2019-1-DE01-KA203-004947: ‘*Digital Support for Teachers’ Collaborative Reflection on Mathematics Classroom Situations*’.

LITERATURA

- [1] ALFIERI, L., NOKES-MALACH, T. J., SCHUNN, C. D. Learning through case comparisons: a meta-analytic review. *Educational Psychologist*. 2013, roč. 48, č. 2, s. 87–113.
- [2] BECKER, J. P., SHIMADA, S. *Open-ended approach*. Reston: NCTM, 1997.
- [3] BULKOVÁ, K., ČERETKOVÁ, S. Creativity as assessed attribute in mathematical open ended problem solving. In *Proceedings of EDULEARN17 Conference*. Barcelona: IATED, 2017, s. 583–590.
- [4] CLIPART LIBRARY, *Marble Bag*. 2016, <http://clipart-library.com/clipart/n735161.htm> (cit. 10. 6. 2020).
- [5] DABELL, J., KEOGH, B., NAYLOR, S. *Concept Cartoons in Mathematics Education (CD-ROM)*. Sandbach: Millgate House Education, 2008.

- [6] DURKIN, K., STAR, J.R., RITTLE-JOHNSON, B. Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education*. 2017, roč. 49, s. 585–597.
- [7] GENTNER, D., LOEWENSTEIN, J., THOMPSON, L. Learning and transfer: a general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology*. 2003, roč. 95, č. 2, s. 393–408.
- [8] HELLMIG, L. Effective ‘blended’ professional development for teachers of mathematics: design and evaluation of the “UPOLA”-program, In *Proceedings of CERME 6*. Lyon: INRP, 2010, s. 1694–1703.
- [9] HIEBERT, J., GROUWS, D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. In *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte: Information Age Publishing, 2007, s. 371–404.
- [10] KOMAN, M., TICHÁ, M. Jak v matematice zvládají žáci zkoumání situací z praxe. *Matematika – fyzika – informatika*. 1997, roč. 7, č. 1, s. 2–12.
- [11] LOIBL, K., LEUDERS, T. Errors during exploration and consolidation – the effectiveness of productive failure as sequentially guided discovery learning. *Journal für Mathematik-Didaktik*. 2018, roč. 39, s. 69–96.
- [12] NAYLOR, S., KEOGH, B. Concept Cartoons: what have we learnt? *Journal of Turkish Science Education*. 2013, roč. 10, č. 1, s. 3–11.
- [13] NAYLOR, S., KEOGH, B., DOWNING, B. Argumentation and primary science. *Research in Science Education*. 2007, roč. 37, s. 17–39.
- [14] NOHDA, N. Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In *Proceedings of PME 24 (Vol. 1)*. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, s. 39–53.
- [15] PEHKONEN, E. *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinki: University of Helsinki, 1997.
- [16] PÓLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning*. New Jersey: Princeton University Press, 1954.
- [17] QUARESMA, M. a kol. *Mathematics lesson study around the world: theoretical and methodological issues*. Cham: Springer, 2018.

- [18] RICHLAND, L. E., MCDONOUGH, I. M. Learning by analogy: discriminating between potential analogs. *Contemporary Educational Psychology*. 2010, roč. 35, s. 28–43.
- [19] SAMKOVÁ, L. Badatelské úlohy ve vyučování matematice. In *Sborník 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2017, s. 116–131.
- [20] SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In *EME 2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech*. Olomouc: Pedagogická fakulta UPO, 2016, s. 9–14.
- [21] SAMKOVÁ, L. *Metoda Concept Cartoons*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2020.
- [22] SAMKOVÁ, L. Polyvalentní úlohy v matematice. *Učitel matematiky*. 2019, roč. 27, č. 4, s. 244–251.
- [23] SAMKOVÁ, L. Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. *Studia Paedagogica*. 2018, roč. 23, č. 3, s. 49–67.
- [24] SAMKOVÁ, L., HOŠPESOVÁ, A., ROUBÍČEK, F., TICHÁ, M. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*. 2015, roč. 6, č. 1, s. 91–122.
- [25] SAMKOVÁ, L., HOŠPESOVÁ, A., TICHÁ, M. Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika*. 2016, roč. 66, č. 5, s. 549–569.
- [26] SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992, s. 334–370.
- [27] SMITH, J. P., DISESSA, A. A., ROSCHELLE, J. Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of Learning Sciences*. 1993, roč. 3, č. 2, s. 115–163.
- [28] VONDROVÁ, N. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládnutí kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019.

- [29] VONDROVÁ, N., CACHOVÁ, J., COUFALOVÁ, J., KRÁTKÁ, M. „Lesson study“ v českých podmínkách: jak učitelé vnímali svou účast a jaký vliv měla na jejich všímání si didakticko-matematických jevů. *Pedagogika*. 2016, roč. 66, č. 4, s. 427–442.